Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Тюрин, Торы Чеканова и псевдоторические структуры, *УМН*, 2011, том 66, выпуск 1, 185–186

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9394>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 10:45:35

Торы Чеканова и псевдоторические структуры

Н. А. Тюрин

Торы Чеканова доставляют примеры экзотических монотонных лагранжевых тор, не переводимых в стандартные торы симплектоморфизмами, в $\mathbb{R}^{2n}$, $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \dots \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ и некоторых проективных пространствах (см. [1]). Цепочка этих примеров вырастает из конструкции лагранжева тора $\Theta \subset \mathbb{R}^4$, представленного явно и неявно в ставших классическими работах [2] и [3]. С другой стороны, в работах [4], [5] было предложено обобщение понятия торической структуры на симплектических многообразиях, получившее название *псевдоторической структуры*. Так же, как и торическая, псевдоторическая структура порождает пространство лагранжевых слоений с общим гладким слоем, особые слои которых отличаются существованием на них сепаратрисных решений.

В настоящем кратком сообщении мы строим тор Чеканова $\Theta^k \subset \mathbb{R}^{2k-2}$, определенный в [1], как гладкий лагранжев тор, порождаемый псевдоторической структурой. Отсюда вытекает возможность построения экзотических монотонных лагранжевых тор типа Чеканова на торических многообразиях Фано.

Рассмотрим $\mathbb{R}^{2k+2}$ со стандартными комплексной и симплектической структурами, т. е. $\mathbb{C}^{k+1}$. Зафиксируем координаты $(z_1, \dots, z_{k+1})$; тогда имеется отображение $\psi: \mathbb{C}^{k+1} \rightarrow \mathbb{C}$, задаваемое формулой

$$(z_1, \dots, z_{k+1}) \mapsto a = z_1 \times \dots \times z_{k+1} \in \mathbb{C}_a.$$

Слои ψ – гиперповерхности в $\mathbb{C}^{k+1}$, гладкие за исключением слоя над нулем. Гамильтоново действие тора T^{k+1} может быть выбрано так, что имеется подтор T_0^k , действие которого сохраняет слои ψ . А именно, этот подтор выделен условием

$$\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i = 0,$$

где α_i – веса. Отображения моментов для гамильтонова действия T_0^k даются средними значениями $F_i = \langle A_i \psi; \psi \rangle$, $\psi \in \mathbb{C}^{k+1}$, самосопряженных операторов $A_i = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1})$, где $\lambda_i = 1$, $\lambda_{i+1} = -1$ и $\lambda_j = 0$ для остальных индексов. Тогда нетрудно видеть, что $\{F_1, \dots, F_k\}$ – коммутирующий набор на $\mathbb{C}^{k+1}$, ограничение которого на каждый гладкий слой ψ есть вполне интегрируемая система (см. [6]). Структура такого типа называется *псевдоторической структурой* (детальное определение см. в [5]).

Если зафиксировать набор $(c_1, \dots, c_k)$ некритических значений для ограничений $F_1^a, \dots, F_k^a$ на произвольный гладкий слой N_a (т. е. $-1 < c_i < 1$), то совместное множество уровня $S_{(c_1, \dots, c_k)}^a = \{F_i^a = c_i\} \subset N_a$ – гладкий лагранжев тор для каждого $a \neq 0$. Тогда выбор произвольной гладкой петли $\gamma \subset \mathbb{C}_a^* = \mathbb{C}_a \setminus \{0\}$ определяет гладкий лагранжев тор в $\mathbb{C}^{k+1}$:

$$T^{k+1} = S_{\gamma, (c_1, \dots, c_k)} = \bigcup_{a \in \gamma} S_{(c_1, \dots, c_k)}^a.$$

Различаются два случая: стандартный тип, когда γ нестягиваема в $\mathbb{C}_a^*$; тип Чеканова, когда γ стягиваема в $\mathbb{C}_a^*$. Названия типов объясняются следующим утверждением.

