Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Буфетов, А. В. Клименко, М. И. Христофоров,
Сходимость по Чезаро сферических средних для сохра-
няющих меру действий марковских групп и полугрупп,
УМН, 2011, том 66, выпуск 3, 203–204

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9417>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 12:45:35

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Сходимость по Чезаро сферических средних
для сохраняющих меру действий марковских групп и полугрупп

А. И. Буфетов, А. В. Клименко, М. И. Христофоров

Пусть Γ – конечно порожденная полугруппа. Выбор конечного набора образующих O задает следующую норму на Γ : норма $|g|_O$ элемента $g \in \Gamma$ равна длине самого короткого слова в алфавите O , представляющего g . Положим $S_O(n) = \{g : |g|_O = n\}$.

Пусть Γ действует сохраняющими меру преобразованиями T_g , $g \in \Gamma$, на вероятностном пространстве (X, ν) . Для функции $\varphi \in L^1(X, \nu)$ рассмотрим последовательность ее *сферических средних*

$$s_n(\varphi) = \frac{1}{\#S_O(n)} \sum_{g \in S_O(n)} \varphi \circ T_g$$

(здесь $\#$ обозначает число элементов конечного множества); если $S_O(n) = \emptyset$, положим $s_n(\varphi) = 0$. Далее, рассмотрим средние по Чезаро сферических средних:

$$c_N(\varphi) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s_n(\varphi).$$

Основной результат заметки устанавливает сходимость последовательности $c_N(\varphi)$ в среднем для $\varphi \in L^1(X, \nu)$ и почти всюду для $\varphi \in L^\infty(X, \nu)$ в случае, когда полугруппа Γ является марковской относительно набора образующих O .

Напомним определение марковской полугруппы. Пусть, как и выше, Γ является полугруппой с конечным набором образующих O . Пусть $\mathbf{G}$ – конечный ориентированный граф с множеством ребер $\mathcal{E}(\mathbf{G})$ и каждому его ребру $e \in \mathcal{E}(\mathbf{G})$ поставлен в соответствие некоторый элемент $\xi(e) \in O$. Зафиксируем некоторую вершину v_0 графа $\mathbf{G}$ и рассмотрим множество $\mathcal{P}(\mathbf{G}, v_0)$ всех конечных путей в графе $\mathbf{G}$, начинающихся в вершине v_0 . Определим отображение $\tilde{\xi}: \mathcal{P}(\mathbf{G}, v_0) \rightarrow \Gamma$ следующим образом: если $p = e_1 \cdots e_n \in \mathcal{P}(\mathbf{G}, v_0)$, то $\tilde{\xi}(p) = \xi(e_1) \cdots \xi(e_n)$.

Полугруппа Γ называется *марковской* относительно набора образующих O , если можно задать конечный ориентированный граф $\mathbf{G}$, его вершину v_0 и отображение $\xi: \mathcal{E}(\mathbf{G}) \rightarrow O$ так, чтобы определенное выше отображение $\tilde{\xi}: \mathcal{P}(\mathbf{G}, v_0) \rightarrow \Gamma$ было биективно, причем множество путей длины n отображается на множество $S_O(n)$.

М. Л. Громов [1] показал, что гиперболические группы являются марковскими относительно любого симметричного набора образующих (для кокомпактных групп

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 08-01-00342-а, гранта РФФИ-CNRS 10-01-93115, грантов Президента РФ МК-4893.2010.1, НШ-8508.2010.1, гранта 11.Г34.31.2006 Правительства РФ, программы Президиума РАН “Математическая теория управления”, программы № 2.1.1/5328 Минобрнауки РФ, фонда Э. Ловетта (Университет Райса), фонда Слоана и гранта NSF DMS 0604386.

изометрий пространств Лобачевского марковское свойство было доказано ранее Дж. Кэнноном [2]; подробное доказательство теоремы Громова см. в [3]).

