Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. Бомбьери, А. Гош, Вокруг функции Дэвенпорта–Хейльбронна, *УМН*, 2011, том 66, выпуск 2, 15–66

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9410>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 12:55:00

УДК 511.33

Посвящается памяти А. А. Карацубы

Вокруг функции Дэвенпорта–Хейльбронна

Э. Бомбьери, А. Гош

В статье изучаются аналитические свойства некоторых рядов Дирихле, исследовавшиеся ранее Дэвенпортом, Хейльбронном и Титчмаршем.

Библиография: 28 названий.

Ключевые слова: нули рядов Дирихле, обращение рядов Дирихле, оценки коэффициентов.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Первые результаты	15
2. Распределение нулей	19
3. Коэффициенты ряда $1/f(s)$	25
4. Теорема о среднем	31
5. Ряды типа Дэвенпорта–Хейльбронна	33
6. Вычисление $\sigma(\xi, q)$	40
7. Локализация больших коэффициентов ряда $1/f(s)$	42
8. Альтернативный подход	59
9. Графики: распределение нулей	62
10. Заключительные замечания	64
Список литературы	65

1. Первые результаты

1.1. Ряды с функциональным уравнением. Изучение рядов Дирихле с функциональным уравнением, подобным функциональным уравнениям дзета-функции Римана и L -функций Дирихле, имеет долгую историю. В 1921 г. Гамбургер [1] доказал, что если ряды Дирихле

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \quad (a_1 = 1), \quad g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$$

сходятся для достаточно большого $\sigma = \Re(s)$,¹ $f(s)$ – мероморфная функция конечного порядка с конечным числом полюсов и справедливо функциональное

¹Мы используем обозначения $\Re(z)$ и $\Im(z)$ для вещественной и мнимой части комплексного числа z .

уравнение

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)f(s) = \pi^{-(1-s)/2}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)g(1-s),$$

то $f(s) = g(s) = \zeta(s)$, где $\zeta(s)$ – дзета-функция Римана.

С другой стороны, в общем случае эта теорема единственности неверна. Для положительно определенной квадратичной формы

$$Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

с целыми коэффициентами и фундаментальным дискриминантом $D = b^2 - 4ac$ соответствующая дзета-функция Эпштейна

$$\zeta(s, Q) = \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{1}{Q(m, n)^s}$$

удовлетворяет функциональному уравнению

$$\left(\frac{2\pi}{\sqrt{|D|}}\right)^{-s} \Gamma(s) \zeta(s, Q) = \left(\frac{2\pi}{\sqrt{|D|}}\right)^{-(1-s)} \Gamma(1-s) \zeta(1-s, Q).$$

Таким образом, имеется $\mathbb{C}$ -векторное пространство размерности $h(D)$ (где $h(D)$ – число классов) рядов Дирихле – решений этого функционального уравнения, а именно, пространство, порожденное дзета-функциями Эпштейна, отвечающими приведенным положительно определенным квадратичным формам дискриминанта D .

Классы эквивалентности квадратичных форм Q дискриминанта D находятся во взаимно однозначном соответствии с классами идеалов $\mathfrak{Q}$ квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$. Число представлений целого n квадратичной формой равно произведению ε_D и числа целых идеалов $\mathfrak{a} \in \mathfrak{Q}$ с нормой $N(\mathfrak{a}) = n$ в классе идеалов $\mathfrak{Q}$, отвечающем Q , где ε_D – число корней из единицы в поле $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$. Таким образом,

$$\zeta(s, Q) = \varepsilon_D \sum_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{Q}} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s}.$$

Отсюда следует, что

$$\zeta(s, Q) = \frac{\varepsilon_D}{h(D)} \sum_{\chi} \bar{\chi}(\mathfrak{Q}) L(s, \chi),$$

где χ пробегает все характеры группы классов идеалов поля $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ и

$$L(s, \chi) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})^s} = \prod_{\mathfrak{p}} \left(1 - \frac{\chi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^s}\right)^{-1}.$$

Функции $L(s, \chi)$ удовлетворяют тому же функциональному уравнению. Ожидается, что и для них справедлива гипотеза Римана о том, что все нетривиальные нули таких функций лежат на критической прямой $\Re(s) = 1/2$. Если $\chi = 1$ – тривиальный характер, то $L(s, \chi)$ совпадает с дзета-функцией Дедекинда квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$.

1.2. Нули с большими вещественными частями. В 1935 г. Поттер и Титчмарш [2] доказали, что дзета-функция Эпштейна $\zeta(s, Q)$ имеет бесконечно много нулей на критической прямой $\Re(s) = 1/2$, и упомянули о том, что в случае $Q(m, n) = m^2 + 5n^2$ вычисления указывают на существование у дзета-функции Эпштейна $\zeta(s, Q)$ нуля в критической полосе $0 < \Re(s) < 1$, не лежащего на критической прямой. (Действительно, первый такой нуль приближенно равен $0.932969697 \dots + i15.668249531 \dots$)

Возможно, под влиянием работы Поттера и Титчмарша Дэвенпорт и Хейльбронн [3] приступили в 1936 г. к изучению феномена существования нулей у дзета-функций Эпштейна и дзета-функции Гурвица

$$\zeta(s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^s}$$

в области абсолютной сходимости $\Re(s) > 1$. Существование таких нулей резко контрастирует с соответствующими фактами теории дзета-функции Римана и L -функций Дирихле, где появление подобных нулей невозможно.

Идея Дэвенпорта и Хейльбронна состояла в следующем. Поскольку ряд Дирихле для $\zeta(s, a)$ почти периодичен по Бору в области абсолютной сходимости, множество его значений в любой полосе $1 < \sigma_0 < \Re(s) < \sigma_1$ совпадает с множеством значений рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(n+a)^s}$$

при условии, что величины a_n обладают следующими свойствами:

- (i) $|a_n| = 1$;
- (ii) коэффициенты a_n удовлетворяют тем же мультипликативным соотношениям, что и числа $n + a$.

Например, если a трансцендентно, то числа $n + a$ мультипликативно независимы, и в этом случае на коэффициенты a_n не требуется никаких ограничений, за исключением условия $|a_n| = 1$. Выбирая $a_n = 1$ при $n \leq t$ и $a_n = -1$ при $n > t$, можно заметить, что ряд $\sum a_n n^{-s}$ имеет вещественный нуль ξ с условием $\xi > 1$ (а также что $\xi \rightarrow 1$ при $t \rightarrow \infty$). Теперь из свойства почти периодичности и теоремы Руше несложно заключить, что при любом $\varepsilon > 0$ функция $\zeta(s, a)$ имеет бесконечно много нулей в вертикальной полосе $\xi - \varepsilon < \Re(s) < \xi + \varepsilon$ и что таких нулей с условием $A < \Im(s) < A + T$ будет по меньшей мере $cT + o(T)$, где c – некоторая положительная постоянная и оценка c равномерна по A .

Совершенно иначе приходится действовать в случае рационального $a = l/k$. Прежде всего, величина $k^{-s}\zeta(s, a)$ представляется в виде линейной комбинации L -функций Дирихле $L(s, \chi)$, где χ пробегает характеры Дирихле mod k . Затем $L(s, \chi)$ заменяется выражением

$$M(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \chi(n)}{n^s},$$

где величины a_n удовлетворяют условию $|a_n| = 1$, вполне мультипликативны и в действительности определяются равенством $a_p = 1$, если квадратичный

характер $\left(\frac{p}{k}\right)$ равен 1 или 0, и равенством $a_p = i$, если $\left(\frac{p}{k}\right) = -1$. Тогда основной вклад в соответствующую линейную комбинацию $Z(s)$ рядов Дирихле $M(s, \chi)$ будет давать некоторая величина, вещественная при $s > 1$, поведение которой вблизи $s = 1$ определяется поведением $M(s, \chi)$, где χ – главный характер или квадратичный характер. Асимптотическое поведение $Z(s)$ при $s \rightarrow 1+$ устанавливается без труда, откуда и вытекает, что $Z(s)$ обладает последовательностью нулей с вещественной частью большей 1, накапливающихся вблизи точки 1, так что и в этом случае приходим к тому же заключению, что и выше.

Подобный метод применяется и в случае дзета-функции Эпштейна, когда приходится иметь дело с вещественным нетривиальным характером группы классов, т. е. в случае, когда число классов $h(D)$ четно.

В своей первой статье [3] Дэвенпорт и Хейльбронн оставили без рассмотрения случай, когда число классов больше 1 и нечетно. Однако вопрос этот вскоре был разрешен ими же в их второй работе, посвященной этой тематике [4]. Основные аргументы остались теми же, однако выбор коэффициентов a_p был гораздо более трудным и потребовал достаточно сложного индуктивного построения.

Распространение результатов Дэвенпорта и Хейльбронна на случай $\zeta(s, a)$ с иррациональным алгебраическим числом a оказалось делом не простым, и вопрос этот был окончательно решен Касселсом в работе под названием “Примечание к статье Дэвенпорта и Хейльбронна” [5] (Дэвенпорт считал это заглавие излишне скромным). Рассуждения Касселса являются достаточно тонкими и постоянно опираются на весьма глубокие факты из алгебраической теории чисел.

Можно поставить вопрос о том, будут ли подобные утверждения справедливы для ряда Эйзенштейна

$$E(z, s) = \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{y^s}{|mz + n|^{2s}}, \quad z = x + iy, \quad y > 0,$$

который представляет собой дзета-функцию Эпштейна положительно определенной квадратичной формы, нормированной таким образом, чтобы ее дискриминант совпадал с $D = -4$. Случай, когда квадратичная форма пропорциональна рациональной квадратичной форме, что имеет место в случае $x \in \mathbb{Q}$ и $|z|^2 \in \mathbb{Q}$, был рассмотрен Дэвенпортом и Хейльбронном. Случай трансцендентного z может быть исследован тем же методом, что применили Дэвенпорт и Хейльбронн для изучения $\zeta(s, a)$, но, как указал Старк в [6], рассуждения Касселса, очевидно, не могут быть перенесены без изменений на случай, когда квадратичная форма алгебраична, но не эквивалентна рациональной форме².

Работа Касселса порождает новую и, по-видимому, достаточно сложную задачу нахождения всех конечных мультипликативных соотношений между элементами последовательности $a, 1+a, 2+a, \dots$ в случае, когда a – иррациональное алгебраическое число, и подобную же задачу в случае ряда Эйзенштейна

²Мы исправляем здесь поспешное утверждение, высказанное первым из авторов в [7], на противоположное.

для чисел $|mz + n|^2 y^{-1}$ при $(m, n) \neq (0, 0)$, когда $z = x + iy$ – алгебраическое число, $y > 0$ и хотя бы одно из чисел x, y^2 не является рациональным (при этом можно ограничиться рассмотрением взаимно простых m и n).

2. Распределение нулей

2.1. Нули на критической прямой. Пример дзета-функции Эпштейна положительно определенной бинарной квадратичной формы, отвечающей мнимому квадратичному полю с числом классов не меньшим 2, показывает, что наличие функционального уравнения обычного типа не является достаточным условием для справедливости гипотезы Римана. Этот факт был впервые установлен Поттером и Титчмаршем (см. [2]). С другой стороны, дзета-функция Эпштейна рациональной положительно определенной бинарной квадратичной формы имеет на критической прямой по меньшей мере $cT + o(T)$ нулей с условием $0 < \Im(s) < T$, что было показано в той же работе с использованием рассуждений Харди и Литтлвуда, применявшихся для доказательства подобного утверждения для дзета-функции Римана.

Задача определения правильного порядка величины, выражающей число нулей такого рода функций, лежащих на критической прямой, оставалась нерешенной до тех пор, пока Сельберг [8] не доказал свою замечательную теорему о том, что положительная доля нулей дзета-функции Римана имеет вещественную часть, равную $1/2$. Хотя доказательство Сельберга без значительных изменений переносится на случай L -рядов Дирихле, для общих линейных комбинаций L -функций Дирихле, удовлетворяющих функциональному уравнению, а также для дзета-функций Эпштейна проблема до сих пор остается открытой.

Видоизменив упомянутые выше методы, С. М. Воронин [9] показал, что при достаточно большом T некоторые линейные комбинации L -функций Дирихле с функциональным уравнением имеют по меньшей мере

$$cT \exp\left(\frac{1}{20} \sqrt{\log \log \log \log T}\right)$$

нулей на соответствующем отрезке критической прямой. В частности, эта теорема покрывала случай функции Дэвенпорта–Хейльбронна, рассмотренный в книге Титчмарша [10; гл. X, п. 10.25]. Вскоре А. А. Карацуба [11] предложил более сильный метод и получил³ для случая функции Дэвенпорта–Хейльбронна нетривиальную нижнюю оценку вида $cT(\log T)^{1/2-\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$ – произвольное фиксированное число, а T достаточно велико. По ходу обсуждения, последовавшего за докладом А. А. Карацубы, слушателям стало ясно, что его метод можно применить к линейным комбинациям, содержащим и более двух L -функций Дирихле и имеющим функциональное уравнение, правда, ценой уменьшения показателя степени логарифма.

Х. Л. Монтгомери высказал предположение, что для подобных функций правильный порядок числа нулей, лежащих на критической прямой, ордината которых положительна и не превосходит T , есть $T \log T$ и, более того, почти

³Хотя его результат содержался в очень коротком “замечании, сделанном по ходу доказательства” (менее точного результата, которому был посвящен доклад [11]. – Прим. перев.), по свидетельству первого автора, он подробно обсуждался после выступления профессора Карацубы на конференции в Майори.

Рис. 1. Карацуба, слушающий лекцию в Майори, Италия, 1989 (рис. Э. Бомбьери)

все нули таких функций лежат на критической прямой (слова “почти все” понимаются в асимптотическом смысле). Следовательно, в случае линейной комбинации “независимых” L -функций класса $GL(n)$, удовлетворяющих одному и тому же функциональному уравнению, это число асимптотически равно $n(2\pi)^{-1}T \log T$.

Вторая, более сильная формулировка этой гипотезы не доказана даже для дзета-функции Римана. С другой стороны, Бомбьери и Хейчал [12] показали, что предполагаемая асимптотика $n(2\pi)^{-1}T \log T$ имеет место для линейных комбинаций L -функций, удовлетворяющих естественным условиям:

- (i) наличие эйлеровых произведений с условием Рамануджана,
- (ii) одинаковое функциональное уравнение,
- (iii) независимость,
- (iv) справедливость гипотезы Римана,
- (v) ослабленное свойство парной корреляции нулей;

за точным смыслом этих понятий мы отсылаем к оригинальной статье. Выполнение первых трех условий проверено для L -функций типов $GL(1)$ и $GL(2)$, однако вопрос о выполнении условий (iv) и (v), весьма правдоподобных и допускающих замену более слабыми, до сих пор остается открытым.

Зазор между результатом Карацубы и нижней оценкой порядка $cT \log T$ был в конечном итоге ликвидирован Сельбергом в его лекции, прочитанной в Институте перспективных исследований в 1998 г., он прочел также несколько других лекций на эту тему. Метод Сельберга не есть лишь упрощение того, что можно найти в его опубликованной работе о нулях $\zeta(s)$. В своей лекции он пояснил, что в действительности его доказательство основано на самом первом, так и не опубликованном, методе изучения нулей дзета-функции Римана и что опубликованная статья содержала лишь упрощение этого метода, которое не применимо к рассматриваемой задаче. Именно это и побудило его обратиться к первоначальному, более сложному подходу.

Для линейных комбинаций, содержащих n L -функций Дирихле, удовлетворяющих функциональному уравнению одного и того же типа (т. е. с единственным Γ -множителем типа $\Gamma(s/2 + a)$), метод Сельберга приводит к нижней границе вида

$$N_0(f; T) > cn^{-1}T \log T,$$

где $N_0(f, T)$ обозначает число нулей линейной комбинации $f(s)$, лежащих на критической прямой, мнимая часть которых содержится в промежутке $[0, T]$, а c – положительная абсолютная постоянная. Метод Сельберга работает и для функций $f(s)$, являющихся линейными комбинациями автоморфных L -функций класса $GL(2)$ с эйлеровым произведением (т. е. с двумя Γ -множителями типа $\Gamma(s/2 + a)$), и приводит в этом случае к нижней границе

$$N_0(f; T) > cn^{-2-\varepsilon}T \log T,$$

однако не все детали доказательства этого результата до конца проанализированы. Несмотря на то что сохранились рукописные заметки с доказательством Сельберга, а слайды с его лекции, прочитанной в MSRI, хранятся там же, все эти материалы до публикации в математическом журнале нуждаются

в значительном редактировании и восполнении большого количества деталей. Хотелось бы, чтобы эта работа была проделана в ближайшем будущем.⁴

2.2. Распределение значений. Более общая задача о распределении значений рядов Дирихле привлекала внимание многих математиков с момента появления в 1910 г. статьи Г. Бора [13]. Простейший случай возникает при исследовании распределения значений рядов Дирихле вида

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

в полуплоскости абсолютной сходимости $\Re(s) > \sigma_a$. Тогда в любой полуплоскости $\Re(s) > \sigma_a + \delta$, $\delta > 0$, функция $f(s)$ является почти периодической по Бору. По известному следствию из теоремы Руше, если уравнение $f(s) = c$ имеет решение $s = \eta = \alpha + i\gamma$ такое, что $\alpha > \sigma_a$, то правильный порядок числа решений уравнения $f(s) = c$ в прямоугольнике

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(a, b; T_0, T) := \{s : a < \Re(s) < b, T_0 < \Im(s) < T + T_0\}$$

при $\sigma_a < a < \alpha < b$ и $T \rightarrow \infty$ равен T равномерно по T_0 . Это наблюдение содержится, по крайней мере неявно, в цитированной статье Дэвенпорта и Хейльбронна [4] и в явном виде в комментарии к этой статье (принадлежащем Х. Л. Монтгомери) в собрании сочинений Дэвенпорта [14; т. IV, с. 1780].

Проблемы, связанные с асимптотическими формулами для распределения значений рядов Дирихле, включая распределение значений в полуплоскости голоморфности вместо полуплоскости абсолютной сходимости, являются достаточно тонкими; им уделялось значительное внимание, начиная с ранних работ Бора и его соавторов, использующих теорию почти периодических функций.

Случай аналитической функции, почти периодической по Бору, менее сложен; он был исследован Иессеном и Торнехэвом в работе [15], где содержится и подробная история вопроса. Пусть $f(s)$ – функция, аналитическая в вертикальной полосе $[a, b]$, почти периодическая по Бору и не равная тождественно нулю. Тогда среднее значение

$$\varphi(f; \sigma) := \lim_{(t_2 - t_1) \rightarrow \infty} \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \log |f(\sigma + it)| dt$$

существует равномерно по $a \leq \sigma \leq b$ и является выпуклой функцией σ . Оно называется функцией Иенсена, отвечающей f .

