Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Ю. Бунькова, Теорема сложения для деформированной функции Бейкера–Ахиезера, *УМН*, 2010, том 65, выпуск 6, 183–184

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9398>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 15:15:17

Теорема сложения для деформированной функции Бейкера–Ахиезера

Е. Ю. Бунькова

В [1] введена функция

$$\Psi(x) = \Psi(x; v, \alpha) = \frac{\sigma(v+x)^{(1-\alpha)/2} \sigma(v-x)^{(1+\alpha)/2}}{\sigma(x)\sigma(v)} \exp\left(\left(-\frac{\mu_1}{2} + \alpha\zeta(v)\right)x\right). \quad (1)$$

При $\alpha = \pm 1$ и $\mu_1 = 0$ эта функция переходит в решения $\Phi(x; \pm v)$ уравнения Ламе

$$\Phi''(x) - 2\wp(x)\Phi(x) = \wp(v)\Phi(x) \quad (2)$$

такие, что $\Phi(x; \pm v) = 1/x + (\text{регулярная функция})$. Здесь $\wp(x)$ – стандартная $\wp$ -функция Вейерштрасса с параметрами g_2, g_3 , а $\Phi(x; v)$ – эллиптическая функция Бейкера–Ахиезера. Функция $\Psi(x; v, \alpha)$ названа деформированной функцией Бейкера–Ахиезера, ее свойства при $\mu_1 = 0$:

- 1) $\Psi(x; v, \alpha) = 1/x - \wp(v)x/2 + \alpha\wp'(v)x^2/6 + (x^3)$ в окрестности точки $x = 0$;
- 2) функции $\Psi(x; \pm v, \alpha)$ являются решениями деформированного уравнения Ламе

$$\Psi''(x) - U(x; v, \alpha)\Psi(x) = \wp(v)\Psi(x), \quad \text{где } U(x; v) = 2\wp(x) - \frac{1-\alpha^2}{4} \frac{\wp'(v)^2}{(\wp(x) - \wp(v))^2}; \quad (3)$$

3) $\Psi(x + 2\omega_k; v, \alpha) = \Psi(x; v, \alpha) \exp(2\alpha(\zeta(v)\omega_k - \eta_k v))$, $\Psi(x; v + 2\omega_k, \alpha) = \Psi(x; v, \alpha)$, где $2\omega_k$, $k = 1, 2$, – периоды $\wp$ -функции;

4) функция $\Psi(x; \omega_k, \alpha) = \Psi(x; \omega_k)$ не зависит от α и $\Psi(x + 2\omega_k; \omega_k) = \Psi(x; \omega_k)$;

5) $\Psi(x; v, 0) = \sqrt{\wp(x) - \wp(v)}$.

$$\text{Положим } \mathcal{D}(\xi; x, y, v) = \begin{vmatrix} \xi(x) & \xi(y) & \xi(v) \\ \xi'(x) & \xi'(y) & \xi'(v) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

ТЕОРЕМА 1. *Имеет место формула сложения*

$$\Psi(x+y) = \frac{\Psi(x)\Psi'(y) - \Psi'(x)\Psi(y)}{\wp(x) - \wp(y)} \frac{2\mathcal{D}(\wp; x, y, v)^{(1-\alpha)/2} \mathcal{D}(\wp; x, y, -v)^{(1+\alpha)/2}}{(1-\alpha)\mathcal{D}(\wp; x, y, v) + (1+\alpha)\mathcal{D}(\wp; x, y, -v)}. \quad (4)$$

Формула сложения (4) при $\alpha = \pm 1$ или $\wp'(v) = 0$ переходит в формулу сложения, характеризующую эллиптическую функцию Бейкера–Ахиезера (см. [2]).

Пусть $\mathcal{Z} = \mathbb{Z}[a_1, a_2, a_3, a_4, a_6]$, где $a_1 = \mu_1/2$, $a_2 = \wp(v)$, $a_3 = \alpha\wp'(v)$, $a_4 = g_2/2$ и $a_6 = g_3$.

ТЕОРЕМА 2 (ср. [3]). *Положим $1/\Psi(x) = x + \sum \Psi_k x^{k+1}/(k+1)!$ в окрестности точки $x = 0$. Тогда $\Psi_k \in \mathcal{Z}$, т. е. $1/\Psi(x)$ является рядом Гурвица над кольцом $\mathcal{Z}$.*

ЛЕММА 1. *Для данных α, w, λ и $\xi(x) = 1/x^2 + (x^2)$ общее решение уравнения*

$$f''(x) - 2\left(\xi(x) - \frac{1-\alpha^2}{8} \frac{\xi'(w)^2}{(\xi(x) - \xi(w))^2}\right)f(x) = \lambda f(x) \quad (5)$$

в окрестности $x = 0$ имеет вид $f(x) = f_0/x + f_2x + f_3x^2 + f_4x^3 + \dots$ и однозначно определяется параметрами f_0, f_2 и f_3 с соотношением $\lambda f_0 = -2f_2$.

Следующий результат, характеризующий функцию (1), был получен совместно с В. М. Бухштабером.

