Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Синельников, О совместном распределении
($\sup X - X$, $\sup X$) для процесса Леви X , *УМН*, 2010,
том 65, выпуск 6, 193–194

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9395>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 15:00:54

О совместном распределении $(\sup X - X, \sup X)$ для процесса Леви X

С. С. Синельников

1. Классический результат П. Леви гласит (см., например, [1]), что

$$(\sup B - B, \sup B) \stackrel{\text{law}}{=} (|B|, L(B)),$$

где B – стандартное броуновское движение, $L(B)$ – локальное время броуновского движения в нуле, а $\stackrel{\text{law}}{=}$ означает совпадение процессов по распределению.

Этот результат обобщается на случай броуновского движения со сносом B^μ . В работе [2] (см. также [3]) было показано, что

$$(\sup B^\mu - B^\mu, \sup B^\mu) \stackrel{\text{law}}{=} (|X^\mu|, L(X^\mu)),$$

где X^μ – единственное решение (сильное) стохастического дифференциального уравнения

$$dX_t^\mu = -\mu \operatorname{sgn} X_t^\mu dt + dB_t, \quad X_0^\mu = 0,$$

где $\operatorname{sgn} x = 1$, если $x > 0$, и $\operatorname{sgn} x = -1$, если $x \leq 0$. Пусть X_t – некоторый процесс Леви, мера Леви ν которого удовлетворяет условию $\int_{|x|<1} \nu(dx) < \infty$. В этом случае число скачков процесса на любом конечном интервале конечно, и для процесса X_t можно определить триплет инфинитезимальных характеристик (μ, σ, ν) относительно функции урезания $h(x) = x \mathcal{I}\{x \neq 0\}$, где $\mathcal{I}$ обозначает индикаторную функцию. Предположим также, что $\sigma > 0$, т.е. процесс X_t имеет невырожденную диффузионную компоненту. Пусть $S_t = \sup_{u \leq t} X_u$.

Основной результат настоящей работы состоит в следующем.

ТЕОРЕМА. 1) *Предположим, что процесс X_t не имеет положительных скачков. Тогда пара процессов $(S_t - X_t, S_t)$ совпадает по распределению с парой процессов $(|Y_t|, L_t)$, где Y_t является решением стохастического дифференциального уравнения*

$$dY_t = -\mu \operatorname{sgn} Y_{t-} dt + \sigma dB_t - \operatorname{sgn} Y_{t-} \Delta N_t, \quad Y_0 = 0,$$

где B_t – стандартное броуновское движение, N_t – составной пуассоновский процесс, соответствующий случайной пуассоновской мере интенсивности ν , $\Delta N_t = N_t - N_{t-}$, а L_t – локальное время марковского процесса Y_t в нуле.

2) *В общем случае, когда процесс X_t имеет как положительные, так и отрицательные скачки, пара процессов $(S_t - X_t, S_t)$ совпадает по распределению с парой процессов $(|Z_t|, R_t)$, где Z_t является решением уравнения*

$$dZ_t = -\mu \operatorname{sgn} Z_{t-} dt + \sigma dB_t - \operatorname{sgn} Z_{t-} \Delta N_t - \mathcal{I}\{Z_{t-}(Z_{t-} - \operatorname{sgn} Z_{t-} \Delta N_t) \leq 0\} (Z_{t-} - \operatorname{sgn} Z_{t-} \Delta N_t), \quad Z_0 = 0, \quad (1)$$

где B_t и N_t были определены ранее,

$$R_t = \sum_{0 \leq s \leq t} \mathcal{I}\{Z_{s-}(Z_{s-} - \operatorname{sgn} Z_{s-} \Delta N_s) \leq 0\} |Z_{s-} - \operatorname{sgn} Z_{s-} \Delta N_s| + L_t,$$

а L_t является локальным временем марковского процесса Z_t в нуле.