Подобное определение можно дать и для аргумента функции $f(s)$. Это делается следующим образом. Левый аргумент $\arg^- f(s)$ функции $f(s)$ вдоль вертикальной прямой $L_\sigma := \{\Re(s) = \sigma\}$ определяется как произвольная ветвь аргумента (которая определена, вообще говоря, с точностью до слагаемого, кратного 2π), непрерывная всюду на прямой L_σ , за исключением нулей функции $f(s)$, и совершающая скачок на $-m\pi$, когда s при возрастании t переходит через нуль $f(s)$ кратности m . Аналогично определяется и правый аргумент $\arg^+ f(s)$, с той лишь разницей, что величина скачка при переходе через нули

⁴ Авторы благодарят Денниса Хейчала за предоставление точных сведений о современном состоянии этой работы.

на L_σ берется равной $m\pi$. Ясно, что в случае, когда точки s_1 и s_2 прямой L_σ отличны от нулей $f(s)$, величины $\arg^+ f(s_2) - \arg^+ f(s_1)$ и $\arg^- f(s_2) - \arg^- f(s_1)$ определены корректно и не зависят от выбора ветвей, использованных при построении $\arg^\pm$.

После того как это сделано, правое верхнее и правое нижнее средние приращения функции $f(s)$ вдоль прямой L_σ определяются равенствами

$$c_u^+(f; \sigma) = \limsup_{(t_2 - t_1) \rightarrow \infty} \frac{\arg^+(f(\sigma + it_2)) - \arg^+(f(\sigma + it_1))}{t_2 - t_1},$$

$$c_l^+(f; \sigma) = \liminf_{(t_2 - t_1) \rightarrow \infty} \frac{\arg^+(f(\sigma + it_2)) - \arg^+(f(\sigma + it_1))}{t_2 - t_1}.$$

Аналогично определяются левое верхнее и левое нижнее средние приращения $f(s)$. Заметим, что все эти величины совпадают, если число нулей $f(s)$ на вертикальной прямой $\Re(s) = \sigma$ есть $o(T)$ равномерно на интервале длины T при $T \rightarrow \infty$.

Пусть $N(f; \mathcal{R})$ обозначает число нулей $f(s)$ в прямоугольнике

$$\mathcal{R} = \{\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2, t_1 \leq t \leq t_2\},$$

взятых с учетом кратности. Тогда, если $\varphi(f; \sigma)$ дифференцируема в точках σ_1 и σ_2 , то при $t_2 - t_1 \rightarrow \infty$ имеет место следующая асимптотическая формула:

$$N(f; \mathcal{R}) = \frac{1}{2\pi} (\varphi'(f; \sigma_2) - \varphi'(f; \sigma_1))(t_2 - t_1) + o(t_2 - t_1). \quad (2.1)$$

Это – так называемая формула Иенсена для функций, почти периодических по Бору.

Если $\varphi(f; \sigma)$ дифференцируема в точке σ , то левые и правые верхнее и нижнее средние приращения совпадают и равны $\varphi'(f; \sigma)$. В любом случае левые верхнее и нижнее средние приращения мажорируются правыми верхним и нижним средними приращениями и все они принадлежат интервалу $[\varphi'(f; \sigma - 0), \varphi'(f; \sigma + 0)]$ (правая и левая производные существуют в силу выпуклости).

Эти результаты были перенесены в 1948 г. Борхсениусом и Иессеном [16] на случай B_p -почти периодических по Безиковичу аналитических функций. Главное отличие здесь в том, что средние значения уже не могут браться по произвольно расположенному интервалу растущей длины. Вместо этого точка t_1 должна оставаться фиксированной, например $t_1 = 0$ (в силу симметрии допускается и случай $t_1 = -t_2$). Тогда функция $f(s)$ оказывается пределом последовательности функций, почти периодических по Бору, и конечный результат оказывается тем же. В случае дзета- и L -функций частичные эйлеровы произведения сходятся в L^2 -топологии к соответствующей функции.

Основная трудность в применении общих методов цитированных работ к рядам Дирихле состоит в том, что частоты $\{\log n\}$, возникающие в комплексных экспонентах $e^{it \log n}$, не являются линейно независимыми над $\mathbb{Q}$. Тем не менее, имеется простой прием, позволяющий изучать распределение нулей линейной комбинации $f(s) = aL_1(s) + bL_2(s)$ двух L -рядов, основанный на том, что уравнение $aL_1(s) + bL_2(s) = 0$ эквивалентно уравнению $L_1(s)/L_2(s) = -b/a$, если только $ab \neq 0$ и функции L_1 и L_2 не обращаются одновременно в нуль в точке s .

Итак, в случае $ab \neq 0$ исследование уравнения $f(s) = 0$ сводится к исследованию уравнения

$$\log L_1(s) - \log L_2(s) = \log\left(-\frac{b}{a}\right).$$

Это обстоятельство было использовано Гонеком [17] для того, чтобы показать, что дзета-функции Гурвица $\zeta(s, a)$ при $a \in \left\{\frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}\right\}$ не может иметь почти все нули на критической прямой. Подобная идея была использована Бомбьери и Мюллер [18] при изучении распределения нулей дзета-функций Эпштейна, отвечающих положительно определенным квадратичным формам с числом классов, равным 2. В случае дискриминанта, равного -20 , ими были получены нетривиальные верхняя и нижняя оценки для показателя сходимости нулей на прямой $\Re(s) = \sigma^*$, где σ^* есть абсцисса, определяющая полуплоскость, свободную от нулей этих функций. Их исследование ограничилось полуплоскостью $\Re(s) > 1$, где имеет место абсолютная сходимость и где, следовательно, эти дзета-функции Эпштейна являются почти периодическими по Бору.

В [19] Юнбок Ли достаточно подробно исследовал поведение линейных комбинаций дзета-функций Эпштейна, а также линейных комбинаций L -функций Дирихле с одним и тем же функциональным уравнением. В частности, для числа нулей в прямоугольнике $1/2 < \sigma_1 < \Re(s) < \sigma_2$, $|\Im(s)| < T$, в случае дзета-функций Эпштейна ему удалось получить асимптотическую формулу вида $cT + o(T)$ с некоторой положительной постоянной c . Применяя в своих исследованиях теорему Воронина [20] (см. также главу 7 книги Воронина и Карацубы [21]), он смог доказать, что постоянная c строго положительна, если $\sigma_2 \leq 1$ или же если мы имеем дело с линейной комбинацией двух $GL(1)$ или $GL(2)$ L -функций, в частности, с дзета-функцией Эпштейна положительно определенной квадратичной формы с числом классов, равным 2, или с функцией Дэвенпорта–Хейльбронна.

В заключение настоящего раздела упомянем замечательный результат Воронина [22] (см. также главу 6 обстоятельной монографии Лауринчикаса [23]) о свойстве универсальности L -рядов внутри критической полосы. В своей простейшей форме эта теорема утверждает следующее. Пусть K – компактное подмножество критической полосы $1/2 < \Re(s) < 1$, дополнение к которому связно, и пусть $f(s)$ – непрерывная и не имеющая нулей на K функция, аналитичная внутри K . Тогда множество точек $\tau \in \mathbb{R}$, для которых

$$\max_{s \in K} |\zeta(s + i\tau) - f(s)| < \varepsilon,$$

имеет положительную плотность. Эта теорема может быть перенесена и на случай совместных приближений вектор-функций $(f_1(s), \dots, f_n(s))$ значениями вектора $(L_1(s + i\tau), \dots, L_n(s + i\tau))$ в случае, когда $L_i(s)$ являются L -функциями Дирихле, отвечающими примитивным характеристам. На самом деле подобный результат верен и для гораздо более широкого класса функций, допускающих представление в виде эйлерова произведения рациональных функций. Основное условие состоит в том, что область K и каждая функция $f_i(s)$ должны удовлетворять тем же требованиям, что и в случае одной функции.

Простые соображения показывают, что теорема Воронина об универсальности имеет место и в случае линейной комбинации двух и более L -функций, причем даже тогда, когда опущено условие необращения в нуль приближаемой аналитической функции $f(s)$. Для доказательства достаточно представить $f(s)$ в виде суммы

$$f(s) = a_1 f_1(s) + \cdots + a_n f_n(s),$$

где никакая функция $f_i(s)$ не обращается в нуль на своей области определения, что можно сделать достаточно просто. Тогда совместное приближение приводит к неравенству

$$\max_{s \in K} \left| \sum_{i=1}^n a_i L_i(s + i\tau) - f(s) \right| < n\varepsilon.$$

В частности, при любом $1/2 < \sigma_0 < 1$ функцию $f(s)$ можно положить равной $f(s) = s - \sigma_0$ внутри маленького диска с центром в точке σ_0 . Если радиус δ этого диска будет достаточно маленьким, то с помощью теоремы Руше стандартным образом выводится, что функция $a_1 L_1(s) + \cdots + a_n L_n(s)$ имеет нуль в круге $|s - \sigma_0 - i\tau| < \delta/2$. Так как величины δ и ε могут быть взяты сколь угодно малыми, отсюда следует, что вещественные части нулей такой линейной комбинации плотны в открытом интервале $(1/2, 1)$.

В области $\sigma > 1 + \delta$ теоремы универсальности не выполняются в полной мере, поскольку там L -функции являются ограниченными почти периодическими по Бору аналитическими функциями. Было бы интересно получить простое описание класса векторов, составленных из аналитических функций, которые приближаются параллельными переносами векторов, составленных из L -функций. Вероятно, подобный результат решил бы в положительном смысле вопрос о справедливости гипотезы о том, что вещественные части нулей линейной комбинации двух и более L -функций плотны в интервале $(1, \sigma^*)$, где $\sigma^* > 1$ – точная верхняя грань вещественных частей таких нулей. Случай двух L -функций был исследован Юнбоком Ли в указанной выше работе [19].

3. Коэффициенты ряда $1/f(s)$

3.1. Теоремы Ландау. Пусть

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

– некоторый ряд Дирихле. Будем предполагать, что

- (i) ряд Дирихле $f(s)$ имеет абсциссу сходимости σ_c ;
- (ii) $a_1 = 1$.

Условие (ii) не является принципиальным, однако оно позволяет несколько упростить формулировки результатов.

В этом разделе мы будем исследовать поведение коэффициентов b_n обратного ряда Дирихле

$$g(s) := \frac{1}{f(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}. \quad (3.1)$$

В частности, мы рассмотрим и так называемую функцию Дэвенпорта–Хейльбронна, которая имеет функциональное уравнение того же типа, что и L -функции Дирихле, отвечающие характерам $\bmod 5$. Методы, используемые в статье, не ограничиваются этим частным случаем, и было бы интересно распространить их на более общие случаи.

Поведение коэффициентов обратного ряда $1/f(s)$ впервые было исследовано Э. Ландау [24] в связи с новым доказательством того факта, что функция $\zeta(s)$ при любом фиксированном $\delta > 0$ принимает в полосе $1 < \sigma < 1 + \delta$ любое значение, за исключением 0. Метод Ландау опирался на рассмотрение двух рядов для

$$f(s) = \zeta(s) - c = \sum a_n n^{-s}, \quad g(s) = \frac{1}{\zeta(s) - c} = \sum b_n n^{-s}$$

и хорошо работал при $c \neq 0, 1$. В случае $c = 1$ Ландау приводил прямые аргументы.

В работе Ландау важную роль играл максимальный порядок роста коэффициентов a_n и b_n . Опишем вкратце два из его результатов.

В [24; Satz 5] Ландау устанавливает следующее (в переводе с немецкого оригинального текста).

ТЕОРЕМА 1 (Ландау, [24; Satz 5]). 1) *Предположим, что $a_1 \neq 0$ и что ряд*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

сходится при $\sigma > 1$. Тогда при достаточно больших σ имеем:

$$\frac{1}{f(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}.$$

2) *Если при этом*

$$f(s) \neq 0 \quad \text{для } \sigma > 1,$$

то для любого $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$b_n = O(n^{1+\varepsilon}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство Ландау достаточно тонкое, и мы изложим его здесь вкратце. Так как ряд $\sum a_n n^{-s}$ сходится при $\sigma > 1$, то для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ при $\sigma > 1 + \varepsilon$ имеем оценку $f(s) = O(|s|)$. Действительно, если

$$A(x) = \sum_{n \leq x} a_n,$$

то абсцисса сходимости σ_c ряда $f(s)$ дается равенством

$$\sigma_c = \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\log |A(x)|}{\log x}$$

(см. [25; LXVIII, § 207, Satz 5, p. 732]). Следовательно, в нашем случае $A(x) = O(x^{1+\varepsilon})$ для любого фиксированного $\varepsilon > 0$.

Далее, имеет место представление в виде интеграла Стилтеса

$$f(s) = \int_{1-}^{\infty} x^{-s} dA(x) = s \int_{1-}^{\infty} A(x) x^{-s-1} dx,$$

причем, в силу предыдущей оценки для $A(x)$, второй интеграл равномерно ограничен при $\sigma > 1 + \varepsilon$. Если $f(s) \neq 0$ при $\sigma > 1$, то функция $\log f(s)$, где ветвь логарифма фиксирована выбором $\log f(\infty) = \log a_1$, определена корректно и голоморфна при $\sigma > 1$, причем ее вещественная часть ограничена в этой области величиной $O(\log |s|)$. Применение теоремы Бореля–Каратеодори приводит к той же оценке и для величины $|\log f(s)|$. Кроме того, ряд для $f(s)$ сходится абсолютно при $\sigma > 2$, так что функция $\log f(s)$ равномерно ограничена в любой полуплоскости вида $\sigma > 2 + \varepsilon$. Таким образом, применяя теорему Адамара о трех кругах к $\log f(s)$, в итоге получим, что $\log f(s) = o(\log |s|)$ во всякой полуплоскости $\sigma > 1 + \varepsilon$.

Потенцируя это неравенство, заключаем, что $1/f(s) = O(|s|^{o(1)})$ в любой полуплоскости вида $\sigma > 1 + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ – произвольное фиксированное число. Поскольку $a_1 \neq 0$, несложно показать, что ряд $1/f(s) = \sum b_n n^{-s}$ сходится абсолютно в некоторой полуплоскости $\sigma \geq c$. Чтобы завершить доказательство теоремы, заметим, что в силу теоремы Коши

$$\begin{aligned} 2iTb_n &= \int_{1+\varepsilon-iT}^{1+\varepsilon+iT} \frac{1}{f(w)} n^w dw - \int_{1+\varepsilon-iT}^{1+\varepsilon+iT} \left(\frac{1}{f(w)} - b_n n^{-w} \right) n^w dw \\ &= O(T^{1+o(1)} n^{1+\varepsilon}) + \int_{I_1+I_2+I_3} \left(\frac{1}{f(w)} - b_n n^{-w} \right) n^w dw, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $I_1 + I_2 + I_3$ обозначает контур, состоящий из трех отрезков, соединяющих точки $1 + \varepsilon - iT$, $c - iT$, $c + iT$, $1 + \varepsilon + iT$.

Интегралы по I_1 и I_3 тривиально оцениваются как $O(n^c T^{o(1)})$.

Поскольку ряд $1/f(s)$ сходится абсолютно и равномерно на прямой $\sigma = c$, мы можем перейти в I_2 к почленному интегрированию. Таким образом,

$$\begin{aligned} \int_{I_2} \left(\frac{1}{f(w)} - b_n n^{-w} \right) n^w dw &= 2 \sum_{h \neq n} b_h \left(\frac{n}{h} \right)^c \frac{\sin(T \log(n/h))}{\log(n/h)} \\ &= O\left(n^{c+1} \sum |b_h| h^{-c} \right) = O(n^{c+1}). \end{aligned}$$

Оценка величины b_n следует теперь из (3.2) и оценок интегралов по I_1 , I_2 , I_3 при $T = n^c$.

В кратком приложении к своей статье Ландау доказывает следующую теорему.⁵

ТЕОРЕМА 2 (Ландау, [24; Satz 12]). *Предположим, что ряд*

$$f(s) = \sum \frac{a_n}{n^s}$$

⁵Теорема Ландау устанавливается без условия $a_1 \neq 0$. В общем случае ряд $1/f(s)$ имеет своим носителем вместо множества натуральных чисел последовательность (λ_n) .

сходится и $f(s) \neq 0$ при $\sigma > \alpha$, и допустим, что $a_1 \neq 0$. Тогда ряд

$$\frac{1}{f(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$$

сходится при $\sigma > \alpha$.

3.2. В 1937 г. Э. Хилле [26] исследовал формулы обращения типа Мёбиуса, прототипом и наиболее важным примером которых является обращение обычного ряда Дирихле, т. е. решение задачи

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s} = 1.$$

Она эквивалентна бесконечной системе линейных уравнений

$$a_1 b_1 = 1, \quad \sum_{d|n} a_d b_{n/d} = 0 \quad (n > 1) \quad (3.3)$$

с неизвестными b_n . Ее решение единственно и дается формулами

$$b_1 = a_1^{-1}, \quad b_n = \sum (-1)^k a_{d_1} \cdots a_{d_k} \quad (n \geq 2), \quad (3.4)$$

где суммирование ведется по всем разложениям $n = d_1 \cdots d_k$ на множители, большие либо равные 2. Обозначим через $d'_k(n)$ число таких разложений, содержащих k сомножителей. Формула (3.4) может быть записана в виде

$$b_n = \sum (-1)^{|\alpha|} \binom{|\alpha|}{\alpha} \prod (a_{d_i})^{\alpha_i}, \quad (3.5)$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots$, а $\binom{|\alpha|}{\alpha}$ – полиномиальный коэффициент; суммирование ведется по всем возможным разложениям вида

$$n = d_1^{\alpha_1} d_2^{\alpha_2} \cdots \quad (d_1 > d_2 > \cdots \geq 2).$$

Имеем равенство

$$\sum (-1)^k d'_k(n) = \mu(n),$$

которое становится очевидным, если воспользоваться определением функции Мёбиуса через ее производящий ряд Дирихле $1/\zeta(s)$. Кроме того,

$$\sum_k d'_k(n) = t(n)$$

есть число разложений n в произведение сомножителей, отличных от единицы, в которых учитывается порядок следования множителей (для $n = 1$ полагают $t(1) = 1$). Производящей функцией для $t(n)$ служит

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t(n)}{n^s} = \frac{1}{2 - \zeta(s)}. \quad (3.6)$$

Если через $\rho_0 = 1.728647238998 \dots$ обозначить единственное вещественное решение уравнения $\zeta(s) = 2$, то, как показал Хилле [27], максимальный порядок $t(n)$ есть $n^{\rho_0+o(1)}$. С другой стороны, так как $2 - \zeta(s) \neq 0$ при $\Re(s) > \rho_0$, то по приведенной выше теореме 2 Ландау ряд Дирихле для $1/(2 - \zeta(s))$ сходится и при $\Re(s) > \rho_0$, но не сходится ни в какой другой более широкой полуплоскости. Таким образом, максимальный порядок $t(n)$ достигается на очень редкой последовательности.

