Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Л. Таламбуца, О достижимости минимального показателя роста свободных произведений циклических групп, *УМН*, 2011, том 66, выпуск 1, 179–180

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9416>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 12:59:53

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

О достижимости минимального показателя роста
свободных произведений циклических групп

А. Л. Таламбуца

Функцией роста $f_{G,S}(n)$ группы G относительно множества порождающих S называется количество различных элементов $x \in G$, для которых x представляется в виде произведения не более чем n элементов из S или им обратных.

Говорят, что группа G имеет экспоненциальный рост относительно данного множества порождающих S , если существуют такие действительное число $c_S > 1$ и натуральное число N_S , что для всех $n > N_S$ выполнено неравенство $f_{G,S}(n) \geq c_S^n$.

Предел $\lim_{n \rightarrow \infty} (f_{G,S}(n))^{1/n}$ называется показателем экспоненциального роста группы G относительно множества порождающих S и обозначается через $\lambda(G, S)$.

Точная нижняя грань множества показателей роста данной группы G относительно всех конечных множеств ее порождающих называется минимальным показателем роста данной группы G и обозначается $\lambda(G)$.

В 1981 г. М. Громов обратил внимание на то, что свободная группа $\mathbb{F}_k$ данного ранга k имеет минимальный показатель экспоненциального роста $2k - 1$ и этот показатель роста достигается на любой системе порождающих из k элементов.

Естественным образом возник вопрос: для каких еще групп, имеющих экспоненциальный рост, минимальный показатель роста достигается на некотором множестве порождающих?

Первые примеры несвободных групп с таким свойством были указаны в работе [1].

В работе [2] А. Манн доказал достижимость минимального показателя роста для свободного произведения $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$, а также его центральных расширений вида $\langle a, b \mid a^2 = b^3, a^{2k} = 1 \rangle$. Сюда, в частности, входят матричная группа $SL(2, \mathbb{Z})$ и группа кос на трех нитях. Минимальный показатель всех этих групп равен $\sqrt{2}$ и достигается на стандартных множествах их порождающих. Там же доказан аналогичный результат для группы $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_4$ и ее центральных расширений вида $\langle a, b \mid a^2 = b^4, a^{2k} = 1 \rangle$. Их минимальные показатели роста равны $(1 + \sqrt{5})/2$ и также достигаются на множестве $\{a, b\}$.

В настоящей работе доказываются следующие новые результаты.

Через $\lambda_2(G)$ обозначается минимальный показатель роста, ограниченный системами порождающих из двух элементов.

ТЕОРЕМА 1. Пусть группа G есть свободное произведение вида $\mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_q$, где p, q — простые числа. Тогда выполнено равенство $\lambda(G) = \lambda_2(G)$.

ТЕОРЕМА 2. Если группа G есть свободное произведение вида $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_n = \langle a, b \mid a^2 = b^n = 1 \rangle$, где n есть степень простого числа p и $n \neq 2$, то

$$\lambda(G) = \lambda(G, \{a, b\}) = \frac{1}{z_0},$$

где z_0 есть минимальный положительный корень многочлена

$$\begin{aligned} 1 - 2z^2 - 2z^3 - \dots - 2z^{(n+1)/2} & \quad \text{при } p \neq 2, \\ 1 - 2z^2 - 2z^3 - \dots - 2z^{n/2} - z^{(n+1)/2} & \quad \text{при } p = 2. \end{aligned}$$

В качестве следствия доказывается следующий результат о достижимости минимального показателя роста циклических центральных расширений групп, описанных в теореме 2.

ТЕОРЕМА 3. Пусть группа K задается как $K = \langle a, b \mid a^2 = b^n = a^{2k} \rangle$, где n есть степень простого числа p , а $k \geq 1$. Тогда $\lambda(K) = \lambda(K, \{a, b\}) = \lambda(\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_n)$.

Список литературы

[1] А. Л. Таламбуца, “Достижимость показателя экспоненциального роста в свободных произведениях циклических групп”, *Матем. заметки*, **78**:4 (2005), 614–618; англ. пер.: A. L. Talambutsa, “Attainability of the exponent of exponential growth in free products of cyclic groups”, *Math. Notes*, **78**:4 (2005), 569–572. [2] A. Mann, “The growth of free products”, *J. Algebra*, **326**:1 (2011), 208–217.

А. Л. Таламбуца (A. L. Talambutsa)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: altal@mi.ras.ru

Представлено В. М. Бухштабером
Принято редколлегией
02.02.2011