Работа выполнена при поддержке Лаборатории алгебраической геометрии ГУ-ВШЭ, грант правительства РФ дог. 11.G34.31.0023, а также грантов РФФИ-НЦНИЛ (грант № 10-01-93113) и программы “Ведущие научные школы” (грант НШ-1987.2008.1).

Рассмотрим две гладкие петли в $\mathbb{C}_a^*$: нестягиваемая петля γ_1 есть просто окружность с центром в нуле; для произвольной гладкой петли $\gamma_0 \subset D \subset \mathbb{C}$ из сектора

$$D = \left\{ z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 2, 0 < \arg z < \frac{2\pi}{k+1} \right\}$$

(ср. [1; первая формула в разделе 2]), стягиваемая петля γ_2 есть $(\gamma_0)^{k+1}$.

ТЕОРЕМА. *Лагранжевы торы $T_1, T_2 \subset \mathbb{C}^{k+1}$, соответствующие значениям $c_1 = \dots = c_k = 0$ и петлям $\gamma_1, \gamma_2 \subset \mathbb{C}_a^*$, совпадают со стандартным тором и тором Θ^k соответственно.*

Доказательство состоит в прямом вычислении (детали можно найти в [7]).

Далее, для экзотических монотонных торов в $\mathbb{CP}^1 \times \dots \times \mathbb{CP}^1$ и проективных пространствах, предложенных в [1], также имеются описания в терминах псевдоторических структур на этих многообразиях. Отсюда следует, что произвольное симплектическое многообразие с псевдоторической структурой обладает торами чекановского типа. В работе [5] представлен набросок доказательства существования псевдоторической структуры на произвольном торическом многообразии Фано, откуда следует существование монотонных лагранжевых торов типа Чеканова на произвольном торическом многообразии Фано. Напомним, что в исходном случае торы Чеканова не эквивалентны стандартным лагранжевым торами, индуцируемым торической структурой; поэтому естественно ожидать, что торы чекановского типа в произвольном торическом многообразии Фано также окажутся не эквивалентными слоям отображения действия по модулю симплектоморфизмов. Работой над этой гипотезой мы планируем продолжить наши исследования псевдоторических структур.

Список литературы

- [1] Yu. Chekanov, F. Schlenk, *Electron. Res. Announc. Math. Sci.*, **17** (2010), 104–121; arXiv: abs/1003.5960v1. [2] Yu. V. Chekanov, *Math. Z.*, **223**:4 (1996), 547–559. [3] Ya. Eliashberg, L. Polterovich, *Geometric topology* (Athens, GA, 1993), AMS/IP Stud. Adv. Math., **2**, part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, 313–327. [4] С. А. Белев, Н. А. Тюрин, *Матем. заметки*, **87**:1 (2010), 48–59; англ. пер.: S. A. Belev, N. A. Tyurin, *Math. Notes*, **87**:1 (2010), 43–51. [5] Н. А. Тюрин, *ТМФ*, **162**:3 (2010), 307–333; англ. пер.: N. A. Tyurin, *Theoret. and Math. Phys.*, **162**:3 (2010), 255–275. [6] Н. Н. Нехорошев, *Функц. анализ и его прил.*, **28**:2 (1994), 67–69; англ. пер.: N. N. Nekhoroshev, *Funct. Anal. Appl.*, **28**:2 (1994), 128–129. [7] N. A. Tyurin, *Twist tori and pseudotoric structures*, arXiv: 1004.2574v1.

Н. А. Тюрин (N. A. Tyurin)

Объединенный институт ядерных исследований,
Лаборатория теоретической физики
им. Н. Н. Боголюбова
E-mail: tyurin@tyurin.mccme.ru,
ntyurin@thsun1.jinr.ru

Представлено А. Г. Сергеевым

Принято редколлегией
03.11.2010