Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Буфетов, Эргодические интегралы потоков
на плоских поверхностях, *УМН*, 2010, том 65, вы-
пуск 6, 181–182

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9392>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 17:38:05

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Эргодические интегралы потоков на плоских поверхностях

А. И. Буфетов

Пусть M – поверхность рода $\rho \geq 2$, ω – абелев дифференциал на поверхности M , $\mathfrak{m} = i(\omega \wedge \bar{\omega})/2$ – элемент площади формы ω , причем $\mathfrak{m}(M) = 1$. Пусть h_t^+ , h_t^- – отвечающие ω вертикальный и горизонтальный потоки на M . Пусть $x \in M$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$. Прямоугольник $\Pi(x, t_1, t_2) = \{h_{\tau_1}^+ h_{\tau_2}^- x, 0 \leq \tau_1 < t_1, 0 \leq \tau_2 < t_2\}$ назовем допустимым, если его замыкание не содержит нулей формы ω . Определим пространство $\mathfrak{B}^+$ непрерывных аддитивных коциклов $\Phi^+(x, t)$ над потоком h_t^+ таких, что при всяком $x \in M$ функция $\Phi^+(x, t)$ гёльдерова по t , а если прямоугольник $\Pi(x, t_1, t_2)$ допустим, то $\Phi^+(x, t_1) = \Phi^+(h_{t_2}^- x, t_1)$. Пусть $\mathfrak{B}^-$ – аналогичное пространство над h_t^- . Например, если $\nu^\pm(x, t) = t$, то $\nu^\pm \in \mathfrak{B}^\pm$. Для $\Phi^+ \in \mathfrak{B}^+$, $\Phi^- \in \mathfrak{B}^-$ введем конечно аддитивную меру $\Phi^+ \times \Phi^-$ на M формулой $\Phi^+ \times \Phi^-(\Pi(x, t_1, t_2)) = \Phi^+(x, t_1) \cdot \Phi^-(x, t_2)$ (здесь предполагается, что прямоугольник $\Pi(x, t_1, t_2)$ допустим). Определим спаривание между пространствами $\mathfrak{B}^+$, $\mathfrak{B}^-$ формулой $\langle \Phi^+, \Phi^- \rangle = \Phi^+ \times \Phi^-(M)$.

Пусть $\mathcal{H}$ – связная компонента пространства модулей абелевых дифференциалов с предписанными порядками нулей, g_s – поток Тейхмюллера на $\mathcal{H}$, $\mathbb{A}(s, X)$ – коцикл Концевича–Зорича над g_s , действующий в когомологиях $H^1(M, \mathbb{R})$ поверхности M (подробные определения даны в [1]). Пусть, далее, μ – гладкая мера Мазура–Вича (см. [2]–[4]) на $\mathcal{H}$. По теореме Авила–Вианы [5] ляпуновский спектр коцикла $\mathbb{A}$ по отношению к мере μ прост и имеет вид $1 > \theta_2 > \dots > \theta_\rho > 0 > -\theta_\rho > \dots > -\theta_2 > -1$. Для $X \in \mathcal{H}$, $X = (M, \omega)$, пусть $E_X^+, E_X^- \subset H^1(M, \mathbb{C})$ – устойчивое и неустойчивое ляпуновские пространства коцикла $\mathbb{A}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для μ -почти всех $X \in \mathcal{H}$ существуют естественные изоморфизмы $\mathcal{I}_X^\pm: E_X^\pm \rightarrow \mathfrak{B}_X^\pm$, при которых спаривание $\langle \cdot, \cdot \rangle$ переходит в каноническую билинейную форму на $H^1(M, \mathbb{R})$ (интеграл внешнего произведения соответствующих 1-форм). В частности, $\dim \mathfrak{B}_X^+ = \dim \mathfrak{B}_X^- = \rho$.

Для $\Phi^- \in \mathfrak{B}^-$ положим $m_{\Phi^-} = \nu^+ \times \Phi^-$; мера m_{Φ^-} является h_t^+ -инвариантным распределением в смысле Форни [6], [7]. В частности, $m_{\nu^-} = \mathfrak{m}$. Для липшицевой функции f на M , интеграл $\int f dm_{\Phi^-} = m_{\Phi^-}(f)$ определен по Риману при всяком $\Phi^- \in \mathfrak{B}^-$.

Автор – стипендиат Фонда Альфреда Слоуна. Работа выполнена при поддержке гранта МК-4893.2010.1 Президента РФ, программы Президиума РАН “Математическая теория управления”, аналитической ведомственно-целевой программы “Развитие научного потенциала высшей школы” 2.1.1/5328, гранта РФФИ 10-01-93115-НЦНИЛ-а, Фонда Эдгара Оделла Ловетта в Университете Райса, гранта NSF DMS 0604386.

