Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Туганбаев, Кольца Басса и совершенные кольца, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 1, 173–174

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm939>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 14:06:52

КОЛЬЦА БАССА И СОВЕРШЕННЫЕ КОЛЬЦА

А. А. ТУГАНБАЕВ

Все кольца предполагаются ассоциативными с ненулевой единицей. Кольца, указанные в заглавии, называются *правыми кольцами Басса*, или *правыми B -кольцами*. В [1] доказано, что совершенные справа кольца являются правыми B -кольцами. Коммутативные B -кольца и правые B -кольца с полиномиальным тождеством описаны в [2] и [3]. Основными результатами данной работы являются теоремы 1 и 2.

ТЕОРЕМА 1. *Для кольца A равносильны условия:*

- (1) A – правое B -кольцо, $A/J(A)$ – редуцированное кольцо, у которого все его примитивные справа фактор-кольца строго π -регулярны;
- (2) A – квазиинвариантное справа правое B -кольцо;
- (3) $A/J(A)$ строго регулярно, и $J(A)$ – исчезающий слева идеал.

ТЕОРЕМА 2. *Для кольца A равносильны условия:*

- (1) A – совершенное справа кольцо;
- (2) A – правое B -кольцо, не содержащее бесконечного множества ненулевых ортогональных идемпотентов, все примитивные справа фактор-кольца кольца A строго π -регулярны, каждое фактор-кольцо кольца $A/J(A)$ по его минимальному первичному идеалу есть кольцо ограниченного индекса;
- (3) A – правое B -кольцо ограниченного индекса, не содержащее бесконечного множества ненулевых ортогональных идемпотентов, все примитивные справа фактор-кольца кольца A строго π -регулярны.

Кольцо без ненулевых нильпотентных элементов называется *редуцированным*. Правым V -кольцом называется кольцо, над которым все простые правые модули инъективны. Кольцо называется *квазиинвариантным справа*, если все его максимальные правые идеалы являются идеалами. Кольцо A называется *строго π -регулярным*, если для любого элемента $a \in A$ найдется такое натуральное число n , что $a^n A = a^{n+1} A$. Элемент $a \in A$ называется *регулярным справа*, если его правый аннулятор $r(a)$ равен нулю. Кольцо, у которого индексы нильпотентности всех нильпотентных элементов ограничены в совокупности, называется *кольцом ограниченного индекса*. Через $J(A)$ обозначается радикал Джекобсона кольца A .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Равносильны условия: (1) A – правое B -кольцо; (2) все фактор-кольца кольца A – правые B -кольца; (3) $A/J(A)$ – правое B -кольцо, $J(A)$ – исчезающий слева идеал. (Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) проверяется непосредственно, (2) $\Rightarrow$ (3) следует из [4, предложение 22.7B], (3) $\Rightarrow$ (1) следует из того, что по теореме 11.5.5 из [5] $M/MJ(A) \neq 0$ для любого ненулевого модуля M_A .)

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть $J(A)$ – исчезающий слева идеал. Тогда: (1) если $A/J(A)$ – правое V -кольцо, то A – правое B -кольцо; (2) если $A/J(A)$ – регулярное кольцо, у которого все примитивные справа фактор-кольца являются артиновыми, то A – правое B -кольцо. ((1) следует из замечания 1 и того, что правое V -кольцо является правым B -кольцом (хорошо известно и проверяется непосредственно). (2) следует из (1) и того, что регулярное кольцо, у которого все примитивные справа фактор-кольца являются артиновыми, является V -кольцом [6, предложение 6.18].)

ЗАМЕЧАНИЕ 3 [7, лемма 2(2), теорема 2]. Пусть A – полупервичное кольцо ограниченного индекса. Тогда: (1) если A первично, то каждый его существенный правый идеал содержит регулярный справа элемент (поэтому, если каждый регулярный справа элемент из A обратим в A , то A артиново); (2) каждое фактор-кольцо кольца A по минимальному первичному идеалу – кольцо ограниченного индекса.

ЛЕММА 1. Пусть A – правое B -кольцо, у которого все примитивные справа фактор-кольца являются строго π -регулярными. Тогда: (1) каждый регулярный справа элемент $a \in A$ обратим в кольце A ; (2) если A редуцированное кольцо, то A строго регулярно; (3) если A первичное кольцо ограниченного индекса, то A артиново; (4) если каждое фактор-кольцо кольца $A/J(A)$ по его минимальному первичному идеалу – кольцо ограниченного индекса, то $A/J(A)$ строго π -регулярное кольцо и все его первичные фактор-кольца являются артиновыми; (5) если $A/J(A)$ – кольцо ограниченного индекса, то $A/J(A)$ строго π -регулярное кольцо и все его первичные фактор-кольца

