Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Муравлёв, Представление фрактального броуновского движения через бесконечномерный процесс Орнштейна–Уленбека, *УМН*, 2011, том 66, выпуск 2, 235–236

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9424>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 11:24:58

Представление фрактального броуновского движения через бесконечномерный процесс Орнштейна–Уленбека

А. А. Муравлёв

1. Фрактальное броуновское движение с параметром Харста $H \in (0, 1)$ определяется как выходящий из нуля гауссовский процесс $B^H = (B_t^H)_{t \geq 0}$ с нулевым средним и ковариационной функцией

$$R(s, t) = \frac{1}{2} (t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}), \quad s, t \geq 0. \quad (1)$$

Хорошо известно, что при $H \in (0, 1/2) \cup (1/2, 1)$ процесс B^H не является ни семимартингалом, ни марковским процессом (см., например, [1]). В настоящей работе будет показано, что, несмотря на это, B^H можно представить как линейный функционал от бесконечномерного марковского процесса.

Пусть $\xi = (\xi_\beta)_{\beta > 0}$ – гауссовский процесс с нулевым средним и ковариационной функцией $R_\xi(\alpha, \beta) = (\alpha + \beta)^{-1}$, а $B = (B_t)_{t \geq 0}$ – независимое от ξ стандартное броуновское движение. Построим по ξ и B семейство процессов $\{Z^\beta\}_{\beta > 0}$, где $Z^\beta = (Z_t^\beta)_{t \geq 0}$ – процесс Орнштейна–Уленбека, являющийся решением стохастического дифференциального уравнения

$$dZ_t^\beta = -\beta Z_t^\beta dt + dB_t, \quad Z_0^\beta = \xi_\beta.$$

ТЕОРЕМА 1. Для $H \in (0, 1/2) \cup (1/2, 1)$ и произвольного $\varepsilon > 0$ процесс $\bar{B}^{H, \varepsilon} = (\bar{B}_t^{H, \varepsilon})_{t \geq 0}$, определяемый как

$$\bar{B}_t^{H, \varepsilon} = c_H \int_0^\infty \beta^{-1/2-H} (Z_t^\beta - \xi_\beta - e^{-\beta \varepsilon_0} B_t) d\beta + \varepsilon B_t, \quad (2)$$

где

$$c_H = \frac{[\Gamma(2H+1) \sin(\pi H)]^{1/2}}{B(1/2+H, 1/2-H)}, \quad \varepsilon_0 = \left(\frac{\varepsilon}{c_H \Gamma(1/2-H)} \right)^{1/(H-1/2)},$$

является фрактальным броуновским движением с параметром Харста H .

СЛЕДСТВИЕ 1. Процесс $\bar{B}^H = (\bar{B}_t^H)_{t \geq 0}$, определяемый как

$$\bar{B}_t^H = \begin{cases} c_H \int_0^\infty \beta^{-1/2-H} (Z_t^\beta - \xi_\beta) d\beta & \text{при } H \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \\ c_H \int_0^\infty \beta^{-1/2-H} (Z_t^\beta - \xi_\beta - B_t) d\beta & \text{при } H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right), \end{cases} \quad (3)$$

также является фрактальным броуновским движением с параметром Харста H .

Полученные представления позволяют применять к B^H некоторые методы из теории марковских процессов. Так, для получения неравенств с B^H может быть использована общая теория об оптимальной остановке (см. [2]) для семейства марковских процессов $\{Z^\beta\}_{\beta > 0}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть B^H – фрактальное броуновское движение с параметром Харста H . Тогда

$$-k_H(\mathbf{E}\tau)^H \leq \mathbf{E}B_\tau^H \leq k_H(\mathbf{E}\tau)^H \quad (4)$$

для всех моментов остановки τ процесса B^H . При этом

$$k_H \leq c_H \frac{(2\pi)^{-H/2}}{H\sqrt{2}} \int_{\mathbb{R}} \Phi(u) \left[\int_{-\infty}^u \Phi^2(v) e^{v^2/2} dv \right]^{-H} du.$$

Отметим, что в случае $H \in (1/2, 1)$ неравенство (4) следует из результатов [3], однако при $H \in (0, 1/2)$ полученная оценка для $\mathbf{E}B_\tau^H$ является новым результатом.