3.3. Большие коэффициенты. Вопрос о поведении максимума коэффициентов b_n ряда Дирихле, обратного к $f(s) = \sum a_n n^{-s}$, очевидным образом связан с расположением нулей $f(s)$. Следующий простой пример иллюстрирует эту связь.

Пусть σ_c – абсцисса сходимости для $f(s)$. Если $f(s) \neq 0$ при $\Re(s) > \sigma_c$, то приведенная выше теорема Ландау устанавливает сходимость ряда для $1/f(s)$ при $\Re(s) > \sigma_c$, что приводит к оценке

$$b_n = O(n^{\sigma_c+o(1)})$$

для коэффициентов b_n ряда Дирихле $1/f(s)$. Если, напротив, $f(s)$ имеет нули с вещественной частью, превосходящей σ_c , то положим

$$\alpha = \sup\{\Re(\rho) : f(\rho) = 0\}.$$

Тогда из теоремы Ландау следует, что абсцисса сходимости ряда Дирихле для $1/f(s)$ равна α , поскольку $1/f(s)$ имеет полюс в каждом нуле $f(s)$ в открытой полуплоскости сходимости. В этом случае мы имеем не только оценку

$$b_n = O(n^{\alpha+o(1)}),$$

но и неравенство

$$|b_n| > n^{\alpha-1-\varepsilon} \quad (3.7)$$

для бесконечного множества номеров n и любого фиксированного $\varepsilon > 0$. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что в противном случае ряд $\sum b_n n^{-s}$ сходил бы абсолютно при $\sigma > \alpha - \varepsilon$, что невозможно, так как из определения α следует, что функция $1/f(s)$ должна иметь полюсы с вещественной частью, превосходящей $\alpha - \varepsilon$.

Ряд

$$f(s) = \frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s},$$

сходящийся абсолютно при $\sigma > 1$, сходящийся при $\sigma > 1/2$ в предположении, что гипотеза Римана верна, и имеющий изолированный нуль в точке $s = 1$, составляет условный пример, показывающий, что граница (3.7) является точной. Было бы весьма интересно построить безусловный пример такого рода.

3.4. Уточнение теоремы Ландау. Построенный выше пример показывает (по крайней мере, при условии выполнения гипотезы Римана), что нижняя граница, которая дается неравенством (3.7), не может быть усилена без наложения на функцию $f(s)$ дополнительных условий. Следующая теорема дает пример такого уточнения.

ТЕОРЕМА 3. Предположим, что $a_1 \neq 0$ и что ряд

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

сходится абсолютно при $\sigma > \sigma_a$. Предположим также, что $f(s)$ имеет нуль в открытой полуплоскости $\sigma > \sigma_a$, и обозначим

$$\alpha(f) = \sup_{f(\rho)=0} \Re(\rho), \quad (3.8)$$

где точная верхняя грань берется по всем нулям $f(s)$, лежащим в полуплоскости абсолютной сходимости. Тогда ряд

$$\frac{1}{f(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$$

сходится при $\sigma > \alpha(f)$ и, кроме того,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |b_n|}{\log n} = \alpha(f). \quad (3.9)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Теорема 3 показывает, что если $f(s)$ имеет нуль в открытой полуплоскости абсолютной сходимости, то верхняя граница, установленная теоремой 1 Ландау, является точной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство теоремы следует рассуждениям Хилле [27]. Определим

$$\langle \mathcal{P}_z \rangle = \langle \{p : p \leq z\} \rangle \quad (3.10)$$

как полугруппу (с единицей), порожденную всеми простыми числами p , не превосходящими z , так что $n \in \langle \mathcal{P}_z \rangle$ тогда и только тогда, когда n не имеет простых делителей, больших z .

Положим

$$f_z(s) = \sum_{n \in \langle \mathcal{P}_z \rangle} \frac{a_n}{n^s}$$

и заметим, что

$$\frac{1}{f_z(s)} = \sum_{n \in \langle \mathcal{P}_z \rangle} \frac{b_n}{n^s}$$

является рядом Дирихле с тем же носителем, что и $f_z(s)$. Из абсолютной сходимости ряда для $f(s)$ сразу следует, что

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f_z(s) = f(s)$$

равномерно в любой замкнутой полуплоскости $\sigma \geq c > \sigma_a$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ с условием $\varepsilon < (\alpha(f) - \sigma_a)/3$. Из определения $\alpha(f)$ следует, что функция $f(s)$ имеет нуль $\rho = \beta + i\gamma$, где

$$\alpha(f) - \varepsilon \leq \beta \leq \alpha(f).$$

В силу равномерной сходимости (пользуясь принципом аргумента) заключаем, что для всех достаточно больших z функция $f_z(s)$ также имеет нуль $\rho_z = \beta_z + i\gamma_z$, близкий к ρ . Поэтому можно считать, что

$$\alpha(f) - 2\varepsilon \leq \beta_z \leq \alpha(f) + 2\varepsilon, \quad (3.11)$$

а поскольку изначально ε было взято достаточно малым, при больших z имеем: $\sigma_a < \beta_z$. Беря z еще большим, мы можем также считать, что $f_z(s) \neq 0$ при $\sigma > \alpha(f) + 3\varepsilon$.

Теперь мы можем применить теорему 1 Ландау к функции $1/f_z(s)$ и заключить, что

$$b_n = O(n^{\alpha(f)+3\varepsilon+o(1)}) \quad \text{при } n \in \langle \mathcal{P}_z \rangle. \quad (3.12)$$

С другой стороны, $f_z(s)$ обращается в нуль в точке ρ_z , так что $1/f_z(s)$ имеет полюс в ρ_z , откуда следует, что мажорирующий ряд

$$\sum_{n \in \langle \mathcal{P}_z \rangle} \frac{|b_n|}{n^{\beta_z}}$$

расходится. Таким образом, разбивая область суммирования на промежутки, правый конец каждого из которых вдвое больше левого, и сравнивая с каким-нибудь стандартным сходящимся рядом (скажем, с $\sum 1/\nu^2$), замечаем, что неравенство

$$\sum_{\substack{2^{\nu-1} < n \leq 2^\nu \\ n \in \langle \mathcal{P}_z \rangle}} |b_n| > \nu^{-2} (2^{\nu-1})^{\beta_z} \quad (3.13)$$

должно выполняться для бесконечного множества номеров ν .

Наконец, число элементов $\langle \mathcal{P}_z \rangle$, не превосходящих 2^ν , не превышает, очевидно, ν^z . Из неравенства (3.13) мы заключаем, что для любого ν существует $n \in \mathcal{P}_z \cap (2^{\nu-1}, 2^\nu]$ такое, что

$$|b_n| > \nu^{-2-z} \left(\frac{n}{2} \right)^{\beta_z}. \quad (3.14)$$

Так как $\nu = O(\log n)$, то искомая нижняя граница $|b_n| > n^{\alpha(f)-o(1)}$ получается из (3.12) и (3.14), если устремить z к ∞ достаточно медленно, а затем взять $\varepsilon \rightarrow 0$.

4. Теорема о среднем

Здесь мы докажем теорему о среднем для коэффициентов ряда, обратного к ряду Дирихле. Подобный результат упоминается в разделе 4 работы [6] в качестве упражнения для заинтересованных читателей.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $f(s) = \sum a_n n^{-s}$ – ряд Дирихле, причем $a_1 = 1$ и $a_n = O(n^\varepsilon)$. Предположим также, что $f(s)$ имеет нуль ρ такой, что $\Re(\rho) = \beta > 1$. Пусть $1/f(s) = \sum b_n n^{-s}$ – ряд, обратный к $f(s)$. Тогда

$$\sum_{n \leq X} \frac{|b_n|^2}{n} \gg X^{2\beta-1+o(1)} \quad \text{при } X \rightarrow \infty.$$

СЛЕДСТВИЕ 6. Если $\sigma^* > 1$ – наименьшая верхняя граница вещественных частей нулей $f(s)$, то

$$\sum_{n \leq X} \frac{|b_n|^2}{n} \gg X^{2\sigma^* - 1 + o(1)} \quad \text{при } X \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Воспользуемся приемом, впервые примененным Карлсоном [28] для получения верхней оценки числа нулей дзета-функции Римана в областях внутри критической полосы, а именно домножением $\zeta(s)$ на усеченный ряд $1/\zeta(s)$ для получения более точных L^2 -оценок. В нашем случае мы имеем дело с обратной ситуацией. В силу свойства почти периодичности по Бору мы располагаем нижней оценкой для числа нулей ряда Дирихле $f(s)$ в полосе, и это обстоятельство может быть использовано для получения нетривиальных утверждений о преобразовании Мёбиуса коэффициентов ряда $f(s)$.

Положим

$$M_X(s) = \sum_{n \leq X} \frac{b_n}{n^s}.$$

Тогда

$$M_X(s)f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(n, X)}{n^s}, \quad (4.1)$$

где

$$c(n, X) = \sum_{d|n, d \leq X} b_d a_{n/d}.$$

Разумеется, $M_X(s)f(s)$ обращается в нуль всякий раз, когда $f(s) = 0$. Заметим, что

$$c(1, X) = 1, \quad c(n, X) = 0, \quad 1 < n \leq X.$$

Предположим, что $f(s)$ имеет нуль $\rho = \beta + i\gamma$, где $\beta > \alpha > 1$. Функция $M_X(s)f(s)$ разлагается в ряд Дирихле, абсолютно сходящийся при $\sigma > 1$, и является в этой области почти периодической по Бору. Следовательно, определенная в п. 2.2 функция Иенсена

$$\varphi(M_X f; \sigma) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \log |M_X(\sigma + it)f(\sigma + it)| dt$$

существует при $\sigma > 1$ и является выпуклой функцией σ . Пользуясь неравенством $\log |1 + z| \leq |z|$ и неравенством Коши, заключаем, что при $\sigma > 1$ имеет место неравенство

$$\varphi(M_X f; \sigma) \leq \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |M_X(\sigma + it)f(\sigma + it) - 1|^2 dt \right)^{1/2}. \quad (4.2)$$

Действительно, L^2 -среднее $M_2(g; \sigma)$ ряда Дирихле $g(s) = \sum g_n n^{-s}$, абсолютно сходящегося при $\sigma > 1$, существует и равно

$$M_2(g; \sigma) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|g_n|^2}{n^{2\sigma}} \right)^{1/2}, \quad \sigma > 1 \quad (4.3)$$

(см., например, [10; гл. VII, п. 7.1]).

Далее, так как функция $f(s)$ имеет нуль ρ с вещественной частью $\beta > \alpha$, то в силу свойства почти периодичности по Бору она имеет $\gg T$ нулей в области $\sigma > \alpha$, $|t| \leq T$, откуда следует, что $\varphi(M_X f; \alpha) \geq \varepsilon_0 > 0$ при некотором ε_0 , не зависящем от X . Независимость от X объясняется тем, что функция Иенсена является лог-аддитивной, и тем, что мы учитываем лишь вклад от $f(s)$, который от X не зависит (снова см. п. 2.2). Теперь из (4.2) и (4.3) следует, что

$$\sum_{n>X} \frac{|c(n, X)|^2}{n^{2\alpha}} = M_2(M_X f - 1, \alpha) \geq \varepsilon_1 > 0 \quad (4.4)$$

при некотором ε_1 , не зависящем от X .

Из неравенства Коши и соотношения $\sum_{d|n} |a_n|^2 = n^{o(1)}$ получаем оценку

$$|c(n, X)|^2 \leq n^{o(1)} \sum_{d \leq X, d|n} |b_d|^2.$$

Таким образом, полагая $n = dm$, из (4.4) мы заключаем, что тем более

$$\sum_{d \leq X, m \geq X/d} \frac{|b_d|^2 (dm)^{o(1)}}{d^{2\alpha} m^{2\alpha}} > \varepsilon_1 > 0$$

при постоянном ε_1 , не зависящем от X . Сумма по m ограничена величиной $(X/d)^{1-2\alpha+o(1)}$, так что

$$\sum_{d \leq X} \frac{|b_d|^2}{d} \gg X^{2\alpha-1+o(1)}.$$

Так как α может быть взято сколь угодно близким к β , то отсюда следует утверждение теоремы.

5. Ряды типа Дэвенпорта–Хейльбронна

Большинство результатов, помещенных в настоящем разделе, справедливы в предположении, что число ξ является вещественным или чисто мнимым.

5.1. Ряды Дэвенпорта–Хейльбронна. Пусть ξ – комплексное число. Определим ряд Дирихле

$$f(s, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n, \xi)}{n^s}$$

с помощью равенств

$$a(n, \xi) = \begin{cases} 1, & \text{если } n \equiv 1 \pmod{5}, \\ \xi, & \text{если } n \equiv 2 \pmod{5}, \\ -\xi, & \text{если } n \equiv 3 \pmod{5}, \\ -1, & \text{если } n \equiv 4 \pmod{5}, \\ 0, & \text{если } n \equiv 0 \pmod{5}. \end{cases} \quad (5.1)$$

Более общо, мы будем рассматривать и свертки вида

$$f(s, \xi; \psi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n, \xi) \psi(n)}{n^s},$$

где $\psi(n)$ обозначает вполне мультипликативную функцию. Если $\psi(n) = O(n^\varepsilon)$ для любого фиксированного $\varepsilon > 0$, то все эти ряды имеют абсциссой сходимости $\sigma_a = 1$. Будем писать $f(s, \xi) = f(s, \xi; 1)$.

Пусть χ_j обозначают четыре характера Дирихле mod 5, так что

$$\chi_j(n) = a(n, i)^j \quad \text{при } j = 0, 1, 2, 3.$$

Ясно, что $\chi_1(n) = \overline{\chi_3(n)}$. Кроме того, можно заметить, что при $\chi = \chi_0$ или χ_2 справедливо равенство

$$\chi(1) + \xi \chi(2) - \xi \chi(3) - \chi(4) = 0,$$

из которого следует, что

$$f(s, \xi; \psi) = \frac{1}{2} ((1 - i\xi)L(s, \chi_1\psi) + (1 + i\xi)L(s, \chi_3\psi)).$$

При $\xi \neq \pm i$ положим

$$\log \frac{1 + i\xi}{1 - i\xi} = \alpha + 2i\theta,$$

где берется главное значение логарифма с условием $\pi/2 < \theta \leq \pi/2$. При вещественных ξ имеем, очевидно, $\xi = \tan(\theta)$, так что

$$f(s, \xi; \psi) = \frac{1}{2} \sec(\theta) (L(s, \chi_1\psi)e^{-i\theta} + L(s, \overline{\chi_1}\psi)e^{i\theta}). \quad (5.2)$$

Такие ряды были введены в рассмотрение Титчмаршем [10; гл. X, п. 10.25], который заметил, что при $\xi = (\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} - 2)/(\sqrt{5} - 1)$ функция $f(s; \xi)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$\left(\frac{\pi}{5}\right)^{-s/2} \Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right) f(s; \xi) = \left(\frac{\pi}{5}\right)^{-(1-s)/2} \Gamma\left(\frac{1+(1-s)}{2}\right) f(1-s; \xi),$$

подобному функциональному уравнению рядов Дирихле, отвечающих нечетным характеристам mod 5, с той лишь разницей, что в нашем случае число его решений равно 1. Эта функция обычно называется рядом Дэвенпорта–Хейльберонна. Везде далее указанное выше значение ξ мы будем обозначать через τ_+ .

Заметим, что число τ_+ и сопряженное к нему число τ_- , которое мы сейчас определим, могут быть записаны в более наглядной форме

$$\tau_{\pm} = -\phi \pm \sqrt{1 + \phi^2} \quad \left(\text{где } \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right),$$

так что $\tau_+ \tau_- = -1$. Функции $f(s; \tau_{\pm})$ удовлетворяют функциональным уравнениям

$$\left(\frac{\pi}{5}\right)^{-s/2} \Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right) f(s; \tau_{\pm}) = \pm \left(\frac{\pi}{5}\right)^{-(1-s)/2} \Gamma\left(\frac{1+(1-s)}{2}\right) f(1-s; \tau_{\pm}).$$

Эта конструкция может быть перенесена и на случай модулей q , превышающих 5. При больших q получим линейное пространство решений функциональных уравнений того же типа, что и в случае функций Дэвенпорта–Хейльбронна, с гамма-множителем вида $\Gamma(s/2)$ или $\Gamma((s+1)/2)$, размерности, большей 1.

Методами Ландау [24] или Дэвенпорта–Хейльбронна [3] можно показать, что все функции, получающиеся с помощью такого построения, имеют нули с вещественной частью, большей 1.

Поскольку соответствующие эйлеровы произведения сходятся при $\sigma > 1$, функции $L(s, \chi_1\psi)$ и $L(s, \overline{\chi_1}\psi)$ не будут обращаться в нуль в этой области, если наряду с оценкой $\psi(n) = O(n^\varepsilon)$ потребовать выполнение условия

$$|\psi(p)| < p \quad \text{для всех простых } p.$$

В этом случае, подобно тому, как это делается в работе [18], можно заключить, что в указанной полуплоскости, где логарифм определен корректно,

$$f(s, \xi; \psi) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \log \frac{L(s, \chi_1\psi)}{L(s, \overline{\chi_1}\psi)} = \alpha + 2i\theta + (2k+1)\pi i \quad (5.3)$$

при некотором целом k .

Пусть

$$F(z) := \log \frac{1+z}{1-z},$$

где $|z| < 1$, а в качестве логарифма берется главное значение, мнимая часть которого заключена в интервале $(-\pi, \pi]$. Тогда

$$\log \frac{L(s, \chi_1\psi)}{L(s, \overline{\chi_1}\psi)} = \sum_{p \equiv 2 \pmod 5} F\left(\frac{i\psi(p)}{p^s}\right) + \sum_{p \equiv 3 \pmod 5} F\left(\frac{-i\psi(p)}{p^s}\right).$$

Обозначим правую часть последнего выражения через $g(s, \psi)$.

Чтобы двигаться дальше, нам необходимо проанализировать приведенное выше выражение при различных способах выбора функции ψ . Сперва мы рассмотрим случай, когда ψ является главным характером $\bmod q$ для некоторого целого $q \geq 1$. В этом случае из теоремы Кронекера следует, что при $\Re(s) = \sigma > 1$ замыкание множества точек $\{g(\sigma + it, \psi) : t \in \mathbb{R}\}$ совпадает с множеством

$$V(\sigma, q) := \left\{ \sum_{\substack{p \equiv 2,3 \pmod 5 \\ (p,q)=1}} F(p^{-\sigma-i\theta_p}) : \theta_p - \text{независимые вещественные переменные} \right\};$$

доказательство этого факта см., например, в [10; гл. XI, п. 11.4]. Следовательно, для указанной выше функции ψ мы заключаем, что

$$\begin{aligned} f(\sigma + it, \xi; \psi) &= 0 \quad \text{при некотором } t \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow \quad 2i\theta + (2k+1)\pi i &\in V(\sigma, q) \quad \text{при некотором } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Обратно, если σ таково, что

$$\alpha + 2i\theta + (2k+1)\pi i \in V(\sigma, q) \quad \text{при некотором } k \in \mathbb{Z},$$

то для любого $\varepsilon > 0$ найдется точка $\sigma' + it'$ такая, что $|\sigma' - \sigma| < \varepsilon$ и $f(\sigma' + it', \xi; \psi) = 0$.