являются артиновыми; (6) если $A/J(A)$ – кольцо ограниченного индекса, не содержащее бесконечного множества ортогональных идемпотентов, то $A/J(A)$ – артиново кольцо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1). Пусть $F_A \equiv \bigoplus_{i=0}^{\infty} A_A/a^i A$. Тогда $F = \bigoplus_{i=0}^{\infty} f_i A$, где $r(f_i) = a^i A$. Пусть $G \equiv \sum_{i=1}^{\infty} (f_{i+1}a - f_i)A$, $H \equiv F/G$. Допустим, что $H = 0$. Тогда найдутся такие элементы $b_1, \dots, b_n \in A$, что $f_1 = \sum_{i=1}^{\infty} (f_{i+1}a - f_i)b_i = -f_1b_1 + \sum_{i=2}^{\infty} f_i(ab_{i-1} - b_i) + f_{n+1}ab_n$. Так как сумма модулей $f_1A, \dots, f_nA$ – прямая сумма, то $f_1 = -f_1b_1, ab_{i-1} - b_i \in r(f_i) = a^i A$ при $2 \leq i \leq n$, $ab_n \in r(f_{n+1}) = a^{n+1}A$. Поскольку $r(a) = 0$, то из включения $ab_n \in a^{n+1}A$ следует включение $b_n \in a^n A$. Кроме того, $ab_{n-1} - b_n \in a^n A$. Поэтому $ab_{n-1} \in a^n A$, причем $r(a) = 0$. Тогда $b_{n-1} \in a^{n-1}A$. Повторяя эти рассуждения, мы приходим к включению $b_1 \in aA = r(f_1)$. Кроме того, $f_1 = -f_1b_1$. Поэтому $f_1 = 0$, $A = r(f_1) = aA$ и элемент a обратим справа. Кроме того, a не является левым делителем нуля. Тогда a обратимый элемент. Рассмотрим теперь случай, когда $H \neq 0$. Ненулевой модуль H обладает по условию максимальным подмодулем M . Пусть $h: F \rightarrow H$, $w: H \rightarrow H/M$ – естественные эпиморфизмы. Так как $h(f_{i+1})a = h(f_i)$ для всех i , то $w(h(f_0))A \subseteq w(h(f_1))A \subseteq \dots$, причем H/M – простой модуль и $H/M = \sum_{i=0}^{\infty} w(h(f_i))A$. Поэтому найдется такое $n \geq 0$, что $h(f_0), \dots, h(f_n) \in M$, $h(f_{n+1}), h(f_{n+2}), \dots \notin M$. Тогда $w(h(f_{n+j}))A = H/M$ для всех натуральных чисел j . Пусть $B_j \equiv r(w(h(f_{n+j})))$ при $1 \leq j < \infty$. Тогда все B_j – максимальные правые идеалы кольца A , содержащие примитивный идеал $D \equiv r(H/M)$. Пусть $t: A \rightarrow A/D$ – естественный кольцевой эпиморфизм. Так как A/D строго π -регулярно, то найдутся такое натуральное число m и элемент $c \in A$, что $t(a^m) = t(a^{m+1}c)$. Построению $h(f_{n+j})a^j = h(f_n) \in M$ для всех натуральных чисел j . Так как $h(f_{n+m+1})a^{m+1} = h(f_n) \in M$, то $w(h(f_{n+1})) = w(h(f_{n+m+1})a^m) = w(h(f_{n+m+1})a^{m+1}c) = 0$. Получено противоречие, поскольку $w(h(f_{n+1}))A = H/M$.

Докажем (2), (3), (4), (5). (2). Из замечания 1 и (1) следует, что A редуцированное кольцо, в котором каждое фактор-кольцо по вполне первичному идеалу является телом. Поэтому A строго регулярно [6, теорема 1.21]. (3) следует из замечания 3(1) и из (1). (4). Из (3) следует артиновость всех первичных фактор-колец кольца $A/J(A)$. Тогда $A/J(A)$ строго π -регулярно [8, теорема 2.1]. (5) следует из (4) и из замечания 3(2). (6) проверяется с помощью (5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 1 и 2. В теореме 1 импликация (3) $\implies$ (2) следует из замечания 2 (2). Так как подпрямое произведение областей является редуцированным кольцом, то импликация (2) $\implies$ (1) следует из того, что любое примитивное справа фактор-кольцо квазиинвариантного справа кольца является телом. (1) $\implies$ (3) следует из замечания 1 и леммы 1 (2). В теореме 2 (1) $\implies$ (3) доказано в [1], (3) $\implies$ (2) следует из замечания 3 (2), а (2) $\implies$ (1) следует из леммы 1 (6), замечания 1 и того, что идемпотенты можно поднимать по модулю нильидеала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Bass H. // Trans. Amer. Math. Soc. 1960. V. 95. P. 466–488. [2] Hamsher R. M. // Proc. Amer. Math. Soc. 1967. V. 18. P. 1133–1137. [3] Марков В. Т. // Труды семин. им. И. Г. Петровского. 1981. № 7. С. 232–238. [4] Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 2. М.: Мир, 1979. [5] Каш Ф. Модули и кольца. М.: Мир, 1981. [6] Goodearl K. R. Von Neumann regular rings. London e. a.: Pitman, 1979. [7] Бейдар К. И., Михалев А. В. // Труды семин. им. И. Г. Петровского. 1988. № 13. С. 237–249. [8] Fisher J. V., Snider R. L. // Proc. Amer. Math. Soc. 1974. V. 54. № 1. P. 135–144.