Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Карацуба, Об одном свойстве множества простых чисел, *УМН*, 2011, том 66, выпуск 2, 3–14

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9419>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 06:57:25

УДК 511

Об одном свойстве множества простых чисел**А. А. Карацуба**

Обнаружен эффект взаимозависимости структуры чисел натурального ряда и вида простых сомножителей, составляющих эти числа. Статья подготовлена к печати Е. А. Карацубой и М. Е. Чангой по черновикам и замечкам А. А. Карацубы 2007–2008 гг., детальные вычисления выполнены М. Е. Чангой.

Библиография: 10 названий.

Ключевые слова: простые делители, арифметические прогрессии.

1. Введение. Пусть $\mathbb{N}$ есть множество натуральных чисел, т.е. числа $1, 2, 3, \dots$. Множество простых чисел, т.е. таких $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, которые имеют ровно два разных делителя (именно, n и 1). Будем обозначать $\mathbb{P}$, $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\} \subset \mathbb{N}$.

Простые числа занимают особое место среди натуральных чисел, являясь мультипликативным базисом натурального ряда. Это означает, что каждое $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, представляется в виде произведения простых чисел (не обязательно различных), т.е. $n = p_1 \cdots p_k$, где $p_1 \in \mathbb{P}$, $\dots$, $p_k \in \mathbb{P}$, и такое представление единственно с точностью до порядка сомножителей.

Если рассмотреть числа, имеющие четное и соответственно нечетное количество простых сомножителей в их каноническом представлении, то количество тех и других среди всех чисел натурального ряда приблизительно одинаковое.

Если рассмотреть те же числа, но при условии, что в их каноническое представление не входят простые числа, принадлежащие какой-либо арифметической прогрессии, скажем, прогрессии $6m + 1$, $m = 1, 2, \dots$, или прогрессии $km + l$, $1 \leq l < k$, $(l, k) = 1$, $m = 0, 1, 2, \dots$, то картина будет иной: чисел с четным количеством простых сомножителей будет меньше, чем с нечетным количеством простых сомножителей.

Этому и похожим эффектам посвящена настоящая статья.

2. Обозначения. Далее используются следующие обозначения: символом (a, b) обозначается наибольший общий делитель чисел a и b ; запись $d|n$ при натуральном d и целом n означает, что d делит n ; символами $p, p_1, p_2, \dots$ обозначаются простые числа, символом $s = \sigma + it$ обозначается комплексное переменное; $\varphi(k)$ – функция Эйлера (количество натуральных чисел, не превосходящих k

и взаимно простых с k); $\mu(n)$ – функция Мёбиуса:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 1, \\ 0, & \text{если } n = p^2 m, \\ (-1)^k, & \text{если } n = p_1 \cdots p_k; \end{cases}$$

характер Дирихле $\chi(a)$ по модулю m – это любая функция, определенная для всех целых a и удовлетворяющая условиям:

- а) $\chi(a) = 0$, если $(a, m) > 1$,
- б) $\chi(a)$ не равна нулю тождественно,
- в) $\chi(a_1 a_2) = \chi(a_1) \chi(a_2)$,
- г) $\chi(a + m) = \chi(a)$;

$\zeta(s)$ – дзета-функция Римана; запись $A \ll B$ означает, что $|A| \leq cB$; запись $A \asymp B$ с $B > 0$ означает, что $c_1 B \leq A \leq c_2 B$; $\pi(x)$ – количество простых чисел, не превосходящих x ; при $\operatorname{Re} s > 1$ определим функцию $\ln L(s, \chi)$ соотношением

$$\ln L(s, \chi) = \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi^m(p)}{m p^{ms}};$$

$c, c_0, c_1, \dots, C, C_0, C_1, \dots$ – положительные абсолютные постоянные, в разных утверждениях, вообще говоря, разные; постоянные в знаках O являются абсолютными, если это не оговаривается особо.

3. Асимптотики Ландау. Пусть $\mathbb{N}_0$ и $\mathbb{N}_1$ – подмножества $\mathbb{N}$ такие, что $n \in \mathbb{N}_0$, если n содержит четное число простых сомножителей, и $n \in \mathbb{N}_1$, если n содержит нечетное число простых сомножителей. Интуитивно ясно, что количество чисел в $\mathbb{N}_0$ и $\mathbb{N}_1$ приблизительно одинаково. Чтобы сформулировать последнее утверждение математически точно, введем при $x \geq 1$ две функции $n_0(x)$ и $n_1(x)$, где $n_0(x)$ – количество чисел n из $\mathbb{N}_0$ таких, что $n \leq x$, а $n_1(x)$ – количество чисел n из $\mathbb{N}_1$ таких, что $n \leq x$.