ТЕОРЕМА 3. Пусть функция $\psi(x) = 1/x + (\text{регулярная часть})$ такова, что

$$\psi(x+y) = \frac{\psi(x)\psi'(y) - \psi'(x)\psi(y)}{\xi(x) - \xi(y)} \frac{2\mathcal{D}(\xi; x, y, w)^{(1-\alpha)/2} \mathcal{D}(\xi; x, y, -w)^{(1+\alpha)/2}}{(1-\alpha)\mathcal{D}(\xi; x, y, w) + (1+\alpha)\mathcal{D}(\xi; x, y, -w)}, \quad (6)$$

где $\xi(x)$ – четная функция. Тогда $\xi(x) = \wp(x)$ и $\psi(x) = \Psi(x; w, \alpha)$, если $\alpha \neq \pm 1$ и $\wp'(w) \neq 0$, и $\psi(x) = \Phi(x; v)$ для свободного параметра v , если $\alpha = \pm 1$ или $\wp'(w) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя уравнение (6) и его симметрию $T: (\psi(x), \xi(x)) \rightarrow (c_0 e^{\gamma x} \psi(x), c_0 \xi(x) + c_2)$, можно считать далее, что $\psi(x) = 1/x + \psi_2 x + \psi_3 x^2 + \dots$ и $\xi(x) = 1/x^2 + \xi_4 x^2 + \dots$.

ЛЕММА 2. Пусть

$$L_2 = \partial^2 - 2 \left(\xi(x) - \frac{(1-\alpha^2)\xi'(w)^2}{8(\xi(x) - \xi(w))^2} \right), \quad (7)$$

$$L_3 = 2\partial^3 - 6 \left(\xi(x) - \frac{(1-\alpha^2)\xi'(w)^2}{8(\xi(x) - \xi(w))^2} \right) \partial - 3\xi'(x) - \frac{(1-\alpha^2)\xi'(w)^2(9\xi'(x) + \alpha\xi'(w))}{8(\xi(x) - \xi(w))^3}, \quad (8)$$

где $\partial = \partial/\partial x$. Тогда если $\psi(x)$ и $\xi(x)$ связаны уравнением (6), то

$$L_2 \psi(x) = \lambda \psi(x), \quad L_3 \psi(x) = \mu \psi(x). \quad (9)$$

Из леммы 2 сразу получаем, что $\lambda = -2\psi_2$ и $\mu = -6\psi_3$.

Заметим, что при $\alpha = \pm 1$ или $\xi'(w) = 0$ операторы L_2 и L_3 образуют стационарную пару Лакса $\mathcal{L} = L_2 = \partial^2 - 2\xi(x)$, $\mathcal{A} = L_3 = 2\partial^3 - 6\xi(x)\partial - 3\xi'(x)$, т.е. $[\mathcal{L}, \mathcal{A}] = 0$. Следовательно, $\xi(x) = \wp(x)$, $\mu^2 = 4\lambda^3 - g_2\lambda - g_3$ и $\psi(x) = \Phi(x; v)$ для свободного параметра v .

Положим $A = \frac{(1-\alpha^2)\xi'(w)^2}{8(\xi(x) - \xi(w))^3}$, $B = \frac{\xi(x) - \lambda}{\xi(x) - \xi(w)}$ и рассмотрим оставшийся случай $\alpha \neq \pm 1$, $\xi'(w) \neq 0$, т.е. $A \neq 0$. Условие совместности системы (9) дает

$$C\xi'(x)^2 + D\xi'(x) + E = F\xi''(x), \quad (10)$$

где $C = 1 + (4 - 6B)A + A^2$, $D = -6A(\alpha\xi'(w)B + \mu)$, $F = 2(B - A)(1 - A)(\xi(x) - \xi(w))$ и

$$E = \left(8 \left(\xi(x) + \frac{1}{2} \lambda \right) (\xi(x) - \xi(w))^2 - (1 - \alpha^2)\xi'(w)^2 \right) (B - A)^2 - (\mu + \alpha\xi'(w)A)^2.$$

Так как функция $\xi(x)$ четна, то $D = 0$ и поэтому $B = 1$. Таким образом, $\lambda = \xi(w)$ и $\mu = -\alpha\xi'(w)$. Используя этот результат и тот факт, что $A \neq 1$, получаем, что уравнение (10) переходит в уравнение $\xi'(x)^2 - 4\xi(x)^3 + 4\xi(w)^3 - \xi'(w)^2 = (2\xi''(x) - 12\xi(x)^2) \times (\xi(x) - \xi(w))$, которое равносильно уравнению $\xi'(x)^2 = 4\xi(x)^3 - g_2\xi(x) - g_3$ для некоторых g_2, g_3 . Поскольку $\xi(x) = 1/x^2 + \xi_4 x^2 + \dots$, то $\xi(x) = \wp(x)$, $\psi_2 = -\wp(w)/2$ и $\psi_3 = \alpha\wp'(w)/6$. Из теоремы 1 и леммы 1 получаем $\psi(x) = \Psi(x; w, \alpha)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Операторы L_2 и L_3 при $\alpha \neq \pm 1$ и $\xi'(w) \neq 0$ зависят от λ и μ , и поэтому не коммутируют.

Автор благодарит О. И. Мохова за полезное обсуждение результатов работы.

Список литературы

- [1] В. М. Бухштабер, УМН, **65:5** (2010), 187–188. [2] H. W. Braden, V. M. Buchstaber, SIAM J. Math. Anal., **28:4** (1997), 903–923. [3] V. M. Buchstaber, E. Yu. Bunkova, Elliptic formal group laws, integral Hirzebruch genera and Krichever genera, arXiv: 1010.0944.

Е. Ю. Бунькова (E. Yu. Bun'kova)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: bunkova@mi.ras.ru

Представлено В. М. Бухштабером
Принято редколлегией
19.11.2010