Пусть теперь $\Phi_1^+ = \nu^+$, $\Phi_2^+, \dots, \Phi_\rho^+$ – базис в $\mathfrak{B}_X^+$ такой, что вектор $\mathcal{J}_X(\Phi_i^+)$ имеет показатель Ляпунова θ_i ; пусть $\Phi_1^- = \nu^-$, $\Phi_2^-, \dots, \Phi_\rho^-$ – двойственный базис в $\mathfrak{B}_X^-$ по отношению к спариванию $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

ТЕОРЕМА 1. Для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $C_\varepsilon > 0$ такое, что для μ -почти всех $X \in \mathcal{H}$, $X = (M, \omega)$, любой липшицевой функции f на M , любых $x \in M$ и $T > 0$ выполнено

$$\left| \int_0^T f \circ h_t^+(x) dt - Tm(f) - \sum_{i=2}^{\rho} m_{\Phi_i^-}(f) \Phi_i^+(x, T) \right| \leq C_\varepsilon \|f\|_{\text{Lip}} (1 + T^\varepsilon).$$

Доказательство теоремы 1 основано на новом символическом кодировании потоков на поверхностях, развивающем конструкции Ш. Ито [8] и А. М. Вершика [9]. Полученные результаты дают уточнение теоремы Зорича [10] об уклонениях эргодических средних переключиваний. Пусть $\mathfrak{T}: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ – минимальное переключивание с неприводимой подстановкой π . Пусть $\mathfrak{B}(\mathfrak{T})$ – пространство непрерывных функций Φ на $[0, 1]$ таких, что $\Phi(0) = 0$, а если $\mathfrak{T}$ непрерывно на $[a, b]$, то $\Phi(\mathfrak{T}b) - \Phi(\mathfrak{T}a) = \Phi(b) - \Phi(a)$. Например, если $\Psi(t) = t$, то $\Psi \in \mathfrak{B}(\mathfrak{T})$. Как и прежде, для $\Phi \in \mathfrak{B}(\mathfrak{T})$ и липшицевой функции f на $[0, 1]$ интеграл $\int f d\Phi$ определен по Риману–Стилтьесу.

ТЕОРЕМА 2. Найдется натуральное число ρ , зависящее лишь от подстановки, такое, что по отношению к мере Лебега в пространстве переключиваний для почти всякого переключивания имеем $\dim \mathfrak{B}(\mathfrak{T}) = \rho$. Более того, найдутся числа $1 = \theta_1 > \theta_2 > \dots > \theta_\rho > \theta_{\rho+1} = 0$, зависящие лишь от π , и базис $\Phi_1 = \Psi$, $\Phi_2, \dots, \Phi_\rho \in \mathfrak{B}(\mathfrak{T})$ такие, что при всяком $\varepsilon > 0$ функция Φ_i гёльдерова с показателем $\theta_i - \varepsilon$, а для всякого $x \in [0, 1]$ и всякой липшицевой функции f на $[0, 1]$ выполнено

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{\log \left| \sum_{k=0}^{N-1} f \circ \mathfrak{T}^k(x) \right|}{\log N} = \theta_{i(f)+1},$$

где $i(f) = \max \left\{ i : \int f d\Phi_j = 0 \text{ при всех } j \leq i \right\}$.

Как и раньше, $1 = \theta_1 > \theta_2 > \dots > \theta_\rho$ суть положительные показатели Ляпунова коцикла Концевича–Зорича потока Тейхмюллера по отношению к мере Мазура–Вича на страте в пространстве модулей абелевых дифференциалов, отвечающем классу Розы подстановки π .

Список литературы

- [1] M. Kontsevich, *The mathematical beauty of physics* (Saclay, 1996), Adv. Ser. Math. Phys., **24**, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1997, 318–332. [2] H. Masur, *Ann. of Math.* (2), **115**:1 (1982), 169–200. [3] W. A. Veech, *Ann. of Math.* (2), **115**:1 (1982), 201–242. [4] W. A. Veech, *Ann. of Math.* (2), **124**:3 (1986), 441–530. [5] A. Avila, M. Viana, *Acta Math.*, **198**:1 (2007), 1–56. [6] G. Forni, *Ann. of Math.* (2), **146**:2 (1997), 295–344. [7] G. Forni, *Ann. of Math.* (2), **155**:1 (2002), 1–103. [8] Sh. Ito, *Tokyo J. Math.*, **1**:2 (1978), 305–324. [9] А. М. Вершик, *Записки науч. сем. ЛОМИ*, **115** (1982), 72–82. [10] A. Zorich, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **17**:6 (1997), 1477–1499.

А. И. Буфетов (A. I. Bufetov)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН;
Rice University, Houston, USA
E-mail: bufetov@mi.ras.ru

Представлено Д. В. Аносовым

Принято редколлегией
27.10.2010