Асимптотические формулы для $n_0(x)$ и $n_1(x)$ были получены Э. Ландау в [1] (см. также [2]) методом комплексного интегрирования:

$$n_0(x) = \frac{1}{2}x + O(xe^{-c\sqrt{\ln x}}), \quad (1)$$

$$n_1(x) = \frac{1}{2}x + O(xe^{-c\sqrt{\ln x}}). \quad (2)$$

Они показывают, что

$$n_0(x) \sim n_1(x) \sim \frac{1}{2}x, \quad (3)$$

т. е. $n_0(x)$ и $n_1(x)$ асимптотически равны. Кроме того,

$$n_1(x) - n_0(x) = O(xe^{-c\sqrt{\ln x}}),$$

т. е. эта разность мала. Заметим также, что в [1] доказана самая общая теорема об асимптотической формуле сумматорной функции коэффициентов ряда Дирихле (см. также [3; гл. 7, п. 49]).

24.10.2007. (1)

Э. Ландау [] доказал ряд общих теорем о распределении натуральных чисел, простые делители которых принадлежат некоторому множеству N . В частности, им получена асимптотическая формула для $\pi_1(x)$ — количества натуральных чисел, не превосходящих x и простых делители которых принадлежат заданному арифметическому прогрессии с разностью k , $k \geq 2$, и первыми членами $\ell_1, \dots, \ell_r$, где $1 \leq \ell < \dots < \ell_r$, $\tau \leq \varphi(k)$, $(\ell_i, k) = 1 \Rightarrow (\ell_r, k) = 1$. Эта формула имеет вид:

$$\pi_1(x) =$$

Похожие теоремы, но со специальным множеством простых чисел, ~~от которых откинуто множество Ландау~~, доказаны Н. Е. Гаммом [] — [].

Аналитический аппарат для доказательства теорем. Имеем равенства: (7)

$$\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s},$$

Следовательно, (8)

$$\sum_{n \leq x} \lambda(n) = n_0^*(x) - n_1^*(x)$$

Кроме того,

$$n_0^*(x) + n_1^*(x) = n^*(x).$$

4. Эффект Чанги. Э. Ландау [1], [2] доказал также ряд общих теорем о распределении натуральных чисел, все простые делители которых принадлежат некоторым подмножествам $\mathbb{N}$. В частности, им получена асимптотическая формула для $n(x)$ – количества чисел n , не превосходящих x , все простые делители которых принадлежат заданным арифметическим прогрессиям с разностью k , $k \geq 2$, и первыми членами $l_1, \dots, l_r$, где $1 \leq l_1 < \dots < l_r < k$, $r \leq \varphi(k)$, $(l_1, k) = 1, \dots, (l_r, k) = 1$ (множество всех таких чисел обозначим через $\mathbb{M}$). Эта формула имеет вид:

$$n(x) = c_0 x (\ln x)^{r/\varphi(k)-1} + O(x (\ln x)^{r/\varphi(k)-2}). \quad (4)$$

Похожие теоремы, но со специальными множествами простых чисел, отличными от множеств Ландау, доказаны М. Е. Чангой в [4]–[6]. В этих работах получены также асимптотики сумм мультипликативных функций, причем суммирования ведутся по специальным множествам натуральных чисел, включая вышеуказанные. Здесь обнаруживается эффект поведения главного члена таких формул. В частности, если рассматривать сумму значений функции Мёбиуса, то во многих случаях при суммировании по специальным множествам эта сумма имеет явный асимптотический характер. Например, при $r < \varphi(k)$

$$\sum_{n \leq x, n \in \mathbb{M}} \mu(n) \sim -c_1 x (\ln x)^{-r/\varphi(k)-1}, \quad x \rightarrow +\infty, \quad (5)$$

где $c_1 > 0$. При суммировании же по всем натуральным числам значений $\mu(n)$, как известно (см., например, [2] или [7]),

$$\sum_{n \leq x} \mu(n) = O(x e^{-c\sqrt{\ln x}}), \quad x \rightarrow +\infty. \quad (6)$$

Разница в поведении сумм функций Мёбиуса при суммировании по всему множеству натуральных чисел и при суммировании по множеству $\mathbb{M}$ назовем эффектом Чанги.

5. Основные результаты. Пусть $k \geq 2$ – натуральное число и заданы r различных натуральных чисел $l_1, \dots, l_r$ таких, что $1 \leq l_j < k$, $(l_j, k) = 1$, $j = 1, \dots, r$.

