Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Г. Кружилин, Обобщение теоремы Кернера о собственных отображениях, *УМН*, 2010, том 65, выпуск 6, 187–188

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9399>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 11:23:31

Обобщение теоремы Кернера о собственных отображениях

Н. Г. Кружилин

Голоморфное отображение

$$f: D_1 \rightarrow D_2$$

между комплексными многообразиями называется собственным, если для всякого компактного подмножества $K \subset D_2$ его полный прообраз $f^{-1}(K)$ является компактным подмножеством D_1 . Мы будем рассматривать случай многообразий одинаковой размерности. В этом случае, согласно известной теореме Реммерта, f является конечным разветвленным накрытием: существует такое аналитическое подмножество $S \subset D_2$, вне которого отображение

$$f: D_1 \setminus f^{-1}(S) \rightarrow D_2 \setminus S$$

представляет собой конечное накрытие.

Вскоре после публикации результата Реммерта Г. Кернер [1] установил следующую теорему о продолжении для собственных отображений.

ТЕОРЕМА 1. Пусть D_1 и D_2 – римановы области над многообразиями Штейна одинаковой размерности $n \geq 2$, а $\hat{D}_1$ и $\hat{D}_2$ – их оболочки голоморфности. Тогда всякое собственное голоморфное отображение

$$f: D_1 \rightarrow D_2$$

продолжается до собственного голоморфного отображения

$$\hat{f}: \hat{D}_1 \rightarrow \hat{D}_2.$$

В настоящей заметке доказывается результат, обобщающий теорему Кернера.

ТЕОРЕМА 2. Пусть D_1 – подобласть многообразия Штейна, $\hat{D}_1$ – ее оболочка голоморфности, а D_2 – комплексное многообразие той же размерности $n \geq 2$. Пусть определено собственное голоморфное отображение

$$f: D_1 \rightarrow D_2.$$

Тогда существуют пространство Штейна

$$\hat{D}_2 \supset D_2,$$

являющееся оболочкой голоморфности D_2 , и собственное голоморфное отображение

$$\hat{f}: \hat{D}_1 \rightarrow \hat{D}_2,$$

продолжающее f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть k – кратность отображения f . В декартовом произведении $D_1 \times D_1$ рассмотрим аналитическое подмножество

$$S = \{(x, y) \mid f(x) = f(y)\}.$$

Точке из первой компоненты произведения поставим в соответствие лежащие над ней точки S . В силу собственности f мы получаем k -значное голоморфное соответствие. Считая образ отображения $D \subset \hat{D}_1$ вложенным в комплексное линейное

пространство и рассматривая симметрические функции от координат компонент этого соответствия, мы стандартным образом продолжаем его на $\hat{D}_1$ до голоморфного соответствия F , образ которого будет лежать в $\hat{D}_1$. График Γ соответствия F является аналитическим подмножеством $\hat{D}_1 \times \hat{D}_1$. Очевидно, что Γ содержит диагональ в $\hat{D}_1 \times \hat{D}_1$.

Теперь в $D_1 \times D_1 \times D_1$ рассмотрим аналитическое подмножество $\Lambda = \{(x, y, z) : y \in F(x), z \in F(y)\}$. Это график k^2 -значного голоморфного соответствия, продолжающегося до голоморфного соответствия $L: \hat{D}_1 \rightarrow \hat{D}_1 \times \hat{D}_1$, из которого F получается проекцией на первый сомножитель образа. Заметим, что, в силу определения Λ , над $\hat{D}_1$ это множество инвариантно относительно действия симметрической группы S_3 , а значит, оно и вообще S_3 -инвариантно.

Для $x_1, x_2 \in \hat{D}_1$ будем писать $x_1 \simeq x_2$, если пара (x_1, x_2) лежит на Γ . В силу отмеченной выше S_3 -инвариантности это отношение симметрично и транзитивно, а значит, мы получили отношение эквивалентности на $\hat{D}_1$.

Обозначив через ∞ несобственный элемент при одноточечной компактификации $\hat{D}_1$, нетрудно видеть, что $F(z) \rightarrow \infty$ при $\hat{D}_1 \ni z \rightarrow \infty$. Действительно, если для некоторой последовательности z_k существуют точки $y_k \in F(z_k)$ такие, что $y_k \rightarrow \infty$, то мы можем считать, что $y_k \rightarrow y_0 \in \hat{D}_1$. Соответственно, $z_k \in F(y_k)$, но $\lim z_k \notin \hat{D}_1$, хотя $y_k \rightarrow y_0 \in \hat{D}_1$, что противоречит определению F как голоморфного соответствия $\hat{D}_1 \rightarrow \hat{D}_1$.

Таким образом, $\simeq$ является собственным аналитическим отношением эквивалентности и мы можем определить фактор $\hat{D}_1/\simeq$. Снова рассматривая вложение $\hat{D}_1$ в комплексное линейное пространство, мы видим, что симметрические функции от координат прообразов точек из $\hat{D}_1/\simeq$ корректно определены на факторпространстве и разделяют точки на нем. По теореме А. Картана [2], $\hat{D}_1/\simeq$ оказывается комплексным аналитическим пространством. Нетрудно видеть, что оно является пространством Штейна. Соответствующая проекция – собственное отображение, которое естественно считать продолжением отображения f .

Заметим, что (в силу симметрии отношения $\simeq$) $F(\hat{D}_1 \setminus D_1)$ лежит в $\hat{D}_1 \setminus D_1$. Таким образом, D_2 вложено в пространство Штейна $\hat{D}_1/\simeq$. Всякая голоморфная функция g на D_2 поднимается до голоморфной функции на D_1 и, следовательно, продолжается до голоморфной функции на $\hat{D}_1$, причем в силу аналитичности $\simeq$ ее значения в эквивалентных точках совпадают, так что g продолжается до голоморфной функции на $\hat{D}_1/\simeq$. Таким образом, $\hat{D}_1/\simeq$ является оболочкой голоморфности $\hat{D}_2$, что и завершает доказательство.

Список литературы

- [1] Н. Kerner, *Arch. Math.*, **11** (1960), 44–49. [2] А. Картан, *Комплексные пространства*, сб. перев., Мир, М., 1965; пер. с англ.: Н. Cartan, *Contributions to function theory*, Internat. Colloq. Function Theory (Bombay, 1960), Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1960, 1–15.

Н. Г. Кружилин (N. G. Kruzhilin)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: kruzhil@mi.ras.ru

Представлено С. Ю. Немировским
Принято редколлегией
23.11.2010