Заметим, что именно в этом месте мы пользуемся тем, что $f(s, \xi; \psi)$ является линейной комбинацией в точности двух L -функций, имеющих эйлерово произведение, поскольку это обстоятельство позволяет свести задачу об обращении в нуль ряда Дирихле $f(s, \xi; \psi)$ с носителем на всем множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ к выяснению того, принимает ли новый ряд Дирихле $g(s, \psi)$ с носителем на множестве простых чисел $\mathcal{P}$ одно из значений $\alpha + 2i\theta + (2k + 1)\pi i$. Хотя теорема Кронекера неприменима напрямую к $f(s, \xi; \psi)$ (числа $\log n$ не являются линейно независимыми над $\mathbb{Q}$), ее можно применить к $g(s, \psi)$, поскольку логарифмы простых чисел линейно независимы над $\mathbb{Q}$.

Обозначим через $\sigma(\xi, q)$ точную верхнюю грань чисел $\sigma > 1$, для которых ряд

$$\sum_{\substack{n=1 \\ (n,q)=1}}^{\infty} \frac{a(n, \xi)}{n^s}$$

обращается в нуль в точке $s = \sigma + it$ при некотором $t \in \mathbb{R}$. В силу сказанного выше, таким образом мы отыщем наибольшее $\sigma > 1$, для которого

$$\alpha + 2i\theta + (2k + 1)\pi i \in V(\sigma, q) \quad \text{при некотором } k \in \mathbb{Z}.$$

Такое значение существует в силу замкнутости $V(\sigma, q)$ и равномерной ограниченности. Докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 7. 1) Пусть ξ – вещественное число. Тогда $\sigma(\xi, q)$ является тем значением $\sigma > 1$, что удовлетворяет уравнению

$$\sum_{\substack{p \equiv 2,3 \pmod{5} \\ (p,q)=1}} \arctan(p^{-\sigma}) = \frac{\pi}{2} - |\theta|.$$

2) Пусть ξ – чисто мнимое число, $|\xi| > 1$. Тогда $\sigma(\xi, q)$ является тем значением $\sigma > 1$, что удовлетворяет уравнению

$$\sum_{\substack{p \equiv 2,3 \pmod{5} \\ (p,q)=1}} \log \frac{1 + p^{-\sigma}}{1 - p^{-\sigma}} = \left| \log \left| \frac{1 + i\xi}{1 - i\xi} \right| \right|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Определим σ^* как единственное значение σ , удовлетворяющее первому уравнению из условий теоремы. Существование такого σ следует из того, что ряд по простым числам расходится при приближении σ к 1 и что его сумма стремится к нулю, когда σ неограниченно возрастает.

Предположим, что

$$2i\theta + (2k + 1)\pi i \in V(\sigma, q) \quad \text{при некотором } k \in \mathbb{Z}$$

для некоторого $\sigma \geq \sigma^*$ (напомним, что нам требуется максимальное значение для $\sigma = \sigma(\xi, q)$). Отделяя мнимые части, заключаем, что

$$|2\theta + (2k + 1)\pi| \leq 2 \sum_p \arctan(p^{-\sigma}) = \Im \left(\sum_p F(ip^{-\sigma}) \right),$$

где простые числа подчинены тем же ограничениям, что и выше. Это следует из соотношений (см. [18; лемма 2])

$$|\Im(F(z))| \leq 2 \arctan(|z|), \quad \Im(F(\pm ip^{-\sigma})) = \pm 2 \arctan(p^{-\sigma}).$$

Положим для краткости

$$A(\sigma) := \Im\left(\sum_p F(ip^{-\sigma})\right).$$

Ясно, что $A(\sigma)$ – монотонная строго убывающая функция, стремящаяся к нулю при стремлении σ к ∞ . Следовательно,

$$|2\theta + (2k + 1)\pi| \leq A(\sigma) \leq A(\sigma^*) = \pi - 2|\theta|.$$

Если $\theta \geq 0$, то мы заключаем, что $k = -1$; если же $\theta < 0$, то $k = 0$. Более того, вышеприведенные соотношения обращаются в равенства, так что $\sigma = \sigma^*$. Таким образом, можно считать, что $\sigma \leq \sigma^*$.

Для доказательства теоремы достаточно показать, что решение нашей задачи существует при $\sigma = \sigma^*$. Это, однако, сразу следует из определения σ^* и того факта, что $\Im(F(\pm ip^{-\sigma})) = \pm 2 \arctan(p^{-\sigma})$.

2) Доказательство получается с помощью тех же приемов, что и выше. Пусть σ^{**} обозначает то единственное значение σ , которое удовлетворяет второму уравнению из условий теоремы. Положим $\xi = iv$, где v – вещественное число такое, что $|v| > 1$. Тогда $\alpha = \log |(1-v)/(1+v)|$ и $\theta = \pi/2$. Станем теперь искать максимальное значение σ , удовлетворяющее условию

$$\log \left| \frac{1-v}{1+v} \right| + 2i\theta + (2k+1)\pi i \in V(\sigma, q) \quad \text{при некотором } k \in \mathbb{Z}.$$

Отделяя вещественные части и пользуясь неравенством

$$|\Re(F(z))| \leq \log \frac{1+|z|}{1-|z|},$$

которое обращается в равенство при вещественных z , мы заключаем, что

$$\left| \log \left| \frac{1-v}{1+v} \right| \right| \leq \sum_p \log \frac{1+p^{-\sigma}}{1-p^{-\sigma}} \leq \sum_p F(p^{-\sigma}).$$

Рассуждая как выше, мы снова заключаем, что $\sigma \leq \sigma^{**}$. Чтобы показать, что это значение достижимо, полагаем $k = -1$.

В качестве ψ также можно взять характеристическую функцию полугруппы $\langle \mathcal{P} \rangle$, где $\mathcal{P}$ – конечное множество простых чисел (ср. с определением (3.10)), так что $\psi(1) = 1$, $\psi(n) = 1$, если $(p|n \Rightarrow p \in \mathcal{P})$, и $\psi(n) = 0$ в противном случае. Рассмотрение проводится так же, как и в теореме 7, причем можно показать, что если $\sigma(\xi, \mathcal{P})$ является наибольшей из (превосходящих единицу) вещественных частей нулей ряда

$$\sum_{n \in \langle \mathcal{P} \rangle} \frac{a(n, \xi)}{n^s}, \quad (5.4)$$

то имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 8. При вещественном ξ величина $\sigma(\xi, \mathcal{P})$ является тем значением $\sigma > 1$, что удовлетворяет равенству

$$\sum_{\substack{p \equiv 2,3 \pmod{5} \\ p \in \mathcal{P}}} \arctan(p^{-\sigma}) = \frac{\pi}{2} - |\theta|. \quad (5.5)$$

Поучительно разобрать один частный случай этой теоремы. Пусть множество $\mathcal{P} = \{p\}$ состоит из единственного простого числа p . Если $p \equiv 1 \pmod{5}$, то ряд (3.1) сворачивается в $(1 - 1/p^s)^{-1}$ и, таким образом, не имеет нулей при $\sigma > 1$. Если $p \equiv 2 \pmod{5}$, то ряд (3.1) приводится к виду

$$\left(1 + \frac{\xi}{p^s} - \frac{1}{p^{2s}} - \frac{\xi}{p^{3s}}\right) \left(1 - \frac{1}{p^{4s}}\right)^{-1} = \left(1 - \frac{1}{p^{2s}}\right) \left(1 + \frac{\xi}{p^s}\right) \left(1 - \frac{1}{p^{4s}}\right)^{-1}, \quad (5.6)$$

так что нуль в области $\sigma > 1$ мы получим лишь в случае, когда $p < |\xi|$. То же заключение справедливо и в случае, когда $p \equiv 3 \pmod{5}$; единственное отличие состоит в замене ξ на $-\xi$ в вышеприведенной формуле. Несложно убедиться, что все эти утверждения являются прямыми следствиями теоремы 8.

5.2. Ограничение на коэффициенты. Вернемся к теоремам раздела 3. Нам хотелось бы знать, как ведут себя нули $f(s, \xi)$, и исследовать порядок роста коэффициентов обратной функции. Полагая

$$\frac{1}{f(s, \xi)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b(n, \xi)}{n^s},$$

из теоремы 1 заключаем, что $b(n, \xi) = O(n^{\sigma(\xi, 1)+\varepsilon})$. Согласно же теореме 3 эта оценка является точной.

Первое наше наблюдение состоит в замечании, что теорема 1 Ландау может быть усилена, если свести носитель ряда Дирихле к подпоследовательности целых чисел, имеющей положительную плотность, следующим образом. Рассмотрим ряд

$$\frac{1}{f(s, \xi; \psi)} := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b(n, \xi; \psi)}{n^s}.$$

Согласно (3.3), имеем $b(n, \xi; \psi) = \psi(n)b(n, \xi)$. Как и выше, полагая ψ равной главному характеру $\pmod{q}$, получим:

$$b(n, \xi; \psi) = \begin{cases} b(n, \xi), & \text{если } (n, q) = 1, \\ 0, & \text{если } (n, q) > 1. \end{cases}$$

Применяя теперь теорему 1 Ландау к ряду $f(s, \xi; \psi)$ и к соответствующей оценке для $b(n, \xi; \psi)$, получим оценку (точную, согласно теореме 3)

$$b(n, \xi) = O(n^{\sigma(\xi, q)+\varepsilon}) \quad \text{при всех } (n, q) = 1.$$

Это улучшит границу, которую дает теорема 1 Ландау, если мы сможем доказать, что $\sigma(\xi, q) < \sigma(\xi, 1)$. То, что это так, и составляет содержание следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 9. Пусть ξ – вещественное число. Тогда

$$\sigma(\xi, q) \leq \sigma(\xi, 1) - \delta(q),$$

где

$$\delta(q) = \frac{\mathfrak{S}}{1 + \mathfrak{S}} (\sigma(\xi, 1) - 1) > 0, \quad \mathfrak{S} = \sum_{\substack{p|q \\ p \equiv 2, 3 \pmod{5}}} \arctan(p^{-\sigma(\xi, 1)}).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Это утверждение показывает, что при отсеивании с помощью простых чисел, сравнимых с 2 или 3 mod 5, слагаемых из исходного ряда, нули нового ряда, лежащие в полуплоскости $\sigma > 1$, сместятся влево. С другой стороны, отсеивание с помощью простых чисел, сравнимых с 1 или 4 mod 5, такого эффекта не производит, и эти простые числа не влияют на максимум вещественных частей нулей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим теорему 7 дважды, первый раз – с $q = 1$. Вычитая друг из друга получившиеся равенства, заключаем, что

$$\sum'_{p|q} \arctan(p^{-\sigma(\xi, q)}) = \sum'_p (\arctan(p^{-\sigma(\xi, q)}) - \arctan(p^{-\sigma(\xi, 1)})),$$

где $\sum'$ означает суммирование по простым числам, сравнимым с 2 или 3 mod 5. Так получим:

$$\begin{aligned} \sum'_{p|q} \arctan(p^{-\sigma(\xi, q)}) &= \sum'_p \int_{\sigma(\xi, q)}^{\sigma(\xi, 1)} \frac{\log p}{p^\sigma + p^{-\sigma}} d\sigma \\ &\leq (\sigma(\xi, 1) - \sigma(\xi, q)) \sum'_p \frac{\log p}{p^{\sigma(\xi, q)} + p^{-\sigma(\xi, q)}}. \end{aligned}$$

С другой стороны, так как $\sigma(\xi, q) \leq \sigma(\xi, 1)$, то

$$\sum'_{p|q} \arctan(p^{-\sigma(\xi, q)}) \geq \sum'_{p|q} \arctan(p^{-\sigma(\xi, 1)}).$$

Пользуясь грубой оценкой

$$\sum'_p \frac{\log p}{p^{\sigma(\xi, q)} + p^{-\sigma(\xi, q)}} \leq -\frac{\zeta'}{\zeta} (\sigma(\xi, q)) \leq \frac{1}{\sigma(\xi, q) - 1},$$

будем иметь

$$\sum'_{p|q} \arctan(p^{-\sigma(\xi, 1)}) \leq \frac{\sigma(\xi, 1) - \sigma(\xi, q)}{\sigma(\xi, q) - 1},$$

откуда и следует утверждение теоремы.

Заметим, что $\delta(p)$ является убывающей функцией на множестве простых чисел p . Положим

$$\nu(z) = \min_{p < z} \delta(p),$$

где минимум берется по всем простым числам, сравнимым с 2 или 3 mod 5. Тогда имеет место следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 11. Пусть ξ – вещественное число, и пусть

$$P(z) = \prod_{\substack{p \leq z \\ p \equiv 2,3 \pmod{5}}} p.$$

Тогда, если $n \rightarrow \infty$ по значениям n , не делящимся на $P(z)$, то

$$b(n, \xi) = O(n^{\sigma(\xi,1)-\nu(z)+o(1)}).$$

Заметим, что $\nu(z) \sim z^{-\sigma(\xi,1)}$ при $z \rightarrow \infty$.

6. Вычисление $\sigma(\xi, q)$

Приводимые здесь вычисления следуют работе [18], так что мы будем краткими. Используя ряд Маклорена

$$\arctan x = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{2m+1},$$

представим сумму из утверждения 1) теоремы 7 при $q = 1$ в виде

$$\begin{aligned} \sum_{p \equiv 2,3 \pmod{5}} \arctan(p^{-\sigma}) &= \frac{1}{4} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{2m+1} \\ &\times \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\mu(n)}{n} \sum_{\chi \pmod{5}} (\bar{\chi}(2) + \bar{\chi}(3)) \log L((2m+1)n\sigma, \chi^n) \right). \end{aligned} \quad (6.1)$$

Во всех случаях, кроме $\chi = \chi_0$ или χ_2 , имеем равенство $\chi(2) + \chi(3) = 0$. Следовательно, сумма по χ в (6.1) приводится к виду

$$2\chi_0(2) \log L((2m+1)n\sigma, \chi_0^n) + 2\chi_2(2) \log L((2m+1)n\sigma, \chi_2^n).$$

Пользуясь тем, что $\chi_2(2) = -1$ и что $\chi_2^n = \chi_0^n$ при четном n , заключаем, что все слагаемые, кроме отвечающих нечетным n , обращаются в нуль. Таким образом, равенство (6.1) принимает в итоге вид

$$\begin{aligned} \sum_{p \equiv 2,3 \pmod{5}} \arctan(p^{-\sigma}) &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} \\ &\times \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ нечетно}}}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \left(\log L((2m+1)n\sigma, \chi_0) - \log L((2m+1)n\sigma, \chi_2) \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa(n)}{n} (\log L(n\sigma, \chi_0) - \log L(n\sigma, \chi_2)) := B(\sigma), \end{aligned} \quad (6.2)$$

где $\kappa(1) = 1$, а $\kappa(n) = 0$ за исключением тех случаев, когда все простые делители n сравнимы с $3 \pmod{4}$, и в этих случаях $\kappa(n) = (-1)^{\Omega(n)} \cdot 2^{\omega(n)}$, где $\Omega(n)$ обозначает число всех простых делителей n , а $\omega(n)$ – число различных простых делителей n .

Для того чтобы найти численное значение этого выражения, разложим логарифмы, используя дзета-функцию Гурвица

$$\zeta(s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^s},$$

так что

$$\begin{aligned} L(s, \chi_0) &= \frac{1}{5^s} \left\{ \zeta\left(s, \frac{1}{5}\right) + \zeta\left(s, \frac{2}{5}\right) + \zeta\left(s, \frac{3}{5}\right) + \zeta\left(s, \frac{4}{5}\right) \right\}, \\ L(s, \chi_2) &= \frac{1}{5^s} \left\{ \zeta\left(s, \frac{1}{5}\right) - \zeta\left(s, \frac{2}{5}\right) - \zeta\left(s, \frac{3}{5}\right) + \zeta\left(s, \frac{4}{5}\right) \right\}. \end{aligned}$$

При фиксированном $q \geq 1$ можно затем найти численные значения корней уравнения (см. теорему 7)

$$B(\sigma) - \sum_{\substack{p \equiv 2, 3 \pmod{5} \\ p|q}} \arctan(p^{-\sigma}) = \frac{\pi}{2} - |\theta|$$

для различных θ , что и даст в итоге значение величины $\sigma(\xi, q)$ (здесь $B(\sigma)$ определяется равенством (6.2)).

Таблица 1 дает значения $\sigma(\xi, 1)$ для некоторых ξ между 0 и 3.9 с точностью до шести десятичных знаков. Они были найдены с помощью быстро сходящегося ряда (6.2) с $n \leq 100$ и с точностью в 20 десятичных знаков. Можно заметить, что эти значения устойчиво возрастают по мере возрастания ξ . Действительно, прикидка с первыми тремя членами уравнения

$$f(s, \xi) = 1 + \frac{\xi}{2^s} - \frac{\xi}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \dots = 0$$

показывает, что

$$\sigma(\xi, 1) = \frac{\log |\xi|}{\log 2} + O(|\xi|^{1-\log 3/\log 2}).$$

Приведем теперь несколько значений $\sigma(\xi, q)$, отвечающих $\xi = \tau_{\pm} := -\phi \pm \sqrt{1 + \phi^2}$, где $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$ – золотое сечение. Эти специальные значения рассматриваются здесь в силу их исторической важности, поскольку соответствующие ряды Дирихле имеют функциональные уравнения, подобные функциональным уравнениям L -функций Дирихле, отвечающих характерам $\bmod 5$, что было явно установлено Титчмаршем [10] (хотя это и не является важным для нашего исследования нулей с большими вещественными частями).