Пусть $\mathbb{A}$ – множество простых чисел, принадлежащих прогрессиям $kt + l_j$, $j \leq r$. Тривиальные случаи, когда $r = 0$ ($\mathbb{A} = \emptyset$) и $r = \varphi(k)$ ($\mathbb{A}$ есть все простые числа, не делящие k), рассматривать не будем и далее предполагаем, что

$$1 \leq r < \varphi(k). \quad (7)$$

Обозначим через $\mathbb{N}^*$ множество натуральных чисел, которые не имеют простых делителей из $\mathbb{A}$, через $\mathbb{N}_0^*$ подмножество чисел из $\mathbb{N}^*$ с четным числом простых делителей, через $\mathbb{N}_1^*$ подмножество чисел из $\mathbb{N}^*$ с нечетным числом простых делителей. Определим функции $n^*(x)$, $n_0^*(x)$, $n_1^*(x)$ равенствами

$$n^*(x) = \sum_{n \leq x, n \in \mathbb{N}^*} 1, \quad n_0^*(x) = \sum_{n \leq x, n \in \mathbb{N}_0^*} 1, \quad n_1^*(x) = \sum_{n \leq x, n \in \mathbb{N}_1^*} 1. \quad (8)$$

Очевидно, что

$$n_0^*(x) + n_1^*(x) = n^*(x) = \sum_{n \leq x} a(n), \quad (9)$$

где $a(n)$ – характеристическая функция $\mathbb{N}^*$, и, кроме того,

$$n_0^*(x) - n_1^*(x) = \sum_{n \leq x, n \in \mathbb{N}^*} \lambda(n) = \sum_{n \leq x} b(n), \quad (10)$$

где $b(n) = \lambda(n)a(n)$ и $\lambda(n) = (-1)^{\alpha_1 + \dots + \alpha_\nu}$ при $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_\nu^{\alpha_\nu}$.

ТЕОРЕМА 1. При $x \rightarrow +\infty$ справедлива асимптотическая формула

$$n_1^*(x) - n_0^*(x) \sim C n^*(x) (\ln x)^{2(r/\varphi(k)-1)},$$

где C – положительная постоянная.

Вместо введенного множества $\mathbb{N}^*$ можно рассматривать множество $\mathbb{N}^{**} \subset \mathbb{N}^*$ такое, что $n \in \mathbb{N}^{**}$, если $n \in \mathbb{N}^*$ и к тому же n – бесквадратное число. Определяя $\mathbb{N}_0^{**}$ и $\mathbb{N}_1^{**}$ как подмножества $\mathbb{N}^{**}$, содержащие числа с четным числом простых делителей и с нечетным числом простых делителей соответственно, а также функции $n^{**}(x)$, $n_0^{**}(x)$, $n_1^{**}(x)$ как

$$n^{**}(x) = \sum_{n \leq x, n \in \mathbb{N}^{**}} 1, \quad n_0^{**}(x) = \sum_{n \leq x, n \in \mathbb{N}_0^{**}} 1, \quad n_1^{**}(x) = \sum_{n \leq x, n \in \mathbb{N}_1^{**}} 1,$$

можно доказать аналог теоремы 1.

ТЕОРЕМА 2. При $x \rightarrow +\infty$ справедлива асимптотическая формула

$$n_1^{**}(x) - n_0^{**}(x) \sim C^* n^{**}(x) (\ln x)^{2(r/\varphi(k)-1)},$$

где C^* – положительная постоянная.

Аналогичные теоремы можно доказать и для других множеств натуральных чисел, например для чисел, представимых в виде суммы двух квадратов (см. пример в п. 8). Очевидно также, что можно рассматривать множества натуральных чисел, у которых, напротив, все простые делители принадлежат $\mathbb{A}$, и доказать аналогичные теоремы, которые будут содержать те же асимптотики с точностью до констант.

