Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Горский, Доказательство гипотезы Гала для обобщенных ассоциативов серии D , *УМН*, 2010, том 65, выпуск 6, 185–186

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9397>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 15:22:36

Доказательство гипотезы Гала для обобщенных ассоциаэдров серии D

М. А. Горский

Выпуклый многогранник размерности n называется *простым*, если каждая его вершина принадлежит ровно n гиперграням. Простой многогранник P^n называется *флаговым*, если любое множество его гиперграней $F_{i_1}, \dots, F_{i_k}$ имеет непустое пересечение, как только любая пара из этого множества имеет непустое пересечение.

В теории кластерных алгебр определяются (см. [1]) обобщенные ассоциаэдры – простые флаговые многогранники, двойственные к кластерным комплексам алгебр конечного типа. Каждый такой многогранник канонически соответствует несвязному объединению диаграмм Дынкина. Диаграммам A_n соответствуют обычные ассоциаэдры As^n ; диаграмма B_n и C_n – циклоэдры Cy^n . Будем называть *серией* D^n обобщенные ассоциаэдры, отвечающие диаграммам D_n .

Пусть f_i – количество i -мерных граней n -мерного многогранника P . Как обычно, пусть $f(P)(t) = \sum_{i=0}^n f_i t^i$ и $h(P)(t) = f(P)(t-1) - h$ -полином. Для простых многогранников выполнены соотношения Дэна–Соммервиля (см. [2]), равносильные возрастности h -полинома, т. е. $h(P)(t) = \sum_{i=0}^{[n/2]} \gamma_i t^i (1+t)^{n-2i}$. Полином $\gamma(P)(\tau) = \sum_{i=0}^{[n/2]} \gamma_i \tau^i$ называется γ -полиномом.

ГИПОТЕЗА 1 (С. Р. Гал, [3]). Пусть многогранник P флаговый, тогда $\gamma_i(P) \geq 0$.

Рассмотрим множество $\mathcal{P}^{\text{cube}}$ многогранников, получающихся из куба последовательными срезками граней коразмерности 2. Гипотеза Гала доказана для всех флаговых нестозэдров в [4] с использованием двух фактов: любой флаговый нестозэдр лежит в $\mathcal{P}^{\text{cube}}$, и для любого многогранника из $\mathcal{P}^{\text{cube}}$ гипотеза Гала верна. Многогранники As^n и Cy^n – нестозэдры [5], поэтому для них гипотеза уже доказана. Основной результат нашей работы: *многогранники D^n не являются нестозэдрами (при $n \geq 4$), однако лежат в $\mathcal{P}^{\text{cube}}$, следовательно, гипотеза Гала верна и для них.*

Производящим множеством на $[n+1]$ называется совокупность B непустых подмножеств множества $[n+1]$ такая, что: 1) $\{i\} \in B$ для всех $i \in [n+1]$; 2) если $S_1, S_2 \in B$ и $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$, то $S_1 \cup S_2 \in B$.

Пусть e_i – векторы стандартного базиса в $\mathbb{R}^{n+1}$. Для каждого $S \in [n+1]$ определим симплекс $\Delta_S = \text{conv}\{e_i, i \in S\}$. *Нестозэдром* P_B называется сумма Минковского $\sum \Delta_S$ по $S \in B$. Каждый нестозэдр является простым многогранником (см. [5]).

В [6] введено дифференциальное кольцо многогранников $(\mathcal{P}, d)$, где dP – формальная сумма всех гиперграней многогранника P . Для нестозэдров имеет место формула

$$dP_B = \sum_{S \in B/B_{\max}} P_{B|S} \times P_{B/S}. \quad (1)$$

Здесь $B_{\max}$ – множество элементов B , максимальных по включению, $B|_S = \{S' \subset S, S' \in B\}$, $B/S = \{S' = S' \setminus S, S' \in B\}$.

Нам понадобятся два следующих известных факта.

(i) Множество гиперграней As^n взаимно однозначно соответствует множеству диагоналей $(n+3)$ -угольника, причем две гиперграни пересекаются тогда и только тогда, когда соответствующие им диагонали не имеют общих внутренних точек (см. [7]).