Если $\tau_- = -\phi - \sqrt{1 + \phi^2}$, то $\sigma(\tau_-, 1) = 2.3822861089\dots$ и, как ожидалось, при отсеивании каких-либо простых чисел мы наблюдаем сдвиг влево. Так, $\sigma(\tau_-, 2) = 1.5883190703\dots$, что является очень заметным сдвигом, однако образовавшийся разрыв сокращается довольно быстро (приводимые значения даны с шестью знаками после запятой):

$$\begin{aligned} \sigma(\tau_-, 2) &= 1.588319, & \sigma(\tau_-, 3) &= 2.014404, & \sigma(\tau_-, 7) &= 2.339463, \\ \sigma(\tau_-, 13) &= 2.372887, & \dots, & & \sigma(\tau_-, 1) &= 2.382286. \end{aligned}$$

Таблица 1

ξ и $\sigma(\xi, 1)$							
0.0	1.067026	0.1	1.082603	0.2	1.101581	0.3	1.124217
0.4	1.150610	0.5	1.180694	0.6	1.214246	0.7	1.250912
0.8	1.290259	0.9	1.331807	1.0	1.375076	1.1	1.419604
1.2	1.464974	1.3	1.510823	1.4	1.556839	1.5	1.602767
1.6	1.648402	1.7	1.693579	1.8	1.738175	1.9	1.782096
2.0	1.825273	2.1	1.867660	2.2	1.909226	2.3	1.949953
2.4	1.989835	2.5	2.028874	2.6	2.067077	2.7	2.104456
2.8	2.141024	2.9	2.176803	3.0	2.211810	3.1	2.246067
3.2	2.279595	3.3	2.312416	3.4	2.344551	3.5	2.376023
3.6	2.406853	3.7	2.437062	3.8	2.466670	3.9	2.495697

В случае постоянной Титчмарша $\tau_+ = -\phi + \sqrt{1 + \phi^2}$ находим:

$$\begin{aligned} \sigma(\tau_+, 2) &= 1.046712, & \sigma(\tau_+, 3) &= 1.063679, & \sigma(\tau_+, 7) &= 1.093482, \\ \sigma(\tau_+, 13) &= 1.106200, & \dots, & & \sigma(\tau_+, 1) &= 1.120362. \end{aligned}$$

7. Локализация больших коэффициентов ряда $1/f(s)$

В настоящем разделе условие “ ξ – вещественное число” мы опускаем.

7.1. Случай одного простого. Вопрос о том, какие именно коэффициенты ряда $1/f(s)$ являются большими, оказывается более тонким и приводит к другим интересным задачам. Здесь мы подробно рассмотрим случай линейной комбинации двух L -рядов mod 5, заданной равенством (5.2), а именно

$$f(s, \xi; \psi) = \frac{1}{2} \sec(\theta) (L(s, \chi_1 \psi) e^{-i\theta} + L(s, \overline{\chi_1} \psi) e^{i\theta}),$$

где $\xi = \tan(\theta)$, причем θ определяется mod π .

Если вполне мультипликативная функция ψ принимает на всех простых числах $p \equiv 2, 3 \pmod{5}$ значения с условием $|\psi(p)| = 1$ (значения на всех остальных простых числах не играют роли), то в силу теоремы 8 в случае, когда ξ – вещественное число, а $\mathcal{P}$ – произвольное множество простых чисел, точная верхняя грань $\sigma(\xi, \mathcal{P})$ вещественных частей нулей $f(s, \xi; \psi)$ не зависит от мультипликативной функции ψ и равна значению $\sigma > 1$, которое определяется уравнением

$$\sum_{\substack{p \equiv 2, 3 \pmod{5} \\ p \in \mathcal{P}}} \arctan(p^{-\sigma}) = \frac{\pi}{2} - |\theta|.$$

С помощью теоремы 9 удастся выяснить, какое влияние на $\sigma(\xi, 1)$ оказывает отсеивание (как в обычном решете) конечного множества простых чисел. Можно также исследовать и поведение величины $\sigma(\xi, \mathcal{P})$ при растущем множестве $\mathcal{P}$. Если множество $\mathcal{P}$ конечно, то мы можем применить иной прямой

подход к задаче нахождения не только $\sigma(\xi, \mathcal{P})$, но и больших коэффициентов соответствующей обратной функции. Разумеется, здесь имеет смысл рассматривать лишь простые $p \equiv 2, 3 \pmod{5}$.

Итак, пусть $\mathcal{P}$ – конечное множество простых чисел и $\langle \mathcal{P} \rangle$ – мультипликативная полугруппа (с тождеством), порожденная элементами $\mathcal{P}$. Будем использовать символ $\psi_{\mathcal{P}}$ для обозначения мультипликативной функции, принимающей значение 1 на $\langle \mathcal{P} \rangle$ и 0 в противном случае; тогда

$$f(s, \xi; \psi_{\mathcal{P}}) = \sum_{n \in \langle \mathcal{P} \rangle} \frac{a(n, \xi)}{n^s}.$$

Соответственно, будем иметь:

$$\frac{1}{f(s, \xi; \psi_{\mathcal{P}})} = \sum_{n \in \langle \mathcal{P} \rangle} \frac{b(n, \xi)}{n^s}.$$

Если множество $\mathcal{P}$ состоит из единственного простого числа, $\mathcal{P} = \{p\}$, то задача становится тривиальной. Как уже отмечалось выше (см. (5.6)), если $p \equiv 2 \pmod{5}$, то

$$f(s, \xi; \psi_{\{p\}}) = \left(1 + \frac{\xi}{p^s} - \frac{1}{p^{2s}} - \frac{\xi}{p^{3s}}\right) \left(1 - \frac{1}{p^{4s}}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{1}{p^{2s}}\right)^{-1} \left(1 + \frac{\xi}{p^s}\right);$$

если же $p \equiv 3 \pmod{5}$, то в вышеприведенной формуле следует заменить ξ на $-\xi$, поэтому в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением лишь случая, когда $p \equiv 2 \pmod{5}$. Отсюда сразу следует, что $b(p, \xi) = -\xi$ и

$$b(p^h, \xi) = (-1)^h (1 + \xi^{-2}) \xi^h$$

при $h \geq 2$. Отсюда и из (3.9) вытекает, что

$$\sigma(\xi; \{p\}) = \frac{\max(0, \log |\xi|)}{\log p}, \quad (7.1)$$

так что, например, в случае $\xi = \tau_-$ имеем $\sigma(\xi, \{2\}) = 1.815635685262844\dots$. Другой поучительный способ получения этого же результата, пригодный и в случае комплексного ξ , состоит в следующем. Имеем:

$$a(p^h, \xi) = \begin{cases} 1, & \text{если } h \equiv 0 \pmod{4}, \\ \xi, & \text{если } h \equiv 1 \pmod{4}, \\ -1, & \text{если } h \equiv 2 \pmod{4}, \\ -\xi, & \text{если } h \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases} \quad (7.2)$$

Воспользуемся теперь формулой обращения Мёбиуса (3.3), которая имеет в нашем случае вид

$$b(p^0, \xi) = 1, \\ \sum_{j=0}^n a(p^{n-j}, \xi) b(p^j, \xi) = 0 \quad (n \geq 1)$$

и приводит к рекуррентному соотношению для $b(p^n, \xi)$. Для упрощения записи удобно ввести обозначения

$$c(h) := a(p^h, \xi), \quad x(h) := b(p^h, \xi),$$

в которых формула обращения Мёбиуса примет вид

$$\sum_{j=0}^n c(n-j)x(j) = 0 \quad (n \geq 1),$$

отметить, что $c(h)$ является периодической функцией с периодом 4, и собрать вместе слагаемые, отвечающие одному и тому же значению $j \bmod 4$. Положим для краткости

$$X_i(k) = \sum_{j=0}^k x(4j+i) \quad (i = 0, 1, 2, 3).$$

Тогда приведенные выше рекуррентные формулы распадаются на четыре класса, в зависимости от класса вычетов $n \bmod 4$:

$$\begin{aligned} X_0(k) + \xi X_1(k-1) - X_2(k-1) - \xi X_3(k-1) &= 0, \\ -\xi X_0(k) + X_1(k) + \xi X_2(k-1) - X_3(k-1) &= 0, \\ -X_0(k) - \xi X_1(k) + X_2(k) + \xi X_3(k-1) &= 0, \\ \xi X_0(k) - X_1(k) - \xi X_2(k) + X_3(k) &= 0. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Введем в рассмотрение две матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\xi & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -\xi & 1 & 0 \\ \xi & -1 & -\xi & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & \xi & -1 & -\xi \\ 0 & 0 & \xi & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \xi \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.4)$$

такие, что $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ является циклической матрицей, порожденной $(1, \xi, -1, -\xi)$. Вектор-столбец $\mathbf{X}(k)$ определим как

$$\mathbf{X}(k) = \begin{pmatrix} X_0(k) \\ X_1(k) \\ X_2(k) \\ X_3(k) \end{pmatrix}. \quad (7.5)$$

Аналогично, определим вектор-столбец

$$\mathbf{x}(k) = \begin{pmatrix} x_0(4k) \\ x_1(4k+1) \\ x_2(4k+2) \\ x_3(4k+3) \end{pmatrix}. \quad (7.6)$$

В этих обозначениях формула обращения Мёбиуса (7.3) принимает вид

$$\mathbf{A}\mathbf{X}(k) + \mathbf{B}\mathbf{X}(k-1) = 0 \quad (k \geq 1).$$

Определим

$$\mathbf{F}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{X}(k)x^k \quad (7.7)$$

– производящую функцию последовательности векторов $\mathbf{X}(k)$. Тогда из уравнения $\mathbf{A}\mathbf{X}(k) + \mathbf{B}\mathbf{X}(k-1) = 0$ следует, что

$$\mathbf{A}(\mathbf{F}(x) - \mathbf{X}(0)) + x\mathbf{B}\mathbf{F}(x) = 0,$$

откуда

$$\mathbf{F}(x) = (\mathbf{A} + x\mathbf{B})^{-1} \cdot \mathbf{A}\mathbf{X}(0).$$

Также отметим, что производящая функция $\sum \mathbf{x}(k)x^k$ векторов $\mathbf{x}(k)$ задается равенством

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}(k)x^k = (1-x)\mathbf{F}(x).$$

Простой подсчет теперь показывает, что

$$\det(\mathbf{A} + \mathbf{B}x) = (1-x)^2(1-\xi^4x).$$

Таким образом, радиус сходимости ряда $\mathbf{F}(x)$ равен $\min(1, |\xi|^{-4})$. Итак, имеется по меньшей мере одна прогрессия вида $4k + i \bmod 4$, для всех членов которой

$$b(p^{4k+i}, \xi; \psi_{\{p\}}) \sim c\xi^{4k}$$

при некотором постоянном $c \neq 0$, при условии, что $|\xi| > 1$. Так получается еще одно доказательство равенства (7.1).

7.2. Случай двух простых. Займемся теперь случаем, когда множество $\mathcal{P} = \{p, q\}$ состоит из двух простых чисел $p \equiv 2 \bmod 5$ и $q \equiv 3 \bmod 5$; все прочие пары классов вычетов $\bmod 5$ рассматриваются аналогично. Мы получим явное выражение для $\sigma(\xi, \{p, q\})$ и, кроме того, выясним, когда коэффициенты обратного ряда $1/f(s, \xi; \psi_{\{p, q\}})$ достигают своих наибольших значений по абсолютной величине. Снова воспользуемся формулой обращения Мёбиуса, хотя это и потребует теперь больших усилий.

Классы вычетов, которым принадлежат числа $2^i \bmod 5$ при $i \equiv 0, 1, 2, 3 \bmod 4$, есть $1, 2, 4, 3$; классы вычетов, которым принадлежат числа $3^i \bmod 5$ при $i \equiv 0, 1, 2, 3 \bmod 4$, суть $1, 3, 4, 2$.

Полагая

$$c(h, k) := a(p^h q^k, \xi), \quad x(h, k) := b(p^h q^k, \xi),$$

формулу обращения Мёбиуса запишем в виде

$$\sum_{i=0}^m \sum_{l=0}^n c(m-i, n-l)x(i, l) = 0 \quad (m+n \geq 1), \quad (7.8)$$

заметим, что $c(m, n)$ периодична как по m , так и по n с периодом 4, и соберем вместе члены с (m, n) , отвечающим одному классу вычетов $\bmod 4$.

Положим для краткости

$$X_{u,v}(h, k) = \sum_{j=0}^h \sum_{l=0}^k x(4j + u, 4l + v) \quad (u, v = 0, 1, 2, 3),$$

и пусть $\mathbf{X}(h, k)$ обозначает 16-мерный вектор-столбец

$$\mathbf{X}(h, k) = (X_{u,v}(h, k))_{u,v},$$

компоненты которого занумерованы парами (u, v) в некотором порядке.

Ниже мы будем пользоваться стандартным лексикографическим упорядочением, придерживаясь правила $0 \prec 1 \prec 2 \prec 3$. Подобным образом определим $\mathbf{x}(h, k)$ как 16-мерный вектор

$$\mathbf{x}(h, k) = (x(4h + u, 4k + v)),$$

компоненты которого занумерованы парами (u, v) .

Положим $m = 4h + a$, $n = 4k + b$ ($a, b = 0, 1, 2, 3$) и перепишем соотношение (7.8) в виде

$$\begin{aligned} & \sum_{u \leq a, v \leq b} c(a - u, b - v) X_{u,v}(h, k) + \sum_{u > a, v \leq b} c(a - u, b - v) X_{u,v}(h - 1, k) \\ & + \sum_{u \leq a, v > b} c(a - u, b - v) X_{u,v}(h, k - 1) \\ & + \sum_{u > a, v > b} c(a - u, b - v) X_{u,v}(h - 1, k - 1) = 0, \end{aligned} \quad (7.9)$$

где $u, v \in \{0, 1, 2, 3\}$. Так получим 16 линейных соотношений. Запишем теперь (7.9) в матричной форме, используя следующие матрицы размера 16×16 , элементы которых занумерованы парами $((a, b), (u, v))$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= (c(a - u, b - v) \chi_{[u \leq a, v \leq b]}), & \mathbf{B} &= (c(a - u, b - v) \chi_{[u > a, v \leq b]}), \\ \mathbf{C} &= (c(a - u, b - v) \chi_{[u \leq a, v > b]}), & \mathbf{D} &= (c(a - u, b - v) \chi_{[u > a, v > b]}). \end{aligned}$$

В этих равенствах характеристическая функция $\chi_{[\dots]}$ равна 1, если u и v удовлетворяют указанным неравенствам, $u, v = 0, 1, 2, 3$, и равна 0 в противном случае.

В итоге для любых $h, k \geq 1$ получим уравнение

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}(h, k) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{X}(h - 1, k) + \mathbf{C} \cdot \mathbf{X}(h, k - 1) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{X}(h - 1, k - 1) = 0,$$

которое наводит на мысль рассмотреть производящую функцию двух переменных

$$\mathbf{F}(x, y) := \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{X}(h, k) x^h y^k$$

и переписать предыдущее равенство в виде

$$(\mathbf{A} + x\mathbf{B} + y\mathbf{C} + xy\mathbf{D}) \cdot \mathbf{F}(x, y) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}(0, 0). \quad (7.10)$$

Заметим также, что производящий ряд для векторов $\mathbf{x}(h, k)$ имеет вид

$$\sum_{h=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}(h, k) x^h y^k = (1-x)(1-y) \mathbf{F}(x, y). \quad (7.11)$$

Для того чтобы явно выписать матрицу

$$\mathbf{K} := (c(a-u, b-v)) = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} + \mathbf{D},$$

нам потребуются следующие четыре матрицы:

$$\mathbf{Z}_0 = \begin{pmatrix} 1 & \xi & -1 & -\xi \\ -\xi & 1 & \xi & -1 \\ -1 & -\xi & 1 & \xi \\ \xi & -1 & -\xi & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Z}_1 = \begin{pmatrix} -\xi & 1 & \xi & -1 \\ -1 & -\xi & 1 & \xi \\ \xi & -1 & -\xi & 1 \\ 1 & \xi & -1 & -\xi \end{pmatrix}, \quad (7.12)$$

$$\mathbf{Z}_2 = \begin{pmatrix} -1 & -\xi & 1 & \xi \\ \xi & -1 & -\xi & 1 \\ 1 & \xi & -1 & -\xi \\ -\xi & 1 & \xi & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Z}_3 = \begin{pmatrix} \xi & -1 & -\xi & 1 \\ 1 & \xi & -1 & -\xi \\ -\xi & 1 & \xi & -1 \\ -1 & -\xi & 1 & \xi \end{pmatrix}.$$

Матрица $\mathbf{K}$, записанная посредством блочных матричных элементов, является циклической, а именно,

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_0 & \mathbf{Z}_1 & \mathbf{Z}_2 & \mathbf{Z}_3 \\ \mathbf{Z}_3 & \mathbf{Z}_0 & \mathbf{Z}_1 & \mathbf{Z}_2 \\ \mathbf{Z}_2 & \mathbf{Z}_3 & \mathbf{Z}_0 & \mathbf{Z}_1 \\ \mathbf{Z}_1 & \mathbf{Z}_2 & \mathbf{Z}_3 & \mathbf{Z}_0 \end{pmatrix}, \quad (7.13)$$

так что $\mathbf{K}$ имеет вид

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & \xi & -1 & -\xi & -\xi & 1 & \xi & -1 & -1 & -\xi & 1 & \xi & \xi & -1 & -\xi & 1 \\ -\xi & 1 & \xi & -1 & -1 & -\xi & 1 & \xi & \xi & -1 & -\xi & 1 & 1 & \xi & -1 & -\xi \\ -1 & -\xi & 1 & \xi & \xi & -1 & -\xi & 1 & 1 & \xi & -1 & -\xi & -\xi & 1 & \xi & -1 \\ \xi & -1 & -\xi & 1 & 1 & \xi & -1 & -\xi & -\xi & 1 & \xi & -1 & -1 & -\xi & 1 & \xi \\ \xi & -1 & -\xi & 1 & 1 & \xi & -1 & -\xi & -\xi & 1 & \xi & -1 & -1 & -\xi & 1 & \xi \\ 1 & \xi & -1 & -\xi & -\xi & 1 & \xi & -1 & -1 & -\xi & 1 & \xi & \xi & -1 & -\xi & 1 \\ -\xi & 1 & \xi & -1 & -1 & -\xi & 1 & \xi & \xi & -1 & -\xi & 1 & 1 & \xi & -1 & -\xi \\ -1 & -\xi & 1 & \xi & \xi & -1 & -\xi & 1 & 1 & \xi & -1 & -\xi & -\xi & 1 & \xi & -1 \\ -1 & -\xi & 1 & \xi & \xi & -1 & -\xi & 1 & 1 & \xi & -1 & -\xi & -\xi & 1 & \xi & -1 \\ \xi & -1 & -\xi & 1 & 1 & \xi & -1 & -\xi & -\xi & 1 & \xi & -1 & -1 & -\xi & 1 & \xi \\ 1 & \xi & -1 & -\xi & -\xi & 1 & \xi & -1 & -1 & -\xi & 1 & \xi & \xi & -1 & -\xi & 1 \\ -\xi & 1 & \xi & -1 & -1 & -\xi & 1 & \xi & \xi & -1 & -\xi & 1 & 1 & \xi & -1 & -\xi \\ -\xi & 1 & \xi & -1 & -1 & -\xi & 1 & \xi & \xi & -1 & -\xi & 1 & 1 & \xi & -1 & -\xi \\ -1 & -\xi & 1 & \xi & \xi & -1 & -\xi & 1 & 1 & \xi & -1 & -\xi & -\xi & 1 & \xi & -1 \\ \xi & -1 & -\xi & 1 & 1 & \xi & -1 & -\xi & -\xi & 1 & \xi & -1 & -1 & -\xi & 1 & \xi \\ 1 & \xi & -1 & -\xi & -\xi & 1 & \xi & -1 & -1 & -\xi & 1 & \xi & \xi & -1 & -\xi & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix}
 0 & \xi & -1 & -\xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \xi & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & -\xi & 1 & 0 & \xi & -1 & -\xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & -\xi & 0 & 0 & \xi & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -\xi & 1 & \xi & 0 & -1 & -\xi & 1 & 0 & \xi & -1 & -\xi & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -\xi & 1 & 0 & 0 & -1 & -\xi & 0 & 0 & \xi & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\xi & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & \xi & -1 & 0 & -\xi & 1 & \xi & 0 & -1 & -\xi & 1 & 0 & \xi & -1 & -\xi \\
 0 & 0 & 1 & \xi & 0 & 0 & -\xi & 1 & 0 & 0 & -1 & -\xi & 0 & 0 & \xi & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\xi & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \xi \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & -1 & 0 & -\xi & 1 & \xi & 0 & -1 & -\xi & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & 0 & 0 & -\xi & 1 & 0 & 0 & -1 & -\xi \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\xi & 0 & 0 & 0 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & -1 & 0 & -\xi & 1 & \xi \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & 0 & 0 & -\xi & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\xi \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix}.$$

В следующем п. 7.3 мы обратим равенство (7.10) и воспользуемся явными выражениями матриц $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ для того, чтобы определить правильный порядок роста коэффициентов ряда Дирихле, носитель которого ограничен полугруппой $\langle p, q \rangle$.

