Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Аптекарев, Д. Н. Туляков, Асимптотические режимы в зоне насыщения для С-D-ядер ансамбля ортогональных многочленов Мейкснера, *УМН*, 2011, том 66, выпуск 1, 181–182

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9409>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 14:11:27

Асимптотические режимы в зоне насыщения для C-D-ядер ансамбля ортогональных многочленов Мейкснера

А. И. Аптекарев, Д. Н. Туляков

1. Пусть $\mathcal{X}$ – дискретное счетное подмножество $\mathbb{R}$, $W > 0$ – весовая функция на $\mathcal{X}$. По определению (см. [1]), n -точечным ансамблем ортогональных многочленов (ОМ) относительно веса W называют случайные конфигурации $\{\vec{x} := (x_1, \dots, x_n) : x_1 > \dots > x_n, x_1, \dots, x_n \in \mathcal{X}\}$ с вероятностями $\text{Prob}[(x_1, \dots, x_n)] = Z_n^{-1} \Pi(\vec{x})$, где

$$\Pi(\vec{x}) := \prod_{i=1}^n W(x_i) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2, \quad Z_n := \sum_{\vec{x}: x_1 > \dots > x_n} \Pi(\vec{x}). \quad (1)$$

Это название вызвано следующим обстоятельством. Если рассмотреть последовательность многочленов $\{Q_k\}$, являющихся ортогонализацией в $l^2(\mathcal{X}, W)$ последовательности $\{\tilde{x}^k\}$, и определить ядра Кристоффеля–Дарбу (C-D) с весом W

$$K_n(\tilde{x}, \tilde{y}) := \sqrt{W(\tilde{x})W(\tilde{y})} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{Q_i(\tilde{x})Q_i(\tilde{y})}{\|Q_i\|^2}, \quad (2)$$

то, как известно (см., например, [2]), вероятность того, что случайная конфигурация $(x_1, \dots, x_n)$ содержит заданную $(y_1, \dots, y_k)$, равна

$$\text{Prob}[(y_1, \dots, y_k)] = \det[K_n(y_i, y_j)]_{i,j=1}^k.$$

В настоящей заметке мы рассматриваем n -точечные ансамбли многочленов Мейкснера, ортогональных относительно дискретного веса:

$$W_{\beta, \sigma}(\tilde{x}) := \frac{\Gamma(\beta + \tilde{x})}{\tilde{x}!} \sigma^{\tilde{x}}, \quad \tilde{x} \in \mathbb{Z}_+, \quad \beta > 0, \quad 0 < \sigma < 1. \quad (3)$$

Наша цель – асимптотика (при $n \rightarrow \infty$) C-D-ядер (2) для ансамбля Мейкснера (1), (3) при различных соотношениях между ростом n и $\tilde{x}$.

2. Для упрощения последующих формул введем новые параметры и сделаем в определении веса Мейкснера (3) замену переменной $c := \sigma^{-1}$, $b := \beta - 1$, $x := \tilde{x}(c-1) - \beta$. В новых обозначениях многочлены Мейкснера $\{Q_n(x)\}$ ортогональны по дискретной мере $\mu(x) := \sum_{x_0 \in (c-1)\mathbb{Z}_+ - \beta} \rho(x) \delta(x - x_0)$, с весом

$$\rho(x) := \frac{c^{-(b+1)/(c-1)}}{c-1} \frac{((x+cb+1)/(c-1))!}{((x+b+1)/(c-1))!} c^{-x/(c-1)}, \quad x \in \mathbb{R}_+. \quad (4)$$

В работе [3] разработана общая методика построения асимптотических разложений для базисов решений рекуррентных соотношений в перекрывающихся областях плоскости (n, x) и их согласования в переходных зонах. Мы применяем асимптотики многочленов Мейкснера, полученные в [3], для описания (в различных зонах плоскости (n, x)) предельных режимов C-D-ядер (2). По формуле Кристоффеля–Дарбу

$$K_n(x, y) = \frac{\tilde{q}_n(x)\tilde{q}_{n-1}(y) - \tilde{q}_n(y)\tilde{q}_{n-1}(x)}{\|Q_{n-1}\|^2(x-y)}, \quad \tilde{q}_n(x) := \sqrt{\rho(x)} Q_n(x), \quad (5)$$

где $\|Q_n\|^2 = n!(n+b)!c^n(c/(c-1))^{b+1}$. Используя непрерывное заполнение веса (4), мы будем рассматривать C-D-ядро (5) в любой точке соответствующей зоны.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 11-01-00245, 09-01-12024), программы “Ведущие научные школы” (грант НШ-8033.2010.1) и программы № 1 ОМН РАН; второй автор также поддержан грантами РФФИ № 09-01-12160, 10-01-00682.