Теперь рассмотрим нашу задачу в несколько более общей постановке. Пусть $\mathbf{A}$ – некоторое бесконечное множество простых чисел, $\pi(x; \mathbf{A})$ – количество простых чисел множества $\mathbf{A}$, не превосходящих x , $\mathbf{N}^*$ – множество натуральных чисел n , которые не имеют делителей из $\mathbf{A}$, т. е. если p – делитель n , то $p \notin \mathbf{A}$; $\mathbf{N}_0^*$ и $\mathbf{N}_1^*$ – подмножества $\mathbf{N}^*$, причем $n \in \mathbf{N}_0^*$ тогда и только тогда, когда n имеет четное количество простых делителей, $n \in \mathbf{N}_1^*$ тогда и только тогда, когда n имеет нечетное количество простых делителей; $\mathbf{n}^*(x)$, $\mathbf{n}_0^*(x)$, $\mathbf{n}_1^*(x)$ определяются равенствами

$$\mathbf{n}^*(x) = \sum_{n \leq x, n \in \mathbf{N}^*} 1, \quad \mathbf{n}_0^*(x) = \sum_{n \leq x, n \in \mathbf{N}_0^*} 1, \quad \mathbf{n}_1^*(x) = \sum_{n \leq x, n \in \mathbf{N}_1^*} 1.$$

Предполагаем также, что

$$\pi(x; \mathbf{A}) = \sum_{p \leq x, p \in \mathbf{A}} 1 = C(\mathbf{A})\pi(x) + r_{\mathbf{A}}(x), \quad (11)$$

где $0 < C(\mathbf{A}) < 1$, $r_{\mathbf{A}}(x) = O(x^{1-\Delta})$, $\Delta > 0$. Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. *При $x \rightarrow +\infty$ справедлива асимптотическая формула*

$$\mathbf{n}_1^*(x) - \mathbf{n}_0^*(x) \sim C_0(\mathbf{A})\mathbf{n}^*(x)(\ln x)^{2(C(\mathbf{A})-1)}, \quad (12)$$

где $C_0(\mathbf{A})$ – положительная постоянная.

Если применить теорему 3 к множеству $\mathbf{A}$ из [4]:

$$\mathbf{A} = \bigcup_{n=0}^{\infty} [(Dn + l - 1)^{1/a}, (Dn + l)^{1/a}),$$

где a – нецелое положительное число, D, l – натуральные числа, $D \geq 2$, $1 \leq l \leq D$, то в этом случае формула (12) имеет место с $C(\mathbf{A}) = 1/D$.

Можно рассмотреть другой пример: представить все простые числа единым списком, занумеровав их подряд в порядке возрастания, и в качестве множества $\mathbf{A}$ взять каждое k -е простое число из списка ($k \geq 2$). В этом случае в (12) $C(\mathbf{A}) = 1/k$.

6. Доказательство основной теоремы 1. Вычислим асимптотики сумм $\sum_{n \leq x} a(n)$ и $\sum_{n \leq x} b(n)$ методом комплексного интегрирования. При этом опустим некоторые промежуточные этапы, подробное изложение которых является стандартным и может быть найдено в работе [6]. При $\operatorname{Re} s > 1$ определим для каждого l_j функцию

$$F_{l_j}(s) = \prod_{p \equiv l_j \pmod{k}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}. \quad (13)$$

Известно, что эта функция может быть аналитически продолжена левее единичной прямой и для этой функции в области $\sigma \geq \beta = 1 - c_1/\ln T$, $|t| \leq T$, $T \geq 10$, разрезанной вдоль горизонтального отрезка, имеющего правым концом точку $s = 1$, справедливо равенство

$$F_{l_j}(s) = \varphi^{(k)}(\sqrt{\zeta(s)}) e^{G_{l_j}(s)}, \quad (14)$$

где функция

$$\begin{aligned} G_{l_j}(s) = & \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \chi(l_j^*) \sum_p \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\chi(p) - \chi^m(p)}{mp^{ms}} \\ & + \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{p|k} \ln \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) + \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \chi(l_j^*) \ln L(s, \chi), \end{aligned} \quad (15)$$

$l_j l_j^* \equiv 1 \pmod{k}$, аналитична в свободной от нулей $\zeta(s)$ области $\sigma \geq \beta = 1 - c_1/\ln T$, $|t| \leq T$, а на границе этой области имеет место оценка

$$\ln^{-c_2} T \ll |F_{l_j}(s)| \ll \ln^{c_2} T.$$

При $\operatorname{Re} s > 1$ имеем

$$\zeta_1(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s} = \zeta(s) \prod_{p \in \mathbb{A}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \zeta(s) \prod_{j=1}^r F_{l_j}^{-1}(s), \quad (16)$$

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b(n)}{n^s} = \frac{\zeta_1(2s)}{\zeta_1(s)} = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} \prod_{j=1}^r F_{l_j}(s) F_{l_j}^{-1}(2s). \quad (17)$$

Применим к функциям $\zeta_1(s)$ и $F(s)$ формулу Перрона (см., например, [8]–[10]).

