Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Чельцов, Трехмерные алгебраические многообразия, обладающие дивизором с численно тривиальным каноническим классом, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 1, 177–178

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm941>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 09:13:06

**ТРЕХМЕРНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ,
ОБЛАДАЮЩИЕ ДИВИЗОРОМ С ЧИСЛЕННО
ТРИВИАЛЬНЫМ КАНОНИЧЕСКИМ КЛАССОМ**

И. ЧЕЛЬЦОВ

Все многообразия считаются проективными и определенными над $\mathbb{C}$.

ЛЕММА 1. Пусть $\mathcal{G}$ есть рефлексивный пучок на нормальном многообразии X с обильным дивизором H . Тогда $H^i(\mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_X(-nH)) = 0$ для $i = 0, 1$ и $n \gg 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим точные последовательности

$$(1) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0, \\ 0 \longrightarrow H^0(\mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_X(-nH)) \longrightarrow H^0(\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_X(-nH)) \longrightarrow H^0(\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X(-nH)) \longrightarrow \dots,$$

где $\mathcal{E}$ это локально свободный пучок, а $\mathcal{F}$ это пучок без кручения. Легко видеть, что $H^0(\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_X(-nH)) = H^0(\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X(-nH)) = 0$; $H^1(\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_X(-nH)) = 0$, поскольку X нормально; (1) влечет $H^i(\mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_X(-nH)) = 0$ для $i = 0, 1$.

ЛЕММА 2. Пусть нормальное многообразие X содержит обильный дивизор Картье H и дивизор Вейля D такие, что $\dim\{x \in X \mid D \text{ не дивизор Картье в } x\} = 0$ и $D|_Y \sim 0$ для общего $Y \in |nH|$ при $n \gg 0$. Тогда $D \sim 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим точную последовательность

$$(2) \quad H^0(\mathcal{O}_X(D) \otimes \mathcal{O}_X(-nH)) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_X(D)) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_Y) \longrightarrow H^1(\mathcal{O}_X(D) \otimes \mathcal{O}_X(-nH)).$$

$\mathcal{O}_X(D)$ рефлексивен (см. [2, 1.6]) и $H^i(\mathcal{O}_X(D) \otimes \mathcal{O}_X(-nH)) = 0$ для $i = 0, 1$ и $n \gg 0$ по лемме 1. Из $H^0(\mathcal{O}_Y) = \mathbb{C}$ и (2) получаем $H^0(\mathcal{O}_X(D)) = \mathbb{C}$, откуда $D \sim 0$.

ТЕОРЕМА. Пусть нормальное трехмерное многообразие X содержит обильный эффективный дивизор Картье H с дувалевскими особенностями и $K_H \equiv 0$, тогда $-K_X \sim_{\mathbb{Q}} H$ и либо X есть стягивание сечения $\mathbb{P}(\mathcal{O}_H \oplus \mathcal{O}_H(H|_H))$, либо X имеет канонические особенности и H это поверхность типа КЗ или поверхность Энриквеса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В окрестности H особенности X канонические горенштейновы (см. [3, 7-2-4]) и неканонические особенности X изолированы. Рассмотрим общий элемент $Y \in |nH|$ для $n \gg 0$. Пусть $f: X_{\text{кан}} \rightarrow X$ есть каноническая модификация, $D = 12(K_X + H)$, $\hat{H} = f^{-1}(H)$, $\hat{Y} = f^{-1}(Y)$, $C = Y \cap H$. $12K_H \sim 0$ (см. [1]), следовательно $D|_H \sim 0$, $D|_Y H|_Y = D|_H nH|_H = DC = 0$, но $H|_Y$ обилён на Y . По теореме об индексе $D|_Y D|_Y < 0$ либо $D|_Y \equiv 0$; f есть изоморфизм вдоль $H \cup Y$ и

$$D|_Y D|_Y = f^{-1}(D)|_{\hat{Y}} f^{-1}(D)|_{\hat{Y}} = n f^{-1}(D)|_{\hat{H}} f^{-1}(D)|_{\hat{H}} = n D|_H D|_H = 0.$$

Суммируя, получим $D|_Y \equiv 0$, $D|_C \sim 0$. Рассмотрим точную последовательность

$$(3) \quad 0 \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_Y(D|_Y)) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_C) \longrightarrow H^1(\mathcal{O}_Y((D-H)|_Y)).$$

По критерию обильности Клеймана $(H-D)|_Y$ обилён на Y и по теореме об обращении в нуль (см. [3, 1-2-5]) $H^1(\mathcal{O}_Y((D-H)|_Y)) = 0$. Из $H^0(\mathcal{O}_C) = \mathbb{C}$ и (3) получаем $H^0(\mathcal{O}_Y(D|_Y)) = \mathbb{C}$ и $D|_Y \sim 0$. Из леммы 2 следует, что $D = 12(K_X + H) \sim 0$.

