Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Ефимов, Заметка о зеркальной симметрии для кривых, *УМН*, 2010, том 65, выпуск 5, 191–192

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9389>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 12:51:47

Заметка о зеркальной симметрии для кривых

А. И. Ефимов

Гомологическая зеркальная симметрия – это гипотетическая категорная интерпретация зеркальной симметрии, предложенная М. Концевичем [1]. Подход состоит в том, чтобы связать с симплектической и алгебраической стороной некоторые триангулированные категории (с A_∞ -оснащением) и доказать эквивалентность этих категорий.

Изначально гипотеза Концевича была сформулирована для зеркально симметричных многообразий Калаби–Яу. А именно, если X – проективное алгебраическое многообразие Калаби–Яу, а $\hat{X}$ – зеркально симметричное симплектическое многообразие, то с X можно связать производную категорию когерентных пучков $D^b(X)$, а с $\hat{X}$ – A_∞ -категорию Фукаи $\mathcal{F}(\hat{X})$. В этом случае гипотеза утверждает эквивалентность $D^b(X) \cong D^\pi(\mathcal{F}(\hat{X}))$, где $D^\pi(\mathcal{F}(\hat{X}))$ – категория совершенных комплексов над A_∞ -категорией $\mathcal{F}(\hat{X})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Определить строго A_∞ -категорию $\mathcal{F}(\hat{X})$ довольно непросто. В ее исходном варианте она является A_∞ -предкатегорией в смысле Концевича–Сойбельмана. Согласно доказанной автором гипотезе Концевича–Сойбельмана [2], классы эквивалентности A_∞ -предкатегорий находятся в биекции с классами квазиэквивалентности A_∞ -категорий. Это позволяет заменить A_∞ -предкатегорию Фукаи однозначно определенной A_∞ -категорией.

В данной заметке мы имеем дело с гомологической зеркальной симметрией для кривых рода $g \geq 2$. Более общо, гомологической зеркальной симметрии для многообразий общего типа посвящена работа [3].

Будем воспринимать такую кривую симплектически, т. е. как компактную ориентируемую поверхность M рода $g \geq 2$ с симплектической формой. Зеркалом к ней является трехмерная модель Ландау–Гинзбурга (LG), т. е. пара (X, W) , где X – гладкое алгебраическое многообразие, $\dim X = 3$, и $W: X \rightarrow \mathbb{C}$ – регулярная функция.

С LG-моделью (X, W) мы связываем триангулированную категорию особенностей $D_{\text{sg}}(H) := D^b(H)/\text{Perf}(H)$ единственного особого слоя $H := X_0$ функции W .

ТЕОРЕМА 1. *Существует точная эквивалентность $D^\pi(\mathcal{F}(M)) \cong \overline{D_{\text{sg}}}(H)$, триангулированных категорий, где $\overline{D_{\text{sg}}}(H)$ – карубиева оболочка категории $D_{\text{sg}}(H)$.*

В частном случае $g = 2$ эта теорема была доказана П. Зайделем [4]. Используя идеи его доказательства, удастся доказать теорему для всех $g \geq 2$.

Опишем LG-модель (X, W) . Возьмем $V = \mathbb{C}^3$ и действие группы $K = \mathbb{Z}/(2g+1)$ на V , при котором образующий элемент действует как диагональная матрица

$$\text{diag}(\zeta, \zeta, \zeta^{2g-1}) \in \text{SL}(3, \mathbb{C}), \quad \text{где } \zeta = \exp\left(\frac{2\pi i}{2g+1}\right).$$

Обозначим через $\bar{X} := V/K$ особый фактор. У него есть каноническое крепантное разрешение $X = \text{Hilb}_K(V) \rightarrow \bar{X}$ с помощью K -эквивариантной схемы Гильберта. Далее, возьмем многочлен

$$W = -z_1 z_2 z_3 + z_1^{2g+1} + z_2^{2g+1} + z_3^{2g+1}.$$

Он инвариантен относительно группы K , поэтому задает регулярную функцию на $\bar{X}$, а значит, и на X . Обозначим эту функцию той же буквой. Тогда (X, W) – это и есть модель Ландау–Гинзбурга, зеркально симметричная кривой M рода g .

Работа была частично поддержана Фондом поддержки молодых ученых “Конкурс Мёбиуса” и РФФИ (грант № 4713.2010.1).

Легко видеть, что все слои $X_s = W^{-1}(s)$ при $s \neq 0$ являются неособыми поверхностями. Поверхность $H = X_0$ является объединением $(g + 1)$ гладких неприводимых компонент, имеющих простые нормальные пересечения.

Схема доказательства теоремы 1 следующая. Сначала в обеих категориях выбираются генераторы $E \in D^\pi(\mathcal{F}(M))$, $F \in \overline{D_{\text{sg}}}(H)$. После этого остается доказать, что A_∞ -алгебры $\mathbf{R}\text{Hom}(E, E)$ и $\mathbf{R}\text{Hom}(F, F)$ квазиизоморфны.

Про генератор E скажем только, что это прямая сумма $(2g + 1)$ лагранжевых подмногообразий. Генератор F опишем более конкретно. С помощью производного соответствия Маккея можно построить эквивалентность с эквивариантной категорией особенностей $\Phi: D_{\text{sg}}(H) \cong D_{\text{sg}, K}(Y)$, где $Y = W^{-1}(0) \subset V$, и $D_{\text{sg}, K}(Y) = D_K^b(Y)/\text{Perf}_K(Y)$. Далее, категория $D_{\text{sg}, K}(Y)$ порождена объектом $\tilde{F} := \mathcal{O}_0 \otimes \mathbb{C}[K]$, где $\mathcal{O}_0$ – структурный пучок начала координат. Тогда $F \in D_{\text{sg}}(H)$ – это генератор, который соответствует $\tilde{F}$ при эквивалентности Φ . Доказательство квазиизоморфности A_∞ -алгебр эндоморфизмов генераторов использует теорию Муавра–Картана для про-nilпотентных DG-алгебр Ли и теорему формальности Концевича.

Список литературы

- [1] М. Kontsevich, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Zürich, 1994), Birkhäuser, Basel, 1995, 120–139. [2] А. И. Ефимов, “Доказательство гипотезы Концевича–Сойбельмана”, *Матем. сб.* (в печати). [3] А. Kapustin, L. Katzarkov, D. Orlov, M. Yotov, *Centr. Eur. J. Math.*, **7**:4 (2009), 571–605. [4] P. Seidel, “Homological mirror symmetry for the genus 2 curve”, *J. Algebraic Geom.* (to appear).

А. И. Ефимов (А. И. Efimov)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: efimov@mccme.ru

Представлено Д. В. Трещёвым

Принято редколлегией

01.10.2010