7.3. Максимальные коэффициенты: предварительная подготовка.

Здесь мы определим максимальный порядок роста сумм $X_{u,v}(h, k)$. Оказывается, что, за исключением некоторых очень специфических случаев, максимальный порядок роста этих сумм достигается тогда, когда отношение h/k стремится к некоторому особому пределу. Это дает еще одно объяснение того

факта, что наибольшие значения величин $b(n, \xi; \mathcal{P})$ достигаются на очень редкой последовательности чисел n , разложение которых на простые сомножители определяется асимптотически достаточно точно.

Согласно (7.10), имеем:

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{(\mathbf{A} + x\mathbf{B} + y\mathbf{C} + xy\mathbf{D})^*}{\det(\mathbf{A} + x\mathbf{B} + y\mathbf{C} + xy\mathbf{D})} \cdot \mathbf{X}(0, 0), \quad (7.14)$$

где $\mathbf{M}^*$ обозначает матрицу, составленную из алгебраических дополнений матрицы $\mathbf{M}$. Вычисления показывают, что

$$\det(\mathbf{A} + x\mathbf{B} + y\mathbf{C} + xy\mathbf{D}) = (1 - x)^8(1 - y)^8 f(x, y),$$

где $f(x, y)$ – симметричный полином вида

$$\begin{aligned} f(x, y) := & 1 - 4\xi^4 x - 4\xi^4 y \\ & + 6\xi^8 x^2 - (4 + 64\xi^2 + 240\xi^4 + 320\xi^6 + 124\xi^8)xy + 6\xi^8 y^2 \\ & - 4\xi^{12} x^3 - (124\xi^4 + 640\xi^6 + 1056\xi^8 x^2 y + 640\xi^{10} + 124\xi^{12})x^2 y \\ & - (124\xi^4 + 640\xi^6 + 1056\xi^8 + 640\xi^{10} + 124\xi^{12})xy^2 - 4\xi^{12} y^3 \\ & + \xi^{16} x^4 - (124\xi^8 + 320\xi^{10} + 240\xi^{12} + 64\xi^{14} + 4\xi^{16})x^3 y \\ & + (6 + 128\xi^2 + 992\xi^4 + 3200\xi^6 + 4696\xi^8 + 3200\xi^{10} + 992\xi^{12} + 128\xi^{14} \\ & + 6\xi^{16})x^2 y^2 - (124\xi^8 + 320\xi^{10} + 240\xi^{12} + 64\xi^{14} + 4\xi^{16})xy^3 + \xi^{16} y^4 \\ & - 4\xi^{12} x^4 y - (124\xi^4 + 640\xi^6 + 1056\xi^8 + 640\xi^{10} + 124\xi^{12})x^3 y^2 \\ & - (124\xi^4 + 640\xi^6 + 1056\xi^8 x + 640\xi^{10} + 124\xi^{12})x^2 y^3 - 4\xi^{12} xy^4 \\ & + 6\xi^8 x^4 y^2 - (4 + 64\xi^2 + 240\xi^4 + 320\xi^6 + 124\xi^8)x^3 y^3 + 6\xi^8 x^2 y^4 \\ & - 4\xi^4 x^4 y^3 - 4\xi^4 x^3 y^4 + x^4 y^4. \end{aligned}$$

Таким образом, по формуле Коши для коэффициентов степенного ряда находим, что

$$\mathbf{X}(m, n) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_{|z|=r_1, |w|=r_2} \frac{\mathbf{M}(z, w) \cdot \mathbf{X}(0, 0)}{(1 - z)^8(1 - w)^8 f(z, w)} \frac{dz}{z^{m+1}} \frac{dw}{w^{n+1}}, \quad (7.15)$$

где

$$\mathbf{M}(z, w) = (\mathbf{A} + z\mathbf{B} + w\mathbf{C} + zw\mathbf{D})^*,$$

а r_1, r_2 – произвольные положительные числа с условием $r_1, r_2 < 1$ такие, что $f(z, w) \neq 0$ в поликруге $\{|z| \leq r_1\} \times \{|w| \leq r_2\}$. Заметим, что $\mathbf{M}(z, w)$ – многочлен от переменных z, w , а так как $r_1, r_2 < 1$, то он является функцией, ограниченной некоторой величиной, зависящей от ξ, r_1, r_2 , на любом подходящем контуре интегрирования, лежащем в указанном выше множестве.

Подобным образом убеждаемся, что

$$\mathbf{x}(m, n) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_{|z|=r_1, |w|=r_2} \frac{\mathbf{M}(z, w) \cdot \mathbf{x}(0, 0)}{(1 - z)^7(1 - w)^7 f(z, w)} \frac{dz}{z^{m+1}} \frac{dw}{w^{n+1}} \quad (7.16)$$

при тех же предположениях относительно r_1, r_2 , что и выше.

Из формулы (7.15) сразу следует оценка

$$\|\mathbf{X}(m, n)\| \leq c_0(\xi, r_1, r_2) r_1^{-m} r_2^{-n},$$

где $c_0(\xi, r_1, r_2)$ – надлежащим образом выбранная постоянная, зависящая лишь от ξ, r_1, r_2 , но не зависящая от m, n . При исследовании интеграла (7.15) мы ограничимся лишь случаем, когда m и n стремятся к бесконечности с одинаковой скоростью. Все эти рассуждения практически без изменений применимы и к исследованию интеграла (7.16).

Итак, чтобы получить наилучшую оценку указанного типа, нам нужно найти минимум выражения $|z|^{-m}|w|^{-n}$ при условии $(1-z)(1-w)f(z, w) = 0$. Также необходимо, чтобы выполнялось условие $|z| < 1$, $|w| < 1$, или $z = 1$, $|w| < 1$, или $|z| < 1$, $w = 1$, или $(z, w) = (1, 1)$.

Если $w = 1$, то необходимо равенство $f(z, 1) = 0$. Так как $f(z, w) = f(w, z)$, то условие, которому удовлетворяет z , должно выполняться и для w .

Поскольку ξ встречается только в четных степенях, то, чтобы упростить формулы, положим $t = \xi^2$. Разлагая многочлен $f(z, 1)$ на множители, получим выражение

$$f(z, 1) = (-1+z)^2(1+t)^4((-1+t)^4 - 2(1+28t+70t^2+28t^3+t^4)z + (-1+t)^4z^2),$$

имеющее корнями числа

$$z_{0,\pm} = \frac{1+28t+70t^2+28t^3+t^4 \pm 8(1+t)(1+6t+t^2)\sqrt{t}}{(-1+t)^4} \quad (7.17)$$

с произведением $z_{0,+}z_{0,-} = 1$, так что один из корней не превосходит по модулю 1. Так получаются две точки $(z_{0,\pm}, 1)$, $(1, z_{0,\pm})$, причем знак $\pm$ выбирается таким образом, чтобы выполнялось неравенство $|z_{0,\pm}| \leq 1$. Этим завершается рассмотрение случая, когда хотя бы одно из чисел z или w равно 1.

Хотя при первом взгляде на задачу нахождения множества точек, в которых $f(z, w) = 0$, кажется маловероятным, чтобы она допускала явное решение, в нашем случае оказывается возможным сделать несколько значительных упрощений и получить ответ следующим образом. Прежде всего, переходя к логарифмам, заключаем, что достаточно максимизировать выражение

$$\frac{m}{2} \log |z|^2 + \frac{n}{2} \log |w|^2$$

при ограничении $f(z, w) = 0$. Применим метод множителей Лагранжа. Вообще говоря, нам нужно было бы работать с четырьмя переменными $z, \bar{z}, w, \bar{w}$ и двумя ограничениями вида $f(z, w) = 0$ и $\bar{f}(\bar{z}, \bar{w}) = 0$. Однако уравнения, содержащие частные производные $\partial_{\bar{z}}, \partial_{\bar{w}}$, эквивалентны уравнениям с производными ∂_z, ∂_w , так что в итоге мы оставляем лишь один множитель и систему уравнений

$$\frac{m}{2z} + \lambda f_z(z, w) = 0, \quad \frac{n}{2w} + \lambda f_w(z, w) = 0 \quad (7.18)$$

с частными производными f_z, f_w . Избавляясь от λ , получим:

$$nzf_z(z, w) - mwf_w(z, w) = 0. \quad (7.19)$$

К этому уравнению нам необходимо еще добавить уравнение $f(z, w) = 0$. Таким образом, избавляясь от переменной w , мы получаем одно уравнение относительно z , а избавляясь от z , получим одно уравнение относительно w . Результат двух полиномов $f(z, w)$ и $nzf_z(z, w) - mwf_w(z, w)$, рассматриваемых как функции от w , допускает следующее замечательное разложение на множители:

$$\begin{aligned} \text{resultant}(f, nzf_z - mwf_w; w) &= -2^{28}t^6(1+t)^{12} \\ &\times (t^2 - z)^3(1-z)^2z^3(1-t^2z)^3(1+(2+8t+4t^2)z+z^2)^2 \\ &\times (t^2 - (1+8t+16t^2+8t^3+t^4)z+t^2z^2)^2(t^2+(4+8t+2t^2)z+t^2z^2)^2 \\ &\times (4t^2+(1+4t-2t^2+4t^3+t^4)z+4t^2z^2)^2 \\ &\times (m^4t^2 - P(m, n)z + m^4t^2z^2), \end{aligned} \quad (7.20)$$

где

$$P(m, n) = (m-n)^4 + 4(m-n)^2n^2t - (4m^2-6n^2)n^2t^2 + 4(m+n)^2n^2t^3 + (m+n)^4t^4.$$

Так как $f(z, w)$ симметрична по своим аргументам, то результат многочленов как функций z получается заменой z на w и m на n . Оба эти результата, выраженные через z и w соответственно, должны обращаться в нуль для всякой пары (z, w) , являющейся решением нашей экстремальной задачи.

7.4. Анализ уравнений. В разложении результата присутствуют сомножители, не зависящие от m, n . Они приводят к некоторым подслучаям, рассмотрение которых проводится следующим образом.

Значение $t = -1$ отвечает L -рядам Дирихле с характеристиками χ_1 и χ_3 .

Значение $t = 0$ также приводит к особому случаю, так как здесь $f(x, y)$ приводится к виду

$$f(z, w) = 1 - 4zw + 6z^2w^2 - 4z^3w^3 + z^4w^4 = (1 - zw)^4$$

и, следовательно, уравнение $f(z, w) = 0$ не имеет решений при $|z| < 1$, $|w| < 1$.

Наличие в разложении результата множителей, не зависящих от m, n , объясняется наличием особых точек на плоской кривой $f(x, y) = 0$. Исследуем теперь уравнения, порождаемые этими множителями. Положим для простоты

$$g(z, w) := nzf_x(z, w) - mwf_w(z, w).$$

Прежде всего, так как $f(x, y)$ симметрична, то $f_x(z, w) = f_y(z, w)$, и мы заключаем, что

$$\begin{aligned} f(z, z) &= -(-1+z)^2(-1+2z+16tz+16t^2z-z^2)(1+2z+8tz+4t^2z+z^2)^2, \\ f_x(z, z) &= f_y(z, z) = -4(-1+z)(1+2z+8tz+4t^2z+z^2) \\ &\times (-t^2-z-16tz-59t^2z-72t^3z-24t^4z+z^2 \\ &+ 24tz^2+97t^2z^2+120t^3z^2+40t^4z^2+z^3+8tz^3+11t^2z^3-z^4). \end{aligned}$$

Таким образом, точки (z^*, z^*) , где z^* является решением уравнения $1+2z+8tz+4t^2z+z^2=0$, являются особыми точками кривой $f(x, y) = 0$.

Если вместо этого рассмотреть уравнение $-1 + 2z + 16tz + 16t^2z - z^2 = 0$, то, беря результат (по z) со вторым нетривиальным полиномом в разложении $f_x(z, z)$, получим полином

$$256t^2(1+t)^4(1+2t)^2(1+5t)^2,$$

и теперь остается лишь проследить за тем, что происходит в особых случаях $t = -1/2$ и $t = -1/5$. Однако здесь абсолютные значения z равны 1, так что оба случая можно исключить. Этим завершается разбор случаев одновременного обращения в нуль полиномов $f(z, w)$ и $g(z, w)$ при $z = w$.

Следующее замечание состоит в том, что множитель $1 - t^2z$ в результате, появляющийся из равенства $f(z, 0) = (1 - t^2z)^4$, отвечает одномерной рекурсии, возникающей в случае, когда мы полагаем во всех соотношениях $n = 0$, что согласуется с тем, что мы видели ранее.

Все остальные возможные значения z, w таковы:

$$z = \begin{cases} t^2, t^{-2} & \text{для множителей } t^2 - z, 1 - t^2z, \\ z_{1,\pm} & \text{для множителя } 1 + (2 + 8t + 4t^2)z + z^2, \\ z_{2,\pm} & \text{для множителя } t^2 - (1 + 8t + 16t^2 + 8t^3 + t^4)z + t^2z^2, \\ z_{3,\pm} & \text{для множителя } t^2 + (4 + 8t + 2t^2)z + t^2z^2, \\ z_{4,\pm} & \text{для множителя } 4t^2 + (1 + 4t - 2t^2 + 4t^3 + t^4)z + 4t^2z^2, \end{cases} \quad (7.21)$$

и такие же равенства с w вместо z . Явные выражения для корней $z_{i,\pm}$ даются равенствами

$$z_{1,\pm} = -1 - 4t - 2t^2 \pm 2(1+t)\sqrt{t(2+t)}, \quad (7.22)$$

$$z_{2,\pm} = \frac{1 + 8t + 16t^2 + 8t^3 + t^4 \pm (1+t)(1+4t+t^2)\sqrt{1+6t+t^2}}{2t^2}, \quad (7.23)$$

$$z_{3,\pm} = -\frac{2 + 4t + t^2 \pm 2(1+t)\sqrt{1+2t}}{t^2}, \quad (7.24)$$

$$z_{4,\pm} = -\frac{1 + 4t - 2t^2 + 4t^3 + t^4 \pm (-1+t)(1+t)^2\sqrt{1+6t+t^2}}{8t^2}. \quad (7.25)$$

Заметим, что $z_{i,+}z_{i,-} = 1$ при $i = 1, 2, 3, 4$.

Для упрощения записи будем использовать обозначения z^* и w^* для z или w , равных $z_{i,\pm}$.

Точки $(z^*, w^*) = (z_{1,\pm}, z_{1,\pm}), (z_{2,\pm}, z_{4,\mp}), (z_{3,\pm}, z_{3,\mp}), (z_{4,\pm}, z_{2,\mp})$ являются особыми точками кривой $f(x, y) = 0$ при любом значении t . Будем называть их общими особенностями кривой $f(x, y) = 0$.

Предположим теперь, что линейная форма $L(m, n)$, определяемая равенством $L(m, n) := g(z^*, w^*)$, не равна тождественно нулю. Тогда для любых m, n по крайней мере одно из чисел $L(m, n)$, $L(m+1, n)$, $L(m, n+1)$ отлично от нуля. Так как замена m на $m+1$ или n на $n+1$ не повлияет на порядок величины верхней границы интегралов, то этот случай мы можем исключить из рассмотрения. Если же линейная форма $L(m, n)$ есть тождественный нуль, то $f_x(z^*, w^*) = f_y(z^*, w^*) = 0$, точка (z^*, w^*) является, таким образом, особой точкой кривой $f(x, y) = 0$, и нам остается лишь проверить, что $f(z^*, w^*) = 0$.

Случай I: $z = t^2$. Нам необходимо рассмотреть лишь случай, когда $|t| < 1$. Уравнение $f(t^2, w) = 0$ имеет три корня

$$w \in \left\{ \frac{(1-t)^4}{16t^2}, -\frac{(\pm i - t)^4}{4t^2} \right\}.$$

Необходимо проверить, при каких из перечисленных выше w выражение $nt^2 f_z(t^2, w) - mwf_w(t^2, w)$ обращается в нуль. Для первого из значений w получаем уравнение

$$2^{-5}(1-t)^3(1+t)^6(-2m+n+(2m+n)t) \times ((5-2t+t^2)(5-6t+5t^2)(1-2t+5t^2)) = 0.$$

Абсолютные значения всех корней уравнения

$$(5-2t+t^2)(5-6t+5t^2) = 0$$

не меньше 1, так что их можно исключить. Таким образом, остаются уравнения

$$1-2t+5t^2 = 0, \quad (7.26)$$

$$-2m+n+(2m+n)t = 0. \quad (7.27)$$

Вторая возможность отпадает по той же причине, что указана выше, так что остаются лишь

$$t = \frac{1 \pm 2i}{5}.$$

При таком t мы убеждаемся, что $w = (1-t)^4/(16t^2) = t^2$.

Все прочие возможности для w приводят лишь к ненулевым линейным формам $L(m, n)$, так что эти случаи не нуждаются в рассмотрении.