2. Чтобы показать, что процессы $\bar{B}^{H,\varepsilon}$ и $\bar{B}^H$ представляют собой фрактальное броуновское движение, достаточно проверить, что их корреляционные функции совпадают с (1). Поясним, как были получены (2) и (3). Для произвольного $\varepsilon > 0$ представление Мандельброта–Ван Несса [4] можно записать в виде

$$B_t^H = c_H \int_{-\infty}^0 \left[\int_0^\infty (e^{-\beta(t-s)} - e^{\beta s}) \beta^{-1/2-H} d\beta \right] dB_s + c_H \int_0^t \left[\int_0^\infty (e^{-\beta(t-s)} - e^{-\beta \varepsilon_0}) \beta^{-1/2-H} d\beta \right] dB_s + \varepsilon B_t. \quad (5)$$

По теореме Фубини для стохастических интегралов (см., например, [5]) изменим порядок интегрирования. Несложно видеть, что мы получим в точности (2).

При переходе к пределу при $\varepsilon \downarrow 0$ представление (2) перейдет в (3). В случае $H \in (0, 1/2)$ вместо этого можно сразу положить $\varepsilon = 0$ в (5).

3. Чтобы доказать (4), используем представление (2). Пусть $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ и $(\mathcal{F}_t^B)_{t \geq 0}$ – естественные фильтрации процессов $\bar{B}^{H,\varepsilon}$ и B , а $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}^B$ – множества моментов остановки τ относительно этих фильтраций, для которых $\mathbf{E}\tau < \infty$. Очевидно, что $\mathcal{F}_t = \sigma(\xi) \vee \mathcal{F}_t^B$. Аналогично [6] можно показать, что

$$W_*^\beta(c, z) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}^B} \mathbf{E}(Z_\tau^\beta - c\tau \mid \xi_\beta = z) = \begin{cases} z_* - 2c \int_z^{z_*} e^{\beta x^2} \int_{-\infty}^x e^{-\beta t^2} dt dx & \text{при } z < z_*, \\ z & \text{при } z \geq z_*, \end{cases}$$

где z_* – единственное решение уравнения $2ce^{\beta z^2} \int_{-\infty}^z e^{-\beta t^2} dt = 1$. Поэтому для любого $\tau \in \mathfrak{M}$ справедливо

$$\mathbf{E}(Z_\tau^\beta - c\tau) = \mathbf{E}\mathbf{E}(Z_\tau^\beta - c\tau \mid \xi) \leq \mathbf{E}W_*^\beta(c, \xi_\beta), \quad \mathbf{E}Z_\tau^\beta \leq \inf_{c>0} [\mathbf{E}W_*^\beta(c, \xi_\beta) + c\mathbf{E}\tau].$$

Проведя необходимые вычисления, получим

$$\mathbf{E}Z_\tau^\beta \leq \frac{1}{\sqrt{2\beta}} \int_{-\infty}^A \Phi(\alpha) d\alpha, \quad (6)$$

где A – единственное решение уравнения $\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^A \Phi^2(\gamma) e^{\gamma^2/2} d\gamma = \beta \mathbf{E}\tau$. Поскольку $\mathbf{E}B_\tau = 0$ для любого $\tau \in \mathfrak{M}$, то для доказательства (4) достаточно проинтегрировать обе части неравенства (6) по $\beta^{-1/2-H} d\beta$ и применить теорему Фубини.

Автор выражает благодарность А. Н. Ширяеву за постановку задачи и внимание к работе.

Список литературы

- [1] Yu. Mishura, *Stochastic calculus for fractional Brownian motion and related processes*, Lecture Notes in Math., **1929**, Springer, Berlin, 2008. [2] G. Peskir, A. Shiryaev, *Optimal stopping and free-boundary problems*, Birkhäuser, Basel, 2006. [3] A. Novikov, E. Valkeila, *Statist. Probab. Lett.*, **44** (1999), 47–54. [4] B. B. Mandelbrot, J. W. van Ness, *SIAM Rev.*, **10** (1968), 422–437. [5] Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев, *Статистика случайных процессов*, Наука, М., 1974, 216–218. [6] J. L. Pedersen, G. Peskir, *Stochastic Anal. Appl.*, **18:5** (2000), 811–835.