Пусть $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$, причем $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{-\sigma} < \infty$ при всех $\sigma > 1$. Предположим, что $|a_n| \leq A(n)$, где $A(n) > 0$ – монотонно возрастающая функция переменной n и при $\sigma \rightarrow 1 + 0$ выполняется соотношение

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{-\sigma} = O((\sigma - 1)^{-\alpha}),$$

где α – некоторая положительная постоянная. Тогда при любых $b_0 \geq b > 1$, $T \geq 2$, $x \geq 2$ имеет место формула Перрона:

$$\Phi(x) = \sum_{n \leq x} a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} f(s) \frac{x^s}{s} ds + R(x), \quad (18)$$

где

$$R(x) = O\left(\frac{x^b}{T(b-1)^\alpha} + A(2x) \left(\frac{x \ln x}{T} + \ln T\right)\right) \quad (19)$$

и постоянная в знаке O зависит только от b_0 .

Для функций $\zeta_1(s)$ и $F(s)$ можно считать, что $A(n) = 1$ и $\alpha = 1$. Применяя формулу Перрона и выбирая в качестве параметров b и T для обеих рассматриваемых функций $b = 1 + 1/\ln x$, $T = e^{c_1 \sqrt{\ln x}}$, получаем

$$\sum_{n \leq x} a(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \zeta_1(s) \frac{x^s}{s} ds + O(xe^{-c_3 \sqrt{\ln x}}), \quad (20)$$

$$\sum_{n \leq x} b(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} F(s) \frac{x^s}{s} ds + O(xe^{-c_4 \sqrt{\ln x}}). \quad (21)$$

Функции $\zeta_1(s)$ и $F(s)$ аналитически продолжаются левее единичной прямой с помощью формулы (14):

$$\zeta_1(s) = (\zeta(s))^{1-r/\varphi(k)} \exp(-G_{l_1}(s) - \dots - G_{l_r}(s)), \quad (22)$$

$$F(s) = (\zeta(s))^{r/\varphi(k)-1} (\zeta(2s))^{1-r/\varphi(k)} \times \exp(G_{l_1}(s) + \dots + G_{l_r}(s) - G_{l_1}(2s) - \dots - G_{l_r}(2s)). \quad (23)$$

Перепишем (22), (23) в виде

$$\frac{\zeta_1(s)}{s} = (s-1)^{r/\varphi(k)-1} H_a(s), \quad (24)$$

$$\frac{F(s)}{s} = (s-1)^{1-r/\varphi(k)} H_b(s), \quad (25)$$

где

$$H_a(s) = \frac{1}{s} ((s-1)\zeta(s))^{1-r/\varphi(k)} \exp(-G_{l_1}(s) - \dots - G_{l_r}(s)), \quad (26)$$

$$H_b(s) = \frac{1}{s} ((s-1)\zeta(s))^{r/\varphi(k)-1} (\zeta(2s))^{1-r/\varphi(k)} \times \exp(G_{l_1}(s) + \dots + G_{l_r}(s) - G_{l_1}(2s) - \dots - G_{l_r}(2s)). \quad (27)$$

Далее, для интегралов из правых частей (20), (21) рассмотрим область, ограниченную контуром C , состоящим из отрезков, соединяющих последовательно точки $b-iT$, $\beta-iT$ и $\beta-i0$, петли Υ , обходящей точку $s=1$ против часовой стрелки, и отрезков, последовательно соединяющих точки $\beta+i0$, $\beta+iT$, $b+iT$ и $b-iT$. Подынтегральная функция аналитична в замыкании этой области, следовательно, в силу интегральной теоремы Коши соответствующие интегралы по границе этой области равны 0, откуда получаем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \zeta_1(s) \frac{x^s}{s} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Upsilon} \zeta_1(s) \frac{x^s}{s} ds + O(xe^{-c_5 \sqrt{\ln x}}), \quad (28)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} F(s) \frac{x^s}{s} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Upsilon} F(s) \frac{x^s}{s} ds + O(xe^{-c_6 \sqrt{\ln x}}). \quad (29)$$

При этом интегралы по контуру C (исключая Υ и отрезок, соединяющий точки $b-iT$ и $b+iT$) мы оценили тривиально, пользуясь верхней и нижней оценками для $|F_{l_j}(s)|$. Подставляя в (28), (29) функции (24), (25), находим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Upsilon} \zeta_1(s) \frac{x^s}{s} ds = xI_1(x), \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\Upsilon} F(s) \frac{x^s}{s} ds = xI_2(x), \quad (30)$$

где

$$I_1(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Upsilon'} x^s s^{r/\varphi(k)-1} H_a(s+1) ds, \quad (31)$$

$$I_2(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Upsilon'} x^s s^{1-r/\varphi(k)} H_b(s+1) ds \quad (32)$$

и функции $H_a(s)$, $H_b(s)$ определяются формулами (26), (27), а Υ' – контур, полученный из Υ параллельным переносом на единицу влево вдоль вещественной оси, что соответствует замене s на $s+1$.