Предположим, что особенности X не канонические, тогда $K_{X_{\text{кан}}} \sim_{\mathbb{Q}} -\hat{H} - B$, где B это эффективный не нулевой $\mathbb{Q}$ -дивизор (см. [4, 2.18]). Существует одномерная грань $R \in \text{NE}(X)$

такая, что $-BR < 0$. Так как $\hat{H}$ численно эффективен, то $K_{X_{\text{кан}}} R < 0$ и R является экстремальным лучом. Пусть $g: X_{\text{кан}} \rightarrow Z$ есть стягивание R , тогда g либо бирационален, либо $\dim(Z) = 1, 2$. Для кривой $C \in R$ выполнено неравенство $K_{X_{\text{кан}}} C < -1$, так как $-BC < 0$, $-\hat{H}C < 0$ и $-\hat{H}C \in \mathbb{Z}$. Отсюда следует, что g не малое стягивание и не стягивание дивизора на кривую (см. [5, 2.3.2]). Если g есть стягивание дивизора E в точку, то E не лежит в слоях f и эффективный 1-цикл $C = \hat{Y} \cap E$ содержится в R , что противоречит $BC = 0$. Если $\dim(Z) = 1$, то для любой кривой l , лежащей в слое $g|_F$, где F это исключительный дивизор для f , выполнено неравенство $K_{X_{\text{кан}}} l < 0$, что противоречит f -обильности $K_{X_{\text{кан}}}$. Значит, $\dim(Z) = 2$. Пусть C это общий слой g , тогда $\hat{H}C + BC = 2$, $\hat{H}C \geq 1$, $BC > 0$. Откуда $\hat{H}C = 1$, $BC = 1$ и $Z \cong \hat{H}$. Из $R^1 g_*(\mathcal{O}_{X_{\text{кан}}}) = 0$ получаем точную последовательность

$$(4) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{O}_Z \longrightarrow g_*(\mathcal{O}_{X_{\text{кан}}}(\hat{H})) \longrightarrow \mathcal{O}_{\hat{H}}(\hat{H}|_{\hat{H}}) \longrightarrow 0.$$

$g_*(\mathcal{O}_{X_{\text{кан}}}(\hat{H}))$ есть локально свободный пучок ранга два, $\alpha: g^* g_*(\mathcal{O}_{X_{\text{кан}}}(\hat{H})) \rightarrow \mathcal{O}_{X_{\text{кан}}}(\hat{H})$ сюръективен и задает изоморфизм $X_{\text{кан}} \cong \mathbb{P}(g_*(\mathcal{O}_{X_{\text{кан}}}(\hat{H})))$, поскольку $\hat{H}$ g -обилён и является сечением g . По теореме об обращении в нуль

$$\text{Ext}^1(g_*(\mathcal{O}_{\hat{H}}(\hat{H}|_{\hat{H}})), \mathcal{O}_Z) = \text{Ext}^1(\mathcal{O}_{\hat{H}}(\hat{H}|_{\hat{H}}), \mathcal{O}_{\hat{H}}) = H^1(\mathcal{O}_{\hat{H}}(-\hat{H}|_{\hat{H}})) = 0.$$

Следовательно, (4) расщепляется и X есть стягивание сечения $\mathbb{P}(\mathcal{O}_H \oplus \mathcal{O}_H(H|_H))$.

Предположим, что особенности X канонические. Нетрудно показать, что в этом случае $H^1(\mathcal{O}_X) = H^2(\mathcal{O}_X(-H)) = 0$. Из точной последовательности

$$H^1(\mathcal{O}_X) \longrightarrow H^1(\mathcal{O}_H) \longrightarrow H^2(\mathcal{O}_X(-H))$$

следует, что $H^1(\mathcal{O}_H) = 0$ и H есть поверхность типа КЗ или поверхность Энрикеса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Beauville A. Surfaces Algebriques Complexes. V. 54. Astérisque. [2] Hartshorne R. // Math. Ann. 1980. V. 254. P. 121–176. [3] Kawamata Y., Matsuda K., Matsuki K. // Adv. Studies in Pure Math. 1987. V. 10. P. 360–383. [4] Kollár J. et al Flips and abundance for algebraic threefolds. Astérisque, 1992. [5] Mori S. // J. AMS. 1988. V. 1. P. 117–253.

Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова

Принято редколлегией
01.11.1995