3. Между соседними массами меры ортогональности не может размещаться более одного нуля ОМ. Зоны, в которых каждый интервал между соседними массами занят нулем ОМ, называются зонами насыщения (saturation zone). Для многочленов Мейкснера эта зона характеризуется масштабом

$$x = nt, \quad t \in K \subseteq (0, (\sqrt{c} - 1)^2), \quad n \rightarrow \infty. \quad (6)$$

В зоне насыщения нули ОМ с экспоненциальной скоростью (при $n \rightarrow \infty$) притягиваются к точкам, где сосредоточены массы дискретной меры. В этой зоне уместно рассматривать различные асимптотические режимы для C-D-ядра, а именно режим (6) в окрестности произвольной точки зоны насыщения и режим в окрестности масс

$$X_k = k(c - 1) - b - c, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad (7)$$

с экспоненциальным масштабированием при $t := t_k := X_k/n \in K \subseteq (0, (\sqrt{c} - 1)^2)$:

$$e^{-2\Sigma(n,t)} := \left(\frac{c + 1 - t + \sqrt{D}}{2\sqrt{c}} \right)^{-2n-b+1} \left(\frac{(c-1)^2 - (c+1)t + (c-1)\sqrt{D}}{2t\sqrt{c}} \right)^{2k+b-1}, \quad (8)$$

где $D(t) := (c + 1 - t)^2 - 4c$ и $n \rightarrow \infty$.

ТЕОРЕМА. Для C-D-ядра (5), равномерно по $\xi, \eta \in \tilde{K} \subseteq \mathbb{R}$, справедливо:

1) в режиме (6)

$$K_n(nt + \xi, nt + \eta) = e^{(\xi+\eta)\Psi'(t)} \sin\left(\pi \frac{nt + \xi + b + c}{c - 1}\right) \sin\left(\pi \frac{nt + \eta + b + c}{c - 1}\right) \frac{e^{2n\Psi(t)}}{n} \\ \times (\Phi(t) + O(n^{-1})) + O(e^{|\xi-\eta|\Psi'(t)});$$

2) в смешанном режиме (6) и (8) в окрестности точки массы (7)

$$K_n(X_k + e^{-2\Sigma(n,t)}n\xi, X_k + \eta) = \frac{\sin \frac{\pi\eta}{c-1}}{\eta} e^{\eta\Psi'(t)} (\xi \eta \tilde{\Phi}_1(t) + \tilde{\Phi}_2(t)) + O(n^{-1});$$

3) в режиме (8) в окрестностях разных точек масс (7) при $k - m = O(1)$

$$K_n(X_k + e^{-2\Sigma(n,t_k)}\xi, X_m + e^{-2\Sigma(n,t_m)}\eta) \\ = (-1)^{k-m} \frac{e^{-\Sigma(n,t_k) - \Sigma(n,t_m)}}{k - m} ((\xi - \eta)\tilde{\Psi}(t_k, t_m) + O(n^{-1})).$$

Здесь $\Psi(t) := \operatorname{arccosh} \frac{c + 1 - t}{2\sqrt{c}} - \frac{t}{c - 1} \operatorname{arccosh} \frac{(c - 1)^2 - (c + 1)t}{2t\sqrt{c}}$, а функции Φ , Φ_1 ,

Φ_2 , $\tilde{\Psi}$ от t явным образом выражаются через параметры веса Мейкснера c и β и не зависят от n и ξ , η .

Список литературы

- [1] A. Borodin, G. Olshanskii, *Mosc. Math. J.*, **6:4** (2006), 629–655. [2] P. Deift, *Orthogonal polynomials and random matrices: a Riemann–Hilbert approach*, New York Univ., Courant Institute of Mathematical Sciences, New York; Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, ISBN: 0-9658703-2-4; 0-8218-2695-6, viii+273 pp. [3] Д. Н. Туляков, *Матем. сб.*, **201:9** (2010), 111–158.

А. И. Аптекарев (A. I. Aptekarev)

Институт прикладной математики

им. М. В. Келдыша РАН

E-mail: aptekaa@keldysh.ru

Представлено А. Г. Сергеевым

Принято редколлегией

02.10.2010

Д. Н. Туляков (D. N. Tulyakov)

Институт прикладной математики

им. М. В. Келдыша РАН

E-mail: dnt@mail.nnov.ru