Далее, для того чтобы выписать асимптотики сумм $\sum_{n \leq x} a(n)$ и $\sum_{n \leq x} b(n)$, воспользуемся следующим (доказанным в [6; лемма 2]) утверждением.

Пусть функция $H(s)$ аналитична в круге $|s| < \Delta$ и через H_j обозначен j -й коэффициент ее разложения в ряд Тейлора в этом круге. Пусть контур Υ

начинается в точке $-(\ln x)^{-1/2} - i0$, обходит начало координат против часовой стрелки и заканчивается в точке $-(\ln x)^{-1/2} + i0$. Пусть

$$I(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} x^s s^{-\varrho/\varphi(k)} H(s) ds, \quad (33)$$

где ϱ – фиксированное целое число. Тогда имеет место асимптотическая формула

$$I(x) = \sum_{0 \leq j \leq \sqrt{\ln x}} H_j \frac{(\ln x)^{\varrho/\varphi(k)-j-1}}{\Gamma(\varrho/\varphi(k)-j)} + O(e^{-C_1 \sqrt{\ln x}}). \quad (34)$$

Кроме того, в (34) можно заменить верхний предел суммирования фиксированным целым неотрицательным N , причем остаток оценится величиной первого отброшенного члена, т. е. $O((\ln x)^{\varrho/\varphi(k)-N-2})$.

Очевидно, что интегралы (31), (32) представляют собой интеграл вида (33), при этом $\varrho = \varphi(k) - r > 0$ для $I_1(x)$ и $\varrho = r - \varphi(k) < 0$ для $I_2(x)$ (мы рассматриваем только нетривиальные случаи, когда $0 < r < \varphi(k)$). Из (31)–(34) получаем

$$I_1(x) = \sum_{0 \leq j \leq \sqrt{\ln x}} A_j \frac{(\ln x)^{-r/\varphi(k)-j}}{\Gamma(1-r/\varphi(k)-j)} + O(e^{-C_2 \sqrt{\ln x}}), \quad (35)$$

$$I_2(x) = \sum_{0 \leq j \leq \sqrt{\ln x}} B_j \frac{(\ln x)^{r/\varphi(k)-j-2}}{\Gamma(r/\varphi(k)-j-1)} + O(e^{-C_3 \sqrt{\ln x}}), \quad (36)$$

где A_j, B_j – коэффициенты разложения соответственно функций $H_a(s)$ и $H_b(s)$ в ряд Тейлора в точке $s = 1$, при этом

$$A_0 = H_a(1) = \exp(-G_{l_1}(1) - \dots - G_{l_r}(1)) > 0, \quad (37)$$

$$B_0 = H_b(1) = \left(\frac{\pi^2}{6}\right)^{1-r/\varphi(k)} \times \exp(G_{l_1}(1) + \dots + G_{l_r}(1) - G_{l_1}(2) - \dots - G_{l_r}(2)) > 0. \quad (38)$$

Обозначим

$$a_j = \frac{A_j}{\Gamma(1-r/\varphi(k)-j)}, \quad b_j = \frac{B_j}{\Gamma(r/\varphi(k)-1-j)}. \quad (39)$$

Из (20), (21), (28)–(30) и (35)–(39) находим

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} a(n) &= a_0 x (\ln x)^{-r/\varphi(k)} + a_1 x (\ln x)^{-r/\varphi(k)-1} \\ &\quad + O(x (\ln x)^{-r/\varphi(k)-2}), \quad x \rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (40)$$

$$\sum_{n \leq x} b(n) = b_0 x (\ln x)^{r/\varphi(k)-2} + O(x (\ln x)^{r/\varphi(k)-3}), \quad x \rightarrow +\infty. \quad (41)$$

Рассмотрим асимптотики (40), (41). Заметим, что, поскольку $0 < r/\varphi(k) < 1$, из (39) следует, что $a_0 > 0$, $b_0 < 0$. Поскольку

$$-\frac{r}{\varphi(k)} > \frac{r}{\varphi(k)} - 2, \quad \frac{r}{\varphi(k)} - 2 > -\frac{r}{\varphi(k)} - 2, \quad -\frac{r}{\varphi(k)} - 1 > \frac{r}{\varphi(k)} - 3, \quad (42)$$