2. Докажем теорему в общем случае. Рассмотрим процесс Y_t , удовлетворяющий уравнению

$$dY_t = -\mu \operatorname{sgn} Y_{t-} dt + \sigma dB_t - \operatorname{sgn} Y_{t-} \Delta N_t, \quad Y_0 = 0.$$

Поскольку процесс N_t имеет конечное число скачков на любом конечном интервале, то, используя результаты работы [4], можно показать, что это уравнение имеет единственное сильное решение, к тому же являющееся строго марковским процессом. Процесс Z_t может быть восстановлен из процесса Y_t с помощью техники замещения:

$$Z_t = \begin{cases} Y_t^1 = Y_t, & 0 \leq t < \tau_1, \\ Y_t^2 = Y_t - Y_{\tau_1}^1, & \tau_1 \leq t < \tau_2, \\ Y_t^3 = Y_t - Y_{\tau_1}^1 - Y_{\tau_2}^2, & \tau_2 \leq t < \tau_3, \\ \dots, & \end{cases} \quad (2)$$

где τ_i – моменты, когда процесс Y_t^i пересекает ось абсцисс скачком. Таким образом, процесс Z_t , определенный как решение уравнения (1), существует, единственен и является строго марковским процессом. Заметим, что из представления (2) следует, что все скачки процесса Z_t остаются в одной полуплоскости (дополненной нулем).

Применим к процессу $|Z_t|$ формулу Танака:

$$|Z_t| = \int_0^t \operatorname{sgn} Z_{s-} dZ_s + \sum_{0 \leq s \leq t} \{|Z_s| - |Z_{s-}| - \operatorname{sgn} Z_{s-} \Delta Z_s\} + L_t, \quad (3)$$

где L_t – локальное время процесса Z_t в нуле. В уравнении (3) второй член отвечает за компенсацию тех скачков процесса Z_t , при которых процесс пересекает нулевой уровень. Поскольку в процессе Z_t таких скачков нет, то этот член равен нулю. Подставляя dZ_s из уравнения (1) в уравнение (3) и обозначая $P_t = \mu \int_0^t ds - \int_0^t \operatorname{sgn} Z_{s-} dB_s + \sum_{0 \leq s \leq t} \Delta N_s$, получаем

$$|Z_t| = -P_t + \sum_{0 \leq s \leq t} \mathcal{I}\{Z_{s-}(Z_{s-} - \operatorname{sgn} Z_{s-} \Delta N_s) \leq 0\} |Z_{s-} + (Z_{s-} - \operatorname{sgn} Z_{s-} \Delta N_s)| + L_t. \quad (4)$$

Заметим, что $\int_0^\infty \mathcal{I}\{|Z_t| \neq 0\} dR_t = 0$, где R_t обозначает сумму двух последних слагаемых в (4). Тогда к уравнению (4) можно применить лемму Скорохода для càdlàg функций (см., например, [5]). Учитывая, что $P_0 = 0$, мы приходим к выражению

$$\left(\sup_{s \leq t} P_s - P_t, \sup_{s \leq t} P_s \right) = (|Z_t|, R_t) \quad \forall t \geq 0. \quad (5)$$

Из характеристической теоремы Леви следует, что $P_t \stackrel{\text{law}}{=} X_t$. Таким образом, из (5) вытекает искомое утверждение.

Список литературы

- [1] П. Леви, *Стохастические процессы и броуновское движение*, Наука, М., 1972, 375 с.
 [2] S. E. Graverson, A. N. Shiryaev, *Bernoulli*, **6**:4 (2000), 615–620. [3] А. С. Черный, А. Н. Ширяев, *Теория вероятн. и ее примен.*, **44**:2 (1999), 466–472. [4] А. К. Звонкин, *Матем. сб.*, **93**:1 (1974), 129–149. [5] H. J. Engelbert, V. Kurenok, A. Zalinescu, *From stochastic calculus to mathematical finance*, Springer, Berlin, 2006, 227–249.

С. С. Синельников (S. S. Sinelnikov)
 Московский государственный университет
 им. М. В. Ломоносова
 E-mail: sergesinelnikov@gmail.com

Представлено Д. В. Трещёвым
 Принято редколлегией
 09.10.2010