Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Бухштабер, Отображения Янга–Бакстера, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 6, 241–242

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm94>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 18:05:10

ОТОБРАЖЕНИЯ ЯНГА–БАКСТЕРА

В. М. БУХШТАБЕР

Пусть X – топологическое пространство. Обозначим через T отображение пространства $X \times X$ в себя, переставляющее координаты (т.е. $T(x, y) = (y, x)$). Говорят (см. [1], [2]), что отображение $R: X \times X \rightarrow X \times X$ удовлетворяет квантовому уравнению Янга–Бакстера, если

$$(1) \quad R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}: X \times X \times X \longrightarrow X \times X \times X,$$

где $R_{12} = R \times \text{id}$, $R_{23} = \text{id} \times R$ и $R_{13} = T_{12}R_{23}T_{12}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Отображение $F: X \times X \rightarrow X \times X$ назовем *отображением Янга–Бакстера*, если оно удовлетворяет соотношению

$$(2) \quad F_{12}F_{23}F_{12} = F_{23}F_{12}F_{23}: X \times X \times X \longrightarrow X \times X \times X,$$

Отображение перестановки T является отображением Янга–Бакстера и если F – некоторое отображение Янга–Бакстера, то и TF также является отображением Янга–Бакстера. Соотношения (1) и (2) эквивалентны в том смысле, что отображение R удовлетворяет (1) тогда и только тогда, когда отображение $F = TR$ удовлетворяет соотношению (2). Пусть F – некоторое отображение Янга–Бакстера. Положим $F(x, y) = (x \vee y, x \wedge y)$, т.е. будем считать, что F задает две бинарные операции $\wedge$ и $\vee$ на X . Тогда соотношение (2) можно переписать в виде следующих “уравнений ассоциативности”:

$$(3) \quad x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee ((x \wedge y) \vee z),$$

$$(4) \quad (x \vee y) \wedge ((x \wedge y) \vee z) = (x \wedge (y \vee z)) \vee (y \wedge z),$$

$$(5) \quad (x \wedge (y \vee z)) \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z.$$

Непосредственно из уравнения (3) следует

ЛЕММА 1. Если операция $\vee$ задает на X групповую структуру, то $x \wedge y = e$ для любых x и y из X , где e – единица умножения $\vee$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Отображение Янга–Бакстера F называется *невыврожденным*, если оно является гомеоморфизмом.

Если F – невырожденное отображение Янга–Бакстера, то обратное отображение F^{-1} также является отображением Янга–Бакстера. Таким образом, согласно (2), каждое невырожденное отображение Янга–Бакстера задает представление группы кос B_3 с образующими s_1 и s_2 :

$$B_3 \longrightarrow \text{Нотео}(X \times X \times X): s_1 \rightarrow F_{12}, s_2 \rightarrow F_{23}.$$

Приведем важные примеры *вырожденных* отображений Янга–Бакстера.

- 1) Диагонали: $\Delta_1(x, y) = (x, x)$ и $\Delta_2(x, y) = (y, y)$. Заметим, что $\Delta_2 = T\Delta_1T = \Delta_1T$.
- 2) Умножения в моноиде X с единицей e : $\mu_1(x, y) = (xy, e)$, $\mu_2(x, y) = (e, xy)$. Заметим, что $\mu_2 = T\mu_1T$.

Первые примеры *невыврожденных* отображений Янга–Бакстера:

- 1) Для каждой группы X формула $F(x, y) = (xyx^{-1}, x)$ задает *невыврожденное* отображение Янга–Бакстера (см. [1, пример 2]).
- 2) Отображения f и g пространства X в себя задают отображение Янга–Бакстера F по формуле $F(x, y) = (f(y), g(x))$ тогда и только тогда, когда они коммутируют, т.е. $f(g(x)) = g(f(x))$ для всех $x \in X$ (см. [1, пример 1]).

Важный класс невырожденных отображений Янга–Бакстера построен в [2].

Рассмотрим теперь более подробно случай, когда X является евклидовым пространством $\mathbb{R}^n$, а F – линейное отображение $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ в себя. Без ограничения общности можно фиксировать базис в $\mathbb{R}^n$ и задать F в виде (2×2) -блочной матрицы $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, блоки которой являются $(n \times n)$ -матрицами. Обозначим через $M(n)$ алгебру всех таких матриц. Эти матрицы будем записывать в виде $(A, D; B, C)$. Обозначим через $YB(n)$ подмножество матриц в $M(n)$, задающих отображение Янга–Бакстера.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-01404) и гранта INTAS-96-770.