то, учитывая (9), (10), получаем асимптотики для величин $n_0^*(x)$, $n_1^*(x)$:

$$n_0^*(x) = h_0 x (\ln x)^{-r/\varphi(k)} + h_1 x (\ln x)^{-r/\varphi(k)-1} - h x (\ln x)^{r/\varphi(k)-2} + O(x (\ln x)^{-r/\varphi(k)-2} + x (\ln x)^{r/\varphi(k)-3}), \quad x \rightarrow +\infty, \quad (43)$$

$$n_1^*(x) = h_0 x (\ln x)^{-r/\varphi(k)} + h_1 x (\ln x)^{-r/\varphi(k)-1} + h x (\ln x)^{r/\varphi(k)-2} + O(x (\ln x)^{-r/\varphi(k)-2} + x (\ln x)^{r/\varphi(k)-3}), \quad x \rightarrow +\infty, \quad (44)$$

где

$$h_0 = h_0(r, k, l_1, \dots, l_r) = \frac{a_0}{2} > 0, \quad h_1 = h_1(r, k, l_1, \dots, l_r) = \frac{a_1}{2}, \\ h = h(r, k, l_1, \dots, l_r) = -\frac{b_0}{2} > 0.$$

Легко видеть, что из асимптотик (43), (44) следует, что

$$n_1^*(x) - n_0^*(x) \sim 2h x (\ln x)^{r/\varphi(k)-2} \sim \frac{h}{h_0} n^*(x) (\ln x)^{2(r/\varphi(k)-1)}, \quad x \rightarrow +\infty. \quad (45)$$

Теорема доказана.

7. Замечания к доказательству теоремы 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В то время как из теоремы 1 следует, что

$$n_1^*(x) - n_0^*(x) \rightarrow +\infty, \quad x \rightarrow +\infty,$$

из асимптотик (43), (44) для величин $n_1^*(x)$, $n_0^*(x)$ находим

$$n_0^*(x) \sim n_1^*(x) \sim \frac{1}{2} n^*(x) \sim h_0 x (\ln x)^{-r/\varphi(k)}, \quad x \rightarrow +\infty, \quad (46)$$

т.е. чисел в множествах $\mathbb{N}_0^*$ и $\mathbb{N}_1^*$ асимптотически поровну, что аналогично результату Ландау (3).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Теорема 2 доказывается аналогично теореме 1 с точностью до констант, при этом в качестве функции (16) участвует функция

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1(n)}{n^s} = \frac{\zeta_1(s)}{\zeta_1(2s)} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} \prod_{j=1}^r F_{l_j}^{-1}(s) F_{l_j}(2s),$$

а в качестве функции (17) – функция

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_1(n)}{n^s} = \prod_{j=1}^r F_{l_j}^{-1}(s).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. При доказательстве теоремы 3 в случае произвольного множества $\mathbf{A}$ используются функции

$$\zeta_1(s) = \zeta(s) \prod_{p \in \mathbf{A}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = (\zeta(s))^{1-C(\mathbf{A})} e^{-G(s)}, \\ F(s) = (\zeta(s))^{C(\mathbf{A})-1} (\zeta(2s))^{1-C(\mathbf{A})} e^{G(s)-G(2s)}.$$

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 1, но с другими константами и с заменой $r/\varphi(k)$ на $C(\mathbf{A})$. Аналитическое продолжение получается с помощью преобразования Абеля, при этом

$$G(s) = s \int_2^\infty \frac{r_{\mathbf{A}}(u) du}{u(u^s - 1)}.$$

8. Пример. Числа, представимые суммой двух квадратов. Приведем наглядный пример проявления описанного эффекта. Пусть $\tilde{\mathbb{N}}$ – множество натуральных чисел, представимых суммой двух квадратов целых чисел, $\tilde{\mathbb{N}}_0$ – подмножество $\tilde{\mathbb{N}}$, включающее числа с четным количеством простых сомножителей, $\tilde{\mathbb{N}}_1$ – подмножество $\tilde{\mathbb{N}}$, состоящее из чисел с нечетным количеством простых сомножителей. Как и выше, определим следующие функции:

$$\tilde{n}(x) = \sum_{n \leq x, n \in \tilde{\mathbb{N}}} 1, \quad \tilde{n}_0(x) = \sum_{n \leq x, n \in \tilde{\mathbb{N}}_0} 1, \quad \tilde{n}_1(x) = \sum_{n \leq x, n \in \tilde{\mathbb{N}}_1} 1,$$

