Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Шамолин, Определение относительной грубости и двупараметрическое семейство фазовых портретов в динамике твердого тела, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 1, 175–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm940>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 14:50:27

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ГРУБОСТИ И ДВУПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ СЕМЕЙСТВО ФАЗОВЫХ ПОРТРЕТОВ В ДИНАМИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

М. В. ШАМОЛИН

1. Определение относительной грубости. Классическое определение грубости [1], а также определение, данное в работе [2], оперируют с двумя объектами, а именно, с классами динамических систем и с пространством деформаций систем со своей топологией. В основе же понятия грубости лежит понятие топологической эквивалентности. Определение, данное Андроновым и Понтрягиным [1], наряду с близостью в некоторой топологии рассматриваемой системы и ее деформации, требует близость к тождественному гомеоморфизму, через который осуществляется топологическая эквивалентность. Определение же, данное Пейксоу [2], не требует указанной близости. Согласно данным определениям в [1], [2], [3] изучались маломерные грубые системы, а в [4] – теория систем Аносова.

В силу классических определений структурной устойчивости, в [5], [6] обсуждаются критерии последней как для линейных неавтономных систем, так и для классов нелинейных систем. Признаки структурной устойчивости для маломерных систем формулируются в качестве гипотез Смейла на большие размерности [7].

Несколько появившихся видоизмененных определений грубости [8] имеют одно сходство: деформация рассматриваемых динамических систем на некотором многообразии M^n берется во всем пространстве гладких векторных полей $\chi(C^r)$ в C^r -топологии (обычно $r = 1$).

Рассмотрим векторные поля, деформируемые не над всем классом полей, а лишь над некоторым подклассом $\chi(\mathcal{B})$, определенным с помощью класса функций $\mathcal{B} \subset C^r$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Векторное поле v называется относительно структурно устойчивым (относительно грубым), если для любой окрестности Γ гомеоморфизма 1_{M^n} в пространстве всех гомеоморфизмов с C^0 -топологией имеется такая окрестность $\mathcal{U} \subset \chi(\mathcal{B})$ рассматриваемого векторного поля v , что последнее эквивалентно любому векторному полю из $\mathcal{U} \subset \chi(\mathcal{B})$ посредством некоторого гомеоморфизма из Γ .

Заметим, что близость векторных полей понимается в C^1 -топологии, а близость гомеоморфизма – в C^0 -топологии. При этом речь идет не о сопряжении, а об эквивалентности.

Заметим также, что пока в вышеприведенном определении важны: 1) достаточная малость гомеоморфизма, осуществляющего эквивалентность; 2) C^1 -топология в пространстве векторных полей.

2. Относительная негрубость различных степеней. Подобно тому, как дается определение первой степени негрубости, можно определить поля первой степени относительной негрубости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Векторное поле v называется векторным полем первой степени относительной негрубости, если оно не является относительно грубым векторным полем и если для любой окрестности Γ гомеоморфизма 1_{M^n} в пространстве всех гомеоморфизмов с C^0 -топологией имеется такая окрестность $\mathcal{U} \subset \chi(\mathcal{B})$ векторного поля v , что поле v топологически эквивалентно любому полю из $\mathcal{U} \subset \chi(\mathcal{B})$, не являющемуся относительно грубым, посредством некоторого гомеоморфизма из Γ .

Близость векторных полей здесь понимается в C^3 -топологии.

Аналогичным образом, с использованием C^{2n+1} -топологии, определяются поля n -й степени относительной негрубости.

3. Динамика твердого тела, взаимодействующего со средой. В динамической системе, возникающей в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой [9], [10], выделяется независимая подсистема второго порядка:

$$\begin{aligned} (1) \quad \alpha' &= \omega + \frac{\sigma}{I} \mathcal{F}(\alpha) \cos \alpha + \sigma \omega^2 \sin \alpha + \frac{s(\alpha)}{m} \sin \alpha, \\ \omega' &= -\frac{1}{I} \mathcal{F}(\alpha) - \omega \Psi(\alpha, \omega), \\ (2) \quad v' &= v \Psi(\alpha, \omega), \end{aligned}$$

где $\Psi(\alpha, \omega) = -\sigma\omega^2 \cos \alpha + \frac{\alpha}{I} \mathcal{F}(\alpha) \sin \alpha - \frac{s(\alpha)}{m} \cos \alpha$. Здесь σ, m, I – физические постоянные.