ЛЕММА 2. Матрица $(A, D; B, C)$ принадлежит $YB(n)$ тогда и только тогда, когда выполняются соотношения

$$\begin{aligned} (6) \quad & A^2 = A - BAC; \quad D^2 = D - CDB; \\ (7) \quad & [B, A] = BAD; \quad [C, D] = CDA; \\ (8) \quad & [A, C] = DAC; \quad [D, B] = ADB; \\ (9) \quad & [B, C] = DAD - ADA, \end{aligned}$$

где $[\cdot, \cdot]$ – обычный коммутатор матриц.

Следствием соотношений (6)–(9) являются соотношения:

$$\begin{aligned} (10) \quad & [A + D - AD, B] = 0; \quad [A + D - DA, C] = 0; \\ (11) \quad & [B - DBA, C] = [DA, A + D]; \quad [C - ACD, B] = [AD, A + D]. \end{aligned}$$

Заметим, что соотношения (6)–(9) являются линейными по B, C и квадратичными по A, D . Они согласованы с градуировкой: $\deg A = \deg D = 0$, $\deg B = 2$, $\deg C = -2$.

Действие группы $GL(n, \mathbb{R})$ на $\mathbb{R}^n$ индуцирует на $YB(n)$ действие

$$(A, D; B, C) \longrightarrow (LAL^{-1}, LDL^{-1}; LBL^{-1}, LCL^{-1}), \quad L \in GL(n, \mathbb{R}).$$

Более того, имеет место следующая лемма:

ЛЕММА 3. Множество $YB(n)$ замкнуто относительно следующих преобразований:

- 1) $T(A, D; B, C) = (D, A; C, B)$;
- 2) $t(A, D; B, C) = (A', D'; C', B')$, где $'$ – символ транспонирования;
- 3) $L(A, D; B, C) = (A, D; BL, L^{-1}C)$ для любой обратимой $(n \times n)$ -матрицы L , коммутирующей с A, D и CB .

ПРИМЕР. Множество $YB(1)$ состоит из (2×2) -матриц вида $(1, 1; 0, 0)$, $(1 - bc, 0; b, c)$, $(0, 1 - bc; b, c)$ для любых b и c . В частности, при $b = 1$ и $c = 1 - t$ мы получаем известное представление Бюрау. В случае, когда b и c – целые числа, приведение по модулю n дает важные примеры отображений Янга–Бакстера на множестве из n точек.

Тождественное отображение $E: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ задает шесть выделенных отображений Янга–Бакстера:

- $(E, E; 0, 0)$ и $(0, 0; E, E)$ – тождественное отображение I и перестановка T ;
- $(E, 0; E, 0)$ и $(0, E; 0, E)$ – сложения μ_1 и μ_2 ;
- $(E, 0; 0, E)$ и $(0, E; E, 0)$ – диагонали Δ_1 и Δ_2 .

Обратим внимание, что сложения переходят в диагонали при описанном в лемме 3 преобразовании транспонирования t . Семейство отображений Янга–Бакстера, задаваемых матрицами $((1 - \alpha\beta)E, 0; \alpha E, \beta E)$ соединяет перестановку T ($\alpha = \beta = 1$) со сложением μ_1 ($\alpha = 1, \beta = 0$) и диагональю Δ_1 ($\alpha = 0, \beta = 1$). Аналогично, семейство $(0, (1 - \alpha\beta)E; \beta E, \alpha E)$ соединяет T с μ_2 и Δ_2 .

ТЕОРЕМА 1. Пусть $(A, D; B, C) \in YB(n)$. Тогда в алгебре $M(n)$ имеет место соотношение: $(A, D; B, C)(A, D; DB, AC) = (A, D; DB, AC)$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $F = (A, D; B, C) \in YB(n)$. Тогда если $(A, D; B, C) \neq (E, E; 0, 0)$, то детерминант матрицы $(A, D; DB, AC)$ равен нулю. Таким образом, тождественное отображение $I \in YB(n)$ является изолированной точкой в топологии, индуцированной вложением $YB(n) \subset M(n)$. Пусть $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid F(x, y) = (x, y)\}$ – подпространство неподвижных точек. Тогда $\dim V \geq \max(\text{rank } A, \text{rank } D)$.

Автор выражает благодарность И. А. Дынникову за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Drinfeld V. G. Quantum groups (Leningrad, 1990) // Lect. Notes in Math. 1992. V. 1510. P. 1–8. [2] Weinstein A., Xu P. // Commun. Math. Phys. 1992. V. 148. P. 309–343.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: buchstab@mech.math.msu.su

Принято редколлегией
17.11.1998