Известно, что натуральное число представимо суммой двух квадратов в том и только том случае, если все простые вида $4n + 3$ входят в его каноническое разложение в четных степенях. Возьмем $k = 4$ и повторим доказательство теоремы 1 с функцией

$$\tilde{\zeta}_1(s) = \prod_{p \not\equiv 3 \pmod{4}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \prod_{p \equiv 3 \pmod{4}} \left(1 - \frac{1}{p^{2s}}\right)^{-1} = \zeta(s) F_3^{-1}(s) F_3(2s)$$

в качестве функции (16) и с функцией

$$\tilde{F}(s) = \prod_{p \not\equiv 3 \pmod{4}} \left(1 + \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \prod_{p \equiv 3 \pmod{4}} \left(1 - \frac{1}{p^{2s}}\right)^{-1} = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} F_3(s)$$

в качестве функции (17). Получим при $x \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \tilde{n}(x) &\sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} F_3(2) e^{-G_3(1)} \frac{x}{\sqrt{\ln x}}, \\ \tilde{n}_1(x) - \tilde{n}_0(x) &\sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \zeta(2) e^{G_3(1)} \frac{x}{(\sqrt{\ln x})^3}. \end{aligned}$$

При $k = 4$ формула (15) дает

$$e^{G_3(1)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \prod_{p \equiv 3 \pmod{4}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1/2} = \sqrt{\frac{2F_3(2)}{\pi}}.$$

Следовательно,

$$\tilde{n}_1(x) - \tilde{n}_0(x) \sim \frac{\pi}{6} \frac{\tilde{n}(x)}{\ln x} \quad \text{при } x \rightarrow +\infty.$$

Список литературы

- [1] E. Landau, “Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen”, *Gött. Nachr.*, 1912, 687–770.
- [2] E. Landau, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, 2, Teubner, Leipzig, 1909.

- [3] Ло-Кен Хуа, *Метод тригонометрических сумм и его применение в теории чисел*, Мир, М., 1964, 188 с.; пер. с нем.: Loo-Keng Hua, *Die Abschätzung von Exponentialsummen und ihre Anwendung in der Zahlentheorie*, Enzyklopädie Math. Wiss., I, Teubner, Leipzig, 1959, 123 pp.
- [4] М. Е. Чанга, “О числах, все простые делители которых лежат в специальных промежутках”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **67**:4 (2003), 213–224; англ. пер.: M. E. Changa, “Numbers whose prime divisors lie in special intervals”, *Izv. Math.*, **67**:4 (2003), 837–848.
- [5] М. Е. Чанга, *Арифметические задачи с числами, все простые делители которых принадлежат специальным множествам*, Дис. ... докт. физ.-матем. наук, МИАН, М., 2004.
- [6] М. Е. Чанга, “О суммах мультипликативных функций по числам, все простые делители которых принадлежат заданным арифметическим прогрессиям”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:2 (2005), 205–220; англ. пер.: M. E. Changa, “On sums of multiplicative functions over numbers all of whose prime divisors belong to given arithmetic progressions”, *Izv. Math.*, **69**:2 (2005), 423–438.
- [7] К. Прахар, *Распределение простых чисел*, Мир, М., 1967, 511 с.; пер. с нем.: K. Prachar, *Primzahlverteilung*, Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1957, x+415 pp.
- [8] А. А. Карацуба, *Основы аналитической теории чисел*, Наука, М., 1975, 183 с.; англ. пер. 2-го изд.: A. A. Karatsuba, *Basic analytic number theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1993, ISBN: 3-540-53345-1, xiv+222 pp.
- [9] A. A. Karatsuba, *Complex analysis in number theory*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1995, ISBN: 0-8493-2866-7, x+187 pp.
- [10] С. М. Воронин, А. А. Карацуба, *Дзета-функция Римана*, Физматлит, М., 1994, ISBN: 5-02-014120-8, 376 с.; англ. пер.: A. A. Karatsuba, S. M. Voronin, *The Riemann zeta-function*, de Gruyter Exp. Math., **5**, Walter de Gruyter, Berlin, 1992, ISBN: 3-11-013170-6, xii+396 pp.

Поступила в редакцию
06.01.2011

От составителей статьи

Анатолий Алексеевич Карацуба обнаружил интересный эффект: разность мощностей множеств чисел с нечетным и четным количеством простых сомножителей в случае, когда на эти сомножители накладываются некоторые ограничения, велика (стремится к бесконечности).

Предлагаем назвать обнаруженный эффект именем Анатолия Карацубы.