Таким образом, мы показали, что в случае I единственным допустимым решением является

$$t = \frac{1 \pm 2i}{5} : \quad (z^*, w^*) = (t^2, t^2).$$

Однако для этого значения t справедливо равенство $(z, w) = (z_{1,+}, z_{1,+})$, так что мы имеем дело с разновидностью общей особенности.

Случай II: $z = t^{-2}$. Разбор этого случая проводится так же, как и в случае I. При замене $t \rightarrow 1/t$, $w \rightarrow 1/w$ уравнения для w , за исключением $w = 0$, переходят в те уравнения, что имели место в случае I. Уравнения же $z = 0$ или $w = 0$ не доставляют максимума в нашей задаче (если $m > 0$ или $n > 0$), так что могут быть оставлены без внимания. Итак, мы заключаем, что в случае II единственным подходящим решением будет

$$t = 1 \pm 2i : \quad (z, w) = (t^2, t^{-2}) \text{ или } (t^{-2}, t^2).$$

Однако и эта точка является разновидностью общей особенности $(z_{3,\pm}, z_{3,\mp})$.

Случай III: $z^*, w^* \in \{z_{i,\pm}\}$ и (z^*, w^*) не являются общими особенностями. Напомним, что общими особенностями (т.е. теми, где t остается неопределенной переменной) являются точки вида

$$(z_{1,+}, z_{1,+}), \quad (z_{2,+}, z_{4,-}), \quad (z_{3,+}, z_{3,-})$$

и те, что получаются из них симметричной перестановкой координат и переменной знаков $+$, $-$. Заметим, однако, что нет необходимости рассматривать отдельно каждую из точек $(z_{i,\pm}, z_{i,\mp})$, поскольку $z_{i,+}z_{i,-} = 1$, в то время как мы требуем выполнения условий $|z| < 1$, $|w| < 1$.

Из соображений симметрии нам следует рассмотреть лишь точки $(z_{i,\pm}, z_{j,\pm})$, для которых $i \leq j$, $t \neq 0$. Переходя к нормам $f(z_{i,\pm}, z_{j,\pm})$ и разлагая их в произведение неприводимых полиномов, получим конечное число уравнений с неизвестной t .

Так, для точек $(z_{1,\pm}, z_{2,\pm})$ и $(z_{1,\pm}, z_{2,\mp})$ получаем:

$$\begin{aligned} -1 + 3t &= 0, & 1 + 5t &= 0, \\ 1 - 4t + 38t^2 + 12t^3 + t^4 &= 0, & 1 + 8t + 10t^2 - 16t^3 + 13t^4 &= 0. \end{aligned} \quad (7.28)$$

Последние два уравнения могут быть отброшены, поскольку приводят к ненулевой линейной форме $L(m, n)$. Если $1 + 5t = 0$, то абсолютные значения $z_{1,\pm}$ и $z_{2,\pm}$ равны 1, так что и этот случай исключается из рассмотрения. Если же $-1 + 3t = 0$, то лишь $z_{1,+}$ и $z_{2,+}$ имеют абсолютные значения, меньшие 1, но в этом случае $f(z_{1,+}, z_{2,+}) \neq 0$, и новых решений не получено.

Для точек $(z_{1,\pm}, z_{3,\pm})$ и $(z_{1,\pm}, z_{3,\mp})$ имеем:

$$1 - 8t + 22t^2 + t^4 = 0, \quad 1 + 22t^2 - 8t^3 + t^4 = 0. \quad (7.29)$$

Этот случай следует отбросить, поскольку он приводит к ненулевой линейной форме $L(m, n)$.

Для точек $(z_{1,\pm}, z_{4,\pm})$ и $(z_{1,\pm}, z_{4,\mp})$ получаем:

$$\begin{aligned} 1 - 3t &= 0, & 1 + 5t &= 0, \\ 1 - 16t + 74t^2 - 24t^3 + 13t^4 &= 0, & 1 + 4t + 54t^2 - 60t^3 + 17t^4 &= 0. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Последние два уравнения отбрасываются, так как приводят к ненулевой линейной форме $L(m, n)$. Если $1 + 5t = 0$, то $z_{1,\pm}$ и $z_{2,\pm}$ по абсолютной величине равны 1, так что и этот случай исключается. Если же $-1 + 3t = 0$, то здесь мы имеем решение $(z^*, w^*) = (z_{1,+}, z_{4,+})$ с условием $z_{1,+} = z_{4,+}$. Однако $z_{1,+} = z_{4,+}$, и найденная точка является разновидностью общей особенности $(z_{1,+}, z_{1,+})$.

В случае точек $(z_{2,\pm}, z_{2,\pm})$ имеем

$$\begin{aligned} 3 + t &= 0, & 1 - 3t &= 0, & 5 + t &= 0, & 1 + 5t &= 0, \\ & & 1 + 6t + t^2 &= 0. \end{aligned} \quad (7.31)$$

Случаи $3 + t = 0$, $-1 + 3t = 0$, $5 + t = 0$ отбрасываются как приводящие к ненулевой линейной форме $L(m, n)$. Если $1 + 5t = 0$, то $z_{2,\pm}$ по абсолютной величине равно 1, так что и этот случай следует отбросить. Если же $1 + 6t + t^2 = 0$, то и здесь величина $z_{2,\pm}$ равна по модулю 1.

Для точек $(z_{2,\pm}, z_{3,\pm})$ и $(z_{2,\pm}, z_{3,\mp})$ получаем

$$\begin{aligned} -3 + t &= 0, & 5 + t &= 0, \\ 1 + 12t - 38t^2 - 4t^3 + t^4 &= 0, & 13 - 16t + 10t^2 + 8t^3 + t^4 &= 0. \end{aligned} \quad (7.32)$$

Последние два уравнения следует отбросить, так как они приводят к ненулевой линейной форме $L(m, n)$. Если $-3 + t = 0$, то мы приходим к решению $(z_{2,+}, z_{3,-})$. В этом случае, однако, $z_{3,-} = z_{4,-}$, так что найденное решение является разновидностью общей особенности $(z_{2,+}, z_{4,-})$. Если $5 + t = 0$, то числа $z_{2,\pm}$ и $z_{3,\pm}$ оба равны по модулю 1, так что и этот случай оказывается бессодержательным.

Для точек $(z_{2,\pm}, z_{4,\pm})$ имеем:

$$\begin{aligned} 1 + 4t + t^2 &= 0, & 1 + 6t + t^2 &= 0, \\ 1 + 5t - 3t^2 + t^3 &= 0, & 1 - 3t + 5t^2 + t^3 &= 0. \end{aligned} \quad (7.33)$$

Последние два уравнения отбрасываются, так как приводят к ненулевой линейной форме $L(m, n)$. Отбрасываются и первые два уравнения, так как в этих случаях числа $z_{2,\pm}$ и $z_{4,\pm}$ равны по модулю 1.

Точки $(z_{3,\pm}, z_{3,\pm})$ приводят к уравнениям

$$1 + 2t = 0, \quad 1 - t + 2t^2 = 0. \quad (7.34)$$

Последнее из них отбрасывается как приводящее к ненулевой линейной форме $L(m, n)$. Если $1 + 2t = 0$, то $z_{3,\pm}$ имеет абсолютное значение, равное 1, так что и этот случай мы исключаем из рассмотрения.

Для точек $(z_{3,\pm}, z_{4,\pm})$ и $(z_{3,\pm}, z_{4,\mp})$ получаем

$$\begin{aligned} -3 + t &= 0, & 5 + t &= 0, \\ 13 - 24t + 74t^2 - 16t^3 + t^4 &= 0, & 17 - 60t + 54t^2 + 4t^3 + t^4 &= 0. \end{aligned} \quad (7.35)$$

Два последних уравнения отбрасываются как приводящие к ненулевой линейной форме $L(m, n)$. Если $5 + t = 0$, то числа $z_{3,\pm}$ и $z_{4,\pm}$ равны по модулю 1. Если $-3 + t = 0$, то лишь две точки $(z_{3,\pm}, z_{4,\mp})$ доставляют обращение в нуль, но и они должны быть отброшены, так как одна из координат превосходит по абсолютной величине 1.

Наконец, для точек $(z_{4,\pm}, z_{4,\pm})$ имеем:

$$\begin{aligned} -1 + 3t &= 0, & 1 + 5t &= 0, \\ 1 - 2t + 13t^2 &= 0, & 13 - 2t + t^2 &= 0. \end{aligned} \quad (7.36)$$

Последние два уравнения приводят к ненулевой линейной форме $L(m, n)$ и поэтому должны быть отброшены. Если $1 + 5t = 0$, то модуль $z_{4,\pm}$ равен 1. Если же $-1 + 3t = 0$, то мы вновь получим разновидность общей особенности $(z_{1,+}, z_{1,+})$.

Суммируя все сказанное, приходим к следующему утверждению.

ЛЕММА 12. Пусть $\xi \neq 0$, $\xi^4 \neq 1$, и пусть m, n – различные натуральные числа. Тогда если достигается максимум выражения $m \log |z| + n \log |w|$ при условиях $f(z, w) = 0$, $|z| < 1$, $|w| < 1$, то это происходит в одной из следующих точек (z, w) , где $t = \xi^2$:

(i) общие особые точки

$$(z_{1,\pm}, z_{1,\pm}), \quad (z_{2,\pm}, z_{4,\mp}), \quad (z_{4,\pm}, z_{2,\mp}),$$

где числа $z_{i,\pm}$ определяются формулами (7.22), (7.23), (7.25);

(ii) пары (z, w) такие, что $f(z, w) = 0$ и

$$m^4 t^2 - P(m, n)z + m^4 t^2 z^2 = 0, \quad n^4 t^2 - P(n, m)w + n^4 t^2 w^2 = 0,$$

где

$$P(m, n) = (m - n)^4 + 4(m - n)^2 n^2 t - (4m^2 - 6n^2) n^2 t^2 + 4(m + n)^2 n^2 t^3 + (m + n)^4 t^4.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 13. В рассматриваемой задаче максимум не достигается, если число ξ слишком мало. Для того, чтобы этот максимум достигался, необходимо, чтобы функция $f(s, \xi; \{p, q\})$, где $p \equiv 2 \pmod{5}$ и $q \equiv 3 \pmod{5}$, имела нуль с вещественной частью, большей 1. Если ξ – вещественное число, то теорема 8 приводит к уравнению

$$\arctan(p^{-\sigma}) + \arctan(q^{-\sigma}) = \frac{\pi}{2} - \arctan(|\xi|),$$

причем его положительный корень должен удовлетворять условию $\sigma > 1$. Беря тангенсы обеих частей, сразу же получаем равносильное уравнение

$$\frac{(pq)^\sigma - 1}{p^\sigma + q^\sigma} = |\xi|.$$

Так, например, если $p = 2$, $q = 3$, а ξ – то вещественное число, то указанное условие принимает вид $|\xi| > 1$. В общем случае, при вещественном ξ мы хотим, чтобы выполнялось неравенство

$$|\xi| > \frac{pq - 1}{p + q}.$$

Если $\xi = \tau_-$ (это – то значение ξ , которое определяет вторую функцию Дэвенпорта–Хейльбронна), то

$$\sigma(\tau_-, \{2, 3\}) = 2.314909762289685 \dots \quad (7.37)$$

7.5. Максимальные коэффициенты: заключение. Завершим исследование поведения коэффициентов ряда $1/f(s, \xi; \{p, q\})$, пользуясь леммой 12 из предыдущего пункта. Докажем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 14. Пусть p, q – простые числа с условием $p \equiv 2 \pmod{5}$, $q \equiv 3 \pmod{5}$; положим

$$f(s, \xi; \{p, q\}) = \sum_{h,k=0}^{\infty} \frac{a(p^h q^k, \xi)}{(p^h q^k)^s}, \quad \frac{1}{f(s, \xi; \{p, q\})} = \sum_{h,k=0}^{\infty} \frac{b(p^h q^k, \xi)}{(p^h q^k)^s}.$$

Определим величины

$$\alpha(u, \xi; \{p, q\}) = \limsup_{h/(h+k) \rightarrow u} \frac{\log |b(p^h q^k, \xi)|}{\log(p^h q^k)} \quad (7.38)$$

и

$$\begin{aligned} z_{\pm}(u) := & (2t^2 u^4)^{-1} \{ (1+t)^4 - 8(1+t)^3 u + 4(1+t)^2 (6+t) u^2 \\ & - 16(1+t)(2+t) u^3 + 2(8+8t+t^2) u^4 \pm \sqrt{(1+t)(1+t-4u+4u^2)} \\ & \times ((1+t)^3 - 6(1+t)^2 u + 2(1+t)(6+t) u^2 - 4(2+t) u^3) \}, \end{aligned} \quad (7.39)$$

где $t = \xi^2$, причем $t \neq 0$.

Тогда справедливо неравенство

$$\alpha(u, \xi; \{p, q\}) \leq -\frac{u \log |r(u)| + (1-u) \log |s(u)|}{4(u \log p + (1-u) \log q)}, \quad (7.40)$$

где $(r(u), s(u))$ – тот элемент из множества

$$(z_{\pm}(u), z_{\pm}(1-u)), (z_{0,\pm}, 1), (1, z_{0,\pm}), (z_{1,\pm}, z_{1,\pm}), (z_{2,\pm}, z_{4,\mp}), (z_{4,\pm}, z_{2,\mp}),$$

для которого $|r(u)| \leq 1$, $|s(v)| \leq 1$ и при котором правая часть неравенства (7.40) принимает минимальное значение. При этом равенство достигается в случае, когда $(r(u), s(u)) = (z_{\pm}(u), z_{\pm}(1-u))$.

ЗАМЕЧАНИЕ 15. В следующем пункте мы укажем более простой способ нахождения $\alpha(u, \xi; \{p, q\})$ в каждом из случаев (в случае, когда $(r(u), s(u)) = (z_{\pm}(u), z_{\pm}(1-u))$), такое выражение совпадает с правой частью в (7.40).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся леммой 12 в предположении, что пара $(r(u), s(u))$ определена так, как указано выше, и что $|r(u)| < 1$, $|s(u)| < 1$, или же $(r(u), s(u)) = (z_{0,\pm}, 1)$ либо $(1, z_{0,\pm})$, где знак $\pm$ выбран так, что $|z_{0,\pm}| \leq 1$.

Перенормируем уравнение

$$m^4 t^2 - P(m, n)z + m^4 t^2 z^2 = 0,$$

полагая $u := m/(n+m)$. Так получим два корня $z_{\pm}(u)$, определяемые равенствами (7.39).

Вторая координата w принимает теперь одно из значений $w_{\pm}(u) = z_{\pm}(1-u)$, однако следует удостовериться, что $f(z, w) = 0$ при правильном выборе пары знаков $\pm$. Можно убедиться, что правильный выбор знаков отвечает случаю, когда знаки выбираются одинаковыми. Следовательно,

$$(z, w) = (z_{\pm}(u), z_{\pm}(1-u)). \quad (7.41)$$

Напомним, что мы оценивали коэффициенты $b_{p^h q^k}$, полагая при этом $m = \lfloor h/4 \rfloor$, $n = \lfloor k/4 \rfloor$, и сравним логарифм $b_{p^h q^k}$ с выражением $\log(p^h q^k)$. Принимая во внимание перенормировку, получим:

$$\alpha(u, \xi; \{p, q\}) \leq -\frac{u \log |z_{\pm}(u)| + (1-u) \log |z_{\pm}(1-u)|}{4(u \log p + (1-u) \log q)}. \quad (7.42)$$

Выбор знака $\pm$ один и тот же при $|z_{\pm}(u)| < 1$ и $|z_{\pm}(1-u)| < 1$. Если эти условия не выполняются, то нам следует перебрать все остальные возможности, указанные в лемме 12. Заметим, что априори мы получим лишь верхнюю оценку величины $\alpha(u, \xi; \{p, q\})$, однако поскольку нас интересует лишь случай, когда отношение $h/(h+k)$ стремится к заданному пределу, то, ввиду того, что параметры h и k обладают определенной свободой, верхняя граница оказывается достижимой, если $(r(u), s(u)) = (z_{\pm}(u), z_{\pm}(1-u))$.

Рис. 2. Точки $(\log |b(n, \tau_-)|) / \log n$ с $n = 2^h \cdot 3^k$ ($h, k = 1, \dots, 100$). Проведенная сверху кривая – график функции $\alpha(u, \tau_-; \{2, 3\})$ на промежутке $u \in [0.4, 0.96]$.

7.6. $p = 2$, $q = 3$. Простейший случай отвечает $p = 2$, $q = 3$. Рассмотрим вторую функцию Дэвенпорта–Хейльбронна, поскольку она интересна и с исторической точки зрения.

Точка, дающая значение $\alpha(u, \tau_-; \{2, 3\})$, совпадает с $(z_+(u), z_+(1-u))$. Максимум функции $\alpha(u, \tau_-; \{2, 3\})$ достигается при $u = 0.71201279109227\dots$, что приводит к значению

$$\sigma(\tau_-, \{2, 3\}) = 2.31490976228968512350665794\dots, \quad (7.43)$$

которое согласуется со значением $\sigma(\tau_-, \{2, 3\}) = 2.314909762289685\dots$, полученным независимо с помощью уравнения (7.37). Весьма сложной задачей может оказаться непосредственная проверка того факта, что максимальное значение (7.43) величины $\alpha(u, \xi; \{p, q\})$ совпадает с решением уравнения (7.37), поскольку наше доказательство опирается на отождествление двух величин в уточнении теоремы Ландау, данном теоремой 3, которое достигается трансцендентным методом.

Поразительным оказывается сравнение с конкретными значениями коэффициентов. На промежутке $u \in [0.4, 0.96]$ был построен график функции $\alpha(u, \tau_-; \{2, 3\})$, на который были нанесены и точки, отвечающие значениям $\log |b(n, \tau_-)| / \log n$ для $n = 2^h \cdot 3^k$ ($h, k = 1, \dots, 100$); см. рис. 2.

8. Альтернативный подход

8.1. Сложность предыдущих построений объясняется тем фактом, что формула обращения Мёбиуса имеет структуру свертки. С другой стороны, периодичность коэффициентов $f(s, \xi)$ позволяет нам эффективно использовать один прием, принадлежащий Бору. Пусть p_i обозначает i -е простое число.

Тогда, полагая $x_i = p_i^{-s}$, мы можем преобразовать ряд Дирихле в степенной ряд, зависящий от бесконечного числа переменных. Таким образом, производящая функция коэффициентов ряда Дирихле будет выражена степенным рядом по переменным $x_1, x_2, x_3, \dots$.