(ii) Множество гиперграней D^n взаимно однозначно соответствует множеству $\text{Diag} \cup D \cup D'$, где множество Diag состоит из пар центрально-симметричных (друг другу) диагоналей $2n$ -угольника, не являющихся диаметрами; каждое из множеств D

и D' состоит из диаметров $2n$ -угольника. Удобно считать, что каждый диаметр из D покрашен в один цвет, из D' – в другой. Две гиперграни пересекаются, если соответствующие им диагонали либо не имеют общих внутренних точек, либо являются диаметрами одного цвета, либо являются диаметрами разных цветов, соединяющими одну и ту же пару противоположных точек (см. [1]).

Используя эти факты, получаем следующее предложение.

$$\text{ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. } dD^n = n \left(\sum_{k=0}^{n-3} (As^k \times D^{n-k-1}) + 2As^{n-1} \right).$$

Непосредственно из формулы (1) получаем:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть P – n -мерный многогранник, не раскладывающийся в нетривиальное прямое произведение, и пусть у P есть не менее $2n + 3$ гиперграней, не раскладывающихся в нетривиальное прямое произведение. Тогда P – нестоздр.

Известно, что многогранники As^n не раскладываются в нетривиальное прямое произведение. Отсюда, используя индукцию, мы получаем ввиду предложений 1 и 2 следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. Обобщенные ассоциаэдры типа D_n при $n \geq 4$ не являются нестоздрами.

ТЕОРЕМА 2. Обобщенные ассоциаэдры D^n лежат в множестве $\mathcal{P}^{\text{cube}}$.

Доказательство проводится индукцией по n : показывается, что D^n можно получить из $D^{n-1} \times I$ последовательной срезкой граней коразмерности 2. Оказывается, что можно срезать сначала некоторые $n - 1$ граней у одного из оснований $D^{n-1} \times 0$, затем грань, являющуюся пересечением двух гиперграней (одной новой, другой старой), соответствующих двум диаметрам разного цвета, а затем еще $n - 3$ грани у того же основания. Ввиду флаговости многогранника D^n , его комбинаторная структура определяется попарными пересечениями гиперграней. На языке диагоналей $2n$ -угольника несложно проверить, что мы получим именно требуемый многогранник.

СЛЕДСТВИЕ 1. Гипотеза Гала 1 верна для обобщенных ассоциаэдров D^n .

ЗАМЕЧАНИЕ. Используя конструкцию из [8], можно по последовательности срезов многогранника $D^{n-1} \times I$, приводящих к D^n , получить явное рекуррентное соотношение, выражающее $\gamma(D^n)$ через $\gamma(D^k)$ и $\gamma(As^k)$, $k < n$. См. вывод такого соотношения для циклоэдра в [8].

Автор выражает благодарность В. М. Бухштаберу за постановку задачи и внимание к работе и В. Д. Володину за полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] S. Fomin, A. Zelevinsky, *Ann. of Math.* (2), **158**:3 (2003), 977–1018; arXiv: hep-th/0111053.
 [2] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, *Топические действия в топологии и комбинаторике*, МЦНМО, М., 2004, 272 с. [3] S. R. Gal, *Discrete Comput. Geom.*, **34**:2 (2005), 269–284; arXiv: math/0501046. [4] В. Д. Володин, *УМН*, **65**:1 (2010), 183–184. [5] A. Postnikov, *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 2009, № 6, 1026–1106; arXiv: math.CO/0507163. [6] В. М. Бухштабер, Тр. МИАН, **263**, Наука, М., 2008, 18–43. [7] C. W. Lee, *European J. Combin.*, **10**:6 (1989), 551–560. [8] V. M. Buchstaber, V. Volodin, *Upper and lower bound theorems for graph-associahedra*, arXiv: abs/1005.1631.

М. А. Горский (M. A. Gorsky)
 Московский государственный университет
 им. М. В. Ломоносова
 E-mail: mike.gorsky@gmail.com

Представлено В. М. Бухштабером
 Принято редколлегией
 19.11.2010