Фазовые траектории системы (1)–(2) в пространстве $S^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times \mathbb{R}^1\{\omega\} \times \mathbb{R}_+^1\{v\}$ лежат на поверхностях, являющихся, вообще говоря, двумерными цилиндрами. Таким образом, строение фазовой плоскости $\mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$ системы (1) полностью определяет расслоение фазового пространства. Из относительной грубости системы (1), будет следовать относительная грубость системы (1)–(2).

В систему (1)–(2) наряду с физическими параметрами входит бесконечное число параметров, поскольку в ней имеются функции $\mathcal{F}$ и s . Информация о последних носит качественный характер, поскольку используется экспериментальная информация.

Следуя определению 1, можно выделить класс функций $\mathcal{B}$ [9], [10], с помощью которого определяется пространство векторных полей $\chi(\mathcal{B})$ системы (1).

Заметим, что топология в только что определенном пространстве $\chi(\mathcal{B})$ векторных полей системы (1) индуцируется из пространства $\chi(C^0)$, несмотря на замечание 2) к определению 1.

В [9], [10] указано на наличие семейства фазовых портретов системы (1), в которой имеются два безмерных параметра (μ_1 и μ_2); в пространстве последних $J^2 = \{(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2 : \mu_1 > 0, 0 < \mu_2 < 2\}$, рассмотрим подобласть (при $\alpha = 0$ доопределим по непрерывности)

$$\left\{ (\mu_1, \mu_2) \in J^2 : \forall \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) : \frac{s(\alpha)}{m \cos \alpha} > \frac{\sigma \mathcal{F}(\alpha)}{I \sin \alpha} \right\}.$$

ТЕОРЕМА. *Пространство $\chi(\mathcal{B})$, отвечающее системе вида (1), разбивается на счетное непересекающееся объединение*

$$\chi(\mathcal{B}) = \chi(\mathcal{B}_1) \amalg \chi(\mathcal{C}_1) \amalg \chi(\mathcal{B}_2) \amalg \chi(\mathcal{C}_2) \amalg \dots,$$

обладающее следующими свойствами:

- а) система вида (1) (абсолютно) груба в пространствах $\chi(\mathcal{B}_i)$ для любого $i \in \mathbb{N}$,
- б) система (1) является системой первой степени относительной негрубости относительно пространств $\chi(\mathcal{C}_i)$ для любого $i \in \mathbb{N}$,
- в) множества $\chi(\mathcal{C}_i)$ имеют меру нуль в пространстве $\chi(\mathcal{B})$,
- г) множества $\chi(\mathcal{B}_i)$ имеют конечную меру в пространстве $\chi(\mathcal{B})$.

Более того, гомеоморфизм, осуществляющий эквивалентность систем, взятых из пространства $\chi(\mathcal{B}_1)$, может и не быть достаточно близок к тождественному.

Таким образом, имеем двухпараметрическое семейство фазовых портретов, в котором при переходе от одного топологического типа портрета к другому мы вынуждены иметь дело с вырожденными перестройками. Причем рассматриваемые подмножества в пространстве J^2 , с помощью которых определяются подклассы полей $\chi(\mathcal{B}_i)$, $\chi(\mathcal{C}_i)$ накапливаются возле точки $(0, 0) \in J^2\{\mu_1, \mu_2\}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Андронов А. А., Понтрягин Л. С. // ДАН СССР. 1937. Т. 14. № 5. С. 247–250.
- [2] Peixoto M. // Ann. Math. 1959. V. 69. № 2. P. 199–222. [3] Peixoto M. // Topology. 1962. V. 1. № 2. P. 101–120. [4] Аносов Д. В. // Труды МИАН. 1967. Т. 90. [5] Плисс В. А. Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1967. [6] Плисс В. А. // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. № 10. С. 1891–1892. [7] Смейл С. // УМН. 1970. Т. 25. № 1. С. 113–185. [8] Нитецки З. Введение в дифференциальную динамику. М.: Мир, 1975. [9] Шамолин М. В. Качественный анализ модельной задачи о движении тела в среде со струйным обтеканием. Дис. ... канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ, 1991. [10] Шамолин М. В. // ДАН. 1994. Т. 337. № 5. С. 588–591.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
01.11.1995