Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Матвиенко, Момент-угол многообразия положительной кривизны Риччи, отвечающие трехмерному кубу, *УМН*, 2011, том 66, выпуск 2, 233–234

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9418>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 15:28:42

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Момент-угол многообразия положительной
кривизны Риччи, отвечающие трехмерному кубу

И. В. Матвиенко

1. Введение

Одним из интересных вопросов римановой геометрии является вопрос о топологической сложности многообразий, допускающих римановы метрики положительной кривизны Риччи. В работе [1] был предложен метод построения римановых метрик положительной кривизны Риччи на некоторых момент-угол многообразиях, в частности, приведен пример неформального момент-угол многообразия положительной кривизны Риччи. В данной заметке описываются все момент-угол многообразия, отвечающие трехмерному кубу со срезанным набором вершин и граней, на которых методом работы [1] можно построить римановы метрики положительной кривизны Риччи.

Пусть P – полиэдр размерности n , у которого m гиперграней. Момент-угол многообразиие Z_P размерности $m+n$ строится по полиэдру P , причем на Z_P каноническим образом свободно действует тор T^m таким образом, что $Z_P/T^m = P$. Если рассмотреть некоторый тор $T^{m-n} \subset T^m$, действие которого свободно на Z_P , то $M = Z_P/T^{m-n}$ является квазиторическим многообразием. Аналогично, если факторпространство $M = Z_P/T^{m-n}$ является орбифолдом, то будем его называть квазиторическим орбифолдом.

Понятие момент-угол многообразия было введено в [2]. Подробнее о момент-угол многообразиях и тесно связанных с ними квазиторических многообразиях см. в [3].

2. Основной результат

Рассмотрим трехмерный куб $Q = [0, 1]^3$ и действие тора $T = T^3$ на $Z_Q = S^3 \times S^3 \times S^3$. Назовем действие тора T “хорошим”, если факторпространство $M_T = Z_Q/T$ является квазиторическим орбифолдом над Q с набором особенностей, состоящим из дизъюнктного объединения подмножеств следующих двух видов: (i) точек, окрестность которых диффеоморфна $\mathbb{C}^3/\mathbb{Z}_3$; (ii) двумерных сфер, трубчатые окрестности которых расслаиваются со слоями, диффеоморфными $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$, где $\mathbb{Z}_p = \langle (\omega, \dots, \omega) \rangle \subset \mathbb{C}^n$, $\omega = e^{2\pi i/p}$. Естественная проекция $\pi: M_T \rightarrow Q$ переводит особое множество действия T в набор непересекающихся вершин и ребер куба Q , который

Работа выполнена при поддержке программы “Ведущие научные школы” (грант НШ-7256.2010.1), совместного гранта СО РАН и УрО РАН № 46 и РФФИ (грант № 09-01-00142-а).

мы обозначим $S(T)$. С точностью до изометрий куба существует ровно 80 различных наборов вершин и ребер. Обозначим вершины куба буквами $A, B, C, D, A', B', C', D'$ и рассмотрим совокупность $\mathfrak{S}$, состоящую из следующих 50 наборов вершин и ребер:

- 1) A ; 2) A, B ; 3) A, C ; 4) A, C' ; 5) A, B', C ; 6) A, B, C, D ;
- 7) A, C, A', C' ; 8) $A, B, C, D, A', B', C', D'$; 9) AA' ; 10) AA', BB' ;
- 11) AA', CC' ; 12) AA', BC ; 13) AA', BB', CC' ; 14) AA', BB', CD ;
- 15) $AA', BC, C'D'$; 16) AA', BB', CC', DD' ; 17) $AA', BB', CD, C'D'$;
- 18) AA', B ; 19) AA', C ; 20) AA', B, B' ; 21) AA', C, C' ; 22) AA', B, C ;
- 23) AA', B, C' ; 24) AA', B, D ; 25) AA', B, D' ; 26) AA', B, C', D ;
- 27) AA', B, C, B', C' ; 28) AA', B, D, B', D' ; 29) AA', BB', C ;
- 30) AA', CC', B ; 31) AA', BC, D ; 32) AA', BC, D' ; 33) AA', BB', C, C' ;
- 34) AA', BB', C, D ; 35) AA', BB', C, D' ; 36) AA', CC', B, B' ;
- 37) AA', CC', B, D ; 38) AA', CC', B, D' ; 39) AA', BC, B', C' ;
- 40) AA', BC, B', D ; 41) AA', BC, C', D ; 42) AA', BC, C', D' ;
- 43) AA', BB', C, D, C', D' ; 44) AA', CC', B, D, B', D' ;
- 45) AA', BB', CC', D ; 46) AA', BB', CD, C' ; 47) $AA', BC, C'D', B'$;
- 48) AA', BB', CC', D, D' ; 49) AA', BB', CD, C', D' ;
- 50) $AA', BC, C'D', B', D$.

ТЕОРЕМА 1. Для любого набора вершин и ребер $S_i \in \mathfrak{S}$ ($i = 1, \dots, 50$) куба Q существует “хорошее” действие тора T на Z_Q такое, что $S(T) = S_i$. Оставшиеся 30 возможных наборов (с точностью до изометрий куба) не допускают “хороших” действий.

Теперь мы готовы сформулировать основной результат настоящей заметки, который является следствием теоремы 1 и метода, предложенного в статье [1].

ТЕОРЕМА 2. Пусть многогранник P_i ($i = 1, \dots, 50$) получается из куба Q срезанием плоскостями малых окрестностей вершин и ребер из набора $S_i \in \mathfrak{S}$. Тогда на Z_{P_i} существует риманова метрика положительной кривизны Риччи.

Список литературы

- [1] Я. В. Базайкин, И. В. Матвиенко, “О момент-угол многообразиях положительной кривизны Риччи”, *Сиб. матем. журн.*, **52**:1 (2011), 15–29; англ. пер.: Ya. V. Bazaikin, I. V. Matvienko, “On the moment-angle manifolds of positive Ricci curvature”, *Siberian Math. J.*, **52**:1 (2011), 11–22. [2] M. W. Davis, T. Januszkiewicz, “Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions”, *Duke Math. J.*, **62**:2 (1991), 417–451. [3] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, *Топологические действия в топологии и комбинаторике*, МЦНМО, М., 2004, ISBN: 5-94057-145-X, 272 с.

И. В. Матвиенко (I. V. Matvienko)
Новосибирский государственный университет;
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
E-mail: ivan.matvienko@gmail.com

Представлено В. М. Бухштабером
Принято редколлегией
10.02.2011