В нашем случае мы имеем дело лишь с двумя простыми числами p и q и, следовательно, с двумя переменными, которые будем обозначать через x и y . Коэффициент $c(h, k) = a(2^h \cdot 3^k, \xi)$ периодичен по h и k с периодом 4. Матрица $(c(h, k))$, элементы которой занумерованы парами $(h, k) \bmod 4$, задается равенством $(c(h, k)) = Z_0^t$ и является транспонированной матрицей Z_0 , которая определена в (7.12). Повторяя рассуждения в п. 7.1, найдем, что производящая функция представляется произведением функции $(1 - x^4)^{-1}(1 - y^4)^{-1}$ и многочлена от x, y степени 3 по каждой переменной. Разлагая этот многочлен на множители, получим:

$$\sum_{h=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a(p^h q^k, \xi) x^h y^k = \frac{1 + \xi x - \xi y + xy}{(1 + x^2)(1 + y^2)}.$$

Таким образом, производящая функция $F(x, y; \xi)$ коэффициентов $b(2^h \cdot 3^k, \xi)$ есть просто

$$F(x, y; \xi) = \frac{(1 + x^2)(1 + y^2)}{1 + \xi x - \xi y + xy}.$$

Следовательно,

$$f(s, \xi; \{p, q\}) = \left(1 + \frac{1}{p^{2s}}\right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{q^{2s}}\right)^{-1} \left(1 + \frac{\xi}{p^s} - \frac{\xi}{q^s} + \frac{1}{(pq)^s}\right),$$

так что множество нулей функции $f(s, \xi; \{p, q\})$ совпадает с множеством нулей полинома Дирихле

$$1 + \xi p^{-s} - \xi q^{-s} + (pq)^{-s}.$$

На рис. 3 приводится изображение этого множества для случая $p = 2, q = 3, \xi = \tau_-$. В этом случае вещественные части нулей попадают в открытый интервал

$$(-\sigma(\tau_-; \{2, 3\}), \sigma(\tau_-; \{2, 3\})),$$

причем эта граница является точной. Нулем с максимальной вещественной частью оказалось число $\rho \cong 2.314891404 + 1867.327295407i$, а нулем с минимальной вещественной частью – число $\rho \cong -2.314879564 + 8561.634827311i$. Построенное изображение дает еще одну иллюстрацию того явления, которое возникает благодаря свойству почти периодичности по Бору.

8.2. Как и в п. 7.2, при достаточно малых r_1, r_2 из интегральной формулы Коши получаем равенство

$$b(p^h q^k, \xi) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_{|z|=r_1, |w|=r_2} \frac{(1+z^2)(1+w^2)}{1+\xi z - \xi w + zw} \frac{dz}{z^{h+1}} \frac{dw}{w^{k+1}}.$$

С двойным интегралом мы поступим следующим образом. Зафиксируем z и рассмотрим внутренний интеграл как интеграл по w . Постепенно увеличивая r_2 , мы наталкиваемся на простой полюс в точке

$$w = w_0(z) := -\frac{1 + \xi z}{z - \xi}$$

Рис. 3. 2852 нулей функции $f(s, \tau_-; \{2, 3\})$ с $\Re(\rho) \geq -2.5$, $0 \leq \Im(\rho) < 10000$

(по крайней мере, если $w_0(z) \neq \pm i$), вычет в котором равен

$$\frac{(1+z^2)(1+w_0(z)^2)}{(z-\xi)z^{h+1}w_0(z)^{k+1}}.$$

После перехода через полюс, интеграл стремится к нулю при $r_2 \rightarrow \infty$ (во всяком случае, при $k \geq 3$) равномерно по z , так что

$$b(p^h q^k, \xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r_1} \frac{(1+z^2)(1+w_0(z)^2)}{(z-\xi)z^{h+1}w_0(z)^{k+1}} dz.$$

При $k \geq 2$ подынтегральная функция, кроме очевидного полюса в точке $z = 0$, имеет лишь полюс порядка $k-1$ в точке $z = -1/\xi$. Логарифм модуля интеграла асимптотически оценивается величиной

$$(h+l) \min_L \min_{z \in L} \left(u \log \left| \frac{1}{z} \right| + (1-u) \log \left| \frac{1}{w_0(z)} \right| \right),$$

где $u = h/(h+k)$, а L обозначает простой замкнутый контур в z -плоскости, разделяющий точки 0 и $-1/\xi$. Критический контур L является компонентой линии уровня $u \log |1/z| + (1-u) \log |1/w_0(z)| = t$ с минимальным t , содержащей внутри точку $z = 0$. Действительно, при достаточно больших t и $u \neq 0, 1$ у линии уровня имеются две различные компоненты, одна из которых асимптотически близка к окружности $|z| = e^{-t/u}$, а другая – к окружности $|1 + \xi z| = e^{-t/(1-u)}$.

В рассматриваемой задаче критические точки приходятся на

$$z_{0,\pm}(u) = \frac{1 + \xi^2 - 2u \pm \sqrt{1 + \xi^2} \sqrt{(1 - 2u)^2 + \xi^2}}{2\xi u},$$

так что теперь, применяя метод стационарной фазы, можно получить даже асимптотическую формулу для величины $b(p^h q^k, \xi)$. При этом показатель α

Рис. 4. 5358 нулей функции $f(s, 0)$ с условием $\Re(\rho) \geq 1/2$, $0 \leq \Im(\rho) < 10000$

в выражении $(p^h q^k)^{\alpha+o(1)}$ для порядка роста коэффициентов определяется равенством

$$\alpha(u, \xi; \{p, q\}) = \frac{u \log |z_{0,\pm}(u)| + (1-u) \log |w_0(z_{0,\pm}(u))|}{u \log 2 + (1-u) \log 3}$$

при подходящем выборе знаков $\pm$. Численными подсчетами или каким-либо иным путем читатель может убедиться, что эта формула находится в согласии с той, что получена выше в (7.42).

9. Графики: распределение нулей

Поучительно продемонстрировать распределение нулей $f(s, \xi)$ для разных значений ξ . Не исключено, что некоторые нули в ходе наших поисков оказались пропущены, однако мы надеемся, что получившиеся графики вполне пригодны для того, чтобы продемонстрировать основные закономерности распределения нулей в небольших начальных диапазонах.

В случае $\xi = 0$, когда значение $\sigma(\xi; 1) = 1.06702646637238 \dots$ является наименьшим возможным при вещественных ξ , поиск нулей проводился в прямоугольнике $1/2 \leq \sigma < 1.2$, $0 \leq t < 10000$. Для этого был использован метод секущих с параметрами $s_0 = \sigma + it$, $s_1 = \sigma + 0.01 + it$, начиная со значения $\sigma = 0.48$ с постепенным увеличением σ на 0.01 вплоть до $\sigma = 1.2$. Перед началом очередного шага вычислений величина t получала приращение 0.01. Итерации в методе секущих прекращались, если их число превышало 30 или же если отклонение от начальной точки s_0 по вертикали превышало 0.01. Таким образом было обнаружено 5358 нулей, однако среди них не было найдено ни одного, вещественная часть которого была бы больше 1 (см. рис. 4).

Это не должно нас удивлять, поскольку для того, чтобы добраться до такого нуля, нам бы пришлось отслеживать значения величин p^{it} по меньшей мере для всех чисел из множества $\mathcal{P}$ простых $p \equiv 2, 3 \pmod{5}$ такого, что

$\sum_{p \in \mathcal{P}} \arctan(p^{-1}) > \pi/2$. Наименьшее множество $\mathcal{P}$ с таким свойством состоит из всех простых чисел $p \equiv 2, 3 \pmod{5}$ с условием $p \leq 6\,323$, так что $|\mathcal{P}| = 420$. Это означает, что для нахождения такого нуля нам потребовалось бы добиться приближенного равенства нулю $\bmod \pi$ аргументов чисел p^{it} по крайней мере для 400 различных простых чисел, что является крайне редким событием. Напротив, для второй функции Дэвенпорта–Хейльбронна с $\xi = \tau_-$ нижняя граница, которой должна удовлетворять сумма по простым, составляет всего лишь 0.2767872, в то время как уже $\arctan(1/2) \cong 0.463648$ и $\arctan(1/3) \cong 0.321751$, так что у нас есть больше возможностей добиться нужных значений аргументов чисел p^{it} для того, чтобы получить нуль, вещественная часть которого была бы больше 1.

Рис. 5. 3237 нулей функции $f(s, 0.1 + i)$ с условием $\Re(\rho) \geq 0$, $0 \leq \Im(\rho) < 3000$

На рис. 5 представлены нули функции $f(s, \xi)$, отвечающей значению $\xi = 0.1 + i$ и, следовательно, близкой к L -функции Дирихле с комплексным характером по модулю 5. Поиск нулей проводился точно так же, как описано выше. И в этом случае нами не было обнаружено ни одного нуля, вещественная часть которого превосходила бы 1.

По мере того, как ξ становится больше, плотность нулей с вещественной частью, большей 1, возрастает, и даже сравнительно недолгий поиск позволяет отыскать в этой области множество нулей. Основываясь на том же методе, мы предприняли поиск нулей второй функции Дэвенпорта–Хейльбронна, вещественная часть которых строго больше $1/2$. В этом случае $\sigma(\tau_-, 1) \cong 2.382286$. При этом нуль ρ с условием $0 < \Im(\rho) < 10\,000$ и наибольшей вещественной частью оказался равным $\rho \cong 2.37474435 + 1\,649.8708285i$.

График, изображающий нули $f(s, \tau_-)$ (см. рис. 6), указывает на весьма интересную особенность, а именно на малую плотность нулей с вещественной частью, очень близкой к 0.5, но при этом, во-первых, на большую плотность

Рис. 6. 2479 нулей функции $f(s, \tau_-)$ с условием $\Re(\rho) \geq 0.5$, $0 \leq \Im(\rho) < 10\,000$

нулей с вещественной частью, близкой к 0.5, и, во-вторых, на большую плотность нулей с вещественной частью, близкой к $\sigma(\tau_-, 1)$.

Возможное объяснение второго факта состоит в том, что по мере того, как σ возрастает, сумма ряда сходится все быстрее и быстрее и “периоды” почти периодичности по Бору должны становиться все короче, приводя к наблюдаемому сгущению нулей. Напротив, малая плотность нулей с вещественной частью, очень близкой к $1/2$, может объясняться тем фактом (в пользу которого свидетельствуют результаты Карацубы и Сельберга), что, по-видимому, асимптотически большая часть нулей $f(s, \tau_-)$ лежит на критической прямой $\Re(s) = 1/2$. Это наводит на мысль о том, что наблюдаемое распределение возникает благодаря эффекту “отталкивания” нулей, не лежащих на критической прямой.

Отметим, что нули $f(s, \xi)$ отвечают значениям s отношения двух L -функций с условием $c \neq 0$. Переходя к логарифму, который определен при $\sigma > 1$, получим ряд $\phi(s) = \sum \log(R(p^{-s}))$, где $R(z)$ – некоторая рациональная функция, так что нули будут отвечать значениям $\log c + 2\pi i k$ функции $\phi(s)$ при $k \in \mathbb{Z}$.

Таким образом, нули с условием $\sigma > 1$ распадаются на счетное число семейств $\mathcal{Z}_k$, занумерованных целыми числами k . Одновременное обращение в нуль двух L -функций Дирихле (крайне маловероятное) приводит к нулям $f(s, \xi)$, которые не могут быть учтены указанным способом. Однако имеющиеся в настоящее время результаты об одновременном обращении в нуль остаются крайне слабыми по сравнению с гипотезой о том, что в действительности такое явление не может иметь места.

10. Заключительные замечания

В части этой работы мы ограничились рассмотрением линейных комбинаций двух рядов Дирихле с эйлеровым произведением, поскольку нуль такой функции отвечает ненулевому отношению двух слагаемых этой линейной ком-

бинации. Поскольку это отношение также может быть представлено в виде эйлерова произведения, общий член которого является рациональной функцией, то при переходе к логарифмам получается ряд, слагаемые которого имеют вид $\log R(p^{-s})$ с некоторой рациональной функцией $R(z)$. Поскольку простые числа образуют мультипликативно независимое множество, к такой задаче можно применять методы Бора, которые приводят к достаточно точным результатам.

С другой стороны, методы, основанные на непосредственном изучении формулы обращения Мёбиуса, не стеснены этим ограничением и, несмотря на сложность, могут проложить путь к более тонкому изучению распределения коэффициентов обратного ряда $1/f(s)$, по крайней мере, в случае, когда $f(s)$ является рядом с периодическими коэффициентами. Конечно, в последнем случае $f(s)$ оказывается линейной комбинацией дзета-функций Гурвица. Этот случай уже был охвачен работами Дэвенпорта–Хейльбронна и Ландау и исследован настолько, что оказалось возможным установить существование у таких линейных комбинаций (за очевидным исключением L -функций Дирихле) нулей с вещественной частью, превосходящей 1.

Все численные выкладки, таблицы и иллюстрации, равно как и алгебраические вычисления (результаты, разложение на множители, исключение переменных) были произведены с помощью программного пакета Mathematica®7.

Второй автор благодарен Институту перспективных исследований за предоставленную возможность продолжительного визита, во время которого и была проделана настоящая работа. Он также благодарит за поддержку Ellentuck Fund Института перспективных исследований.

Список литературы

- [1] H. Hamburger, “Über die Riemannsche Funktionalgleichung der ζ -Funktion. I”, *Math. Z.*, **10** (1921), 240–254.
- [2] H. S. A. Potter, E. C. Titchmarsh, “The zeros of Epstein’s zeta functions”, *Proc. London Math. Soc.* (2), **39** (1935), 372–384.
- [3] H. Davenport, H. Heilbronn, “On the zeros of certain Dirichlet series”, *J. London Math. Soc.*, **11** (1936), 181–185.
- [4] H. Davenport, H. Heilbronn, “On the zeros of certain Dirichlet series. II”, *J. London Math. Soc.*, **11** (1936), 307–312.
- [5] J. W. S. Cassels, “Footnote to a note of Davenport and Heilbronn”, *J. London Math. Soc.*, **36** (1961), 177–184.
- [6] H. M. Stark, “The Gauss class-number problems”, *Analytic number theory*, Clay Math. Proc., **7**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, 247–256.
- [7] E. Bombieri, “The classical theory of zeta and L -functions”, *Milan J. Math.*, **78**:1 (2010), 11–59.
- [8] A. Selberg, “On the zeros of Riemann’s zeta-function”, *Skr. Norske Vid. Akad. Oslo I*, **1942**:10 (1942), 59 pp.; *Collected papers*, v. I, Springer-Verlag, Berlin, 1989, 85–141.
- [9] С. М. Воронин, “О нулях некоторых рядов Дирихле, лежащих на критической прямой”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **44**:1 (1980), 63–91; S. M. Voronin, “On the zeros of some Dirichlet series lying on the critical line”, *Math. USSR-Izv.*, **16**:1 (1981), 55–82.
- [10] E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function*, 2nd edition, The Clarendon Press, Oxford Univ. Press, New York, 1986, 412 pp.

- [11] A. A. Karatsuba, “On zeros of the Davenport–Heilbronn function”, *Proceedings of the Amalfi Conference on Analytic Number Theory* (Maiori, 1989), Univ. Salerno, Salerno, 1992, 271–293.
- [12] E. Bombieri, D. A. Hejhal, “On the distribution of zeros of linear combination of Euler products”, *Duke Math. J.*, **80**:3 (1995), 821–862.
- [13] H. Bohr, “Über das Verhalten von $\zeta(s)$ in der Halbebene $\sigma > 1$ ”, *Gött. Nachr.*, 1911, 409–428.
- [14] H. Davenport, *The collected works of Harold Davenport*, v. I–IV, eds. B. J. Birch, H. Halberstam, C. A. Rogers, Academic Press, London–New York–San Francisco, 1977, 1910 pp.
- [15] B. Jessen, H. Tornehave, “Mean motions and zeros of almost periodic functions”, *Acta Math.*, **77**:1 (1945), 137–279.
- [16] V. Borchsenius, B. Jessen, “Mean motions and values of the Riemann zeta function”, *Acta Math.*, **80**:1 (1948), 97–166.
- [17] S. M. Gonek, “The zeros of Hurwitz’s zeta function on $\sigma = \frac{1}{2}$ ”, *Analytic number theory* (Philadelphia, PA, 1980), Lecture Notes in Math., **899**, Springer, Berlin–New York, 1981, 129–140.
- [18] E. Bombieri, J. Mueller, “On the zeros of certain Epstein zeta functions”, *Forum Math.*, **20**:2 (2008), 359–385.
- [19] Yoonbok Lee, *On the zeros of Epstein zeta functions*, Preprint, 2010.
- [20] С. М. Воронин, “О нулях дзета-функций квадратичных форм”, *Теория чисел, математический анализ и их приложения*, Тр. МИАН СССР, **142**, 1976, 135–147; англ. пер.: S. M. Voronin, “The zeros of zeta-functions of quadratic forms”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **142** (1979), 143–155.
- [21] С. М. Воронин, А. А. Карацуба, *Дзета-функция Римана*, Физматлит, М., 1994, 376 с.; англ. пер.: A. A. Karatsuba, S. M. Voronin, *The Riemann zeta-function*, de Gruyter Exp. Math., **5**, de Gruyter, Berlin, 1992, 396 pp.
- [22] С. М. Воронин, “Теорема об ‘универсальности’ дзета-функции Римана”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **39**:3 (1975), 475–486; англ. пер.: S. M. Voronin, “Theorem on the ‘universality’ of the Riemann zeta-function”, *Math. USSR-Izv.*, **9**:3 (1975), 443–453.
- [23] A. Laurinćikas, *Limit theorems for the Riemann zeta-function*, Math. Appl., **352**, Kluwer, Dordrecht, 1996, ISBN: 0-7923-3824-3, xiii+297 pp.
- [24] E. Landau, “Über den Wertevorrat von $\zeta(s)$ in der Halbebene $\sigma > 1$ ”, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen*, 1933, № 36, 81–91; *Edmund Landau collected works*, **9**, Thales Verlag, Essen, 1987, 243–255.
- [25] E. Landau, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, Chelsea Publishing Co., New York, 1953, xviii + pp. 1–564; ix + pp. 565–1001.
- [26] E. Hille, “The inversion problem of Möbius”, *Duke Math. J.*, **3**:4 (1937), 549–568.
- [27] E. Hille, “A problem in ‘factorisatio numerorum’”, *Acta Arith.*, **2** (1936), 134–144.
- [28] F. Carlson, “Über die Nullstellen der Dirichletschen Reihen und der Riemannschen ζ -Funktion”, *Arkiv för Mat. Astr. och Fysik*, **15**:20 (1921), 28 pp.

Э. Бомбьери (E. Bombieri)

Institute for Advanced Study,
School of Mathematics, Princeton, USA
E-mail: eb@math.ias.edu

Поступила в редакцию

04.10.2010

А. Гош (A. Ghosh)

Oklahoma State University, Department of
Mathematics, Stillwater, USA
E-mail: ghosh@mail.math.okstate.edu