ТЕОРЕМА 1. Пусть Γ – марковская полугруппа относительно конечного набора образующих O . Предположим, что Γ действует сохраняющими меру преобразованиями T_g , $g \in \Gamma$, на вероятностном пространстве (X, ν) . Тогда для любой функции $\varphi \in L^p(X, \nu)$, $p \in [1, \infty)$, последовательность $s_N(\varphi)$ средних по Чезаро ее сферических средних сходится в $L^p(X, \nu)$. Если $\varphi \in L^\infty(X, \nu)$, то последовательность $s_N(\varphi)$ сходится также ν -почти всюду.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть Γ – бесконечная гиперболическая (в смысле Громова) группа, O – конечный симметричный набор ее образующих, и пусть задано действие группы Γ сохраняющими меру преобразованиями T_g , $g \in \Gamma$, на вероятностном пространстве (X, ν) . Тогда для любой функции $\varphi \in L^p(X, \nu)$, $p \in [1, \infty)$, последовательность $s_N(\varphi)$ средних по Чезаро ее сферических средних сходится в $L^p(X, \nu)$. Если $\varphi \in L^\infty(X, \nu)$, то последовательность $s_N(\varphi)$ сходится также ν -почти всюду.

Эргодические теоремы для действий свободных групп и полугрупп см. [4]–[9]. В случае, когда действие гиперболической группы обладает экспоненциальным перемешиванием, К. Фудзивара и А. Нево [10] показали, что поточечная сходимость последовательности средних по Чезаро сферических средних имеет место для функций из L^2 . Л. Боуэн [11] доказал сходимость последовательности сферических средних для действий гиперболических групп на конечном пространстве. В обоих случаях предельная функция инвариантна относительно действия группы. Наш результат применим ко всем сохраняющим меру действиям конечно порожденных гиперболических групп. В случае неприводимого графа **G** теорема 1 доказана в [4]. Доказательство в общем случае проводится индукцией по построению графа **G** из неприводимых блоков.

Список литературы

- [1] M. Gromov, *Essays in group theory*, Math. Sci. Res. Inst. Publ., **8**, Springer, New York, 1987, 75–263. [2] J. W. Cannon, *Geom. Dedicata*, **16**:2 (1984), 123–148. [3] *Papers from the Swiss Seminar on Hyperbolic Groups* (Bern, 1988), Progr. Math., **83**, eds. É. Ghys, P. de la Harpe, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, ISBN: 0-8176-3508-4, xii+285 pp. [4] A. I. Bufetov, *Topology, ergodic theory, real algebraic geometry*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **202**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001, 39–50. [5] A. I. Bufetov, *Ann. of Math.* (2), **155**:3 (2002), 929–944. [6] Р. И. Григорчук, *Матем. заметки*, **65**:5 (1999), 779–783; англ. пер.: R. I. Grigorchuk, *Math. Notes*, **65**:5 (1999), 654–657. [7] А. И. Буфетов, *УМН*, **54**:4 (1999), 159–160; англ. пер.: A. I. Bufetov, *Russian Math. Surveys*, **54**:4 (1999), 835–836. [8] A. Nevo, E. M. Stein, *Acta Math.*, **173**:1 (1994), 135–154. [9] A. Nevo, *J. Amer. Math. Soc.*, **7**:4 (1994), 875–902. [10] K. Fujiwara, A. Nevo, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **18**:4 (1998), 843–858. [11] L. Bowen, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **30**:1 (2010), 97–129.

А. И. Буфетов (A. I. Bufetov)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН;
Rice University, USA
E-mail: bufetov@mi.ras.ru

Представлено Д. В. Аносовым
Принято редколлегией
10.02.2011

А. В. Клименко (A. V. Klimenko)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: klimenko05@mail.ru

М. И. Христофоров (M. I. Khristoforov)
Санкт-Петербургский государственный университет
E-mail: micvog@mail.ru