Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Г. Новиков, Весовые преобразования Радона, для которых приближенная формула обращения Чанга является точной, *УМН*, 2011, том 66, выпуск 2, 237–238

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9425>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 17:36:15

Весовые преобразования Радона, для которых приближенная формула обращения Чанга является точной

Р. Г. Новиков

Мы рассматриваем весовые лучевые преобразования P_W , определенные формулой

$$P_W f(s, \theta) = \int_{\mathbb{R}} W(s\theta^\perp + t\theta, \theta) f(s\theta^\perp + t\theta) dt, \quad s \in \mathbb{R}, \quad \theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{S}^1, \quad (1)$$

где $\theta^\perp = (-\theta_2, \theta_1)$, $W = W(x, \theta)$ является весом, $f = f(x)$ – пробной функцией, $x \in \mathbb{R}^2$. С точностью до замены переменных, P_W известно также как весовое преобразование Радона на плоскости.

Напомним, что в определении (1) произведение $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ интерпретируется, как множество всех ориентированных прямых в $\mathbb{R}^2$. Если $\gamma = (s, \theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$, то $\gamma = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = s\theta^\perp + t\theta, t \in \mathbb{R}\}$ (с точностью до ориентации) и θ дает ориентацию γ .

Мы предполагаем, что

$$W \text{ комплекснозначна,} \quad W \in C(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1), \\ w_0(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^1} W(x, \theta) d\theta \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (2)$$

где $d\theta$ – стандартный элемент длины на $\mathbb{S}^1$.

Если $W \equiv 1$, то P_W известно как классическое лучевое преобразование (или преобразование Радона) на плоскости. Если

$$W(x, \theta) = \exp(-Da(x, \theta)), \quad Da(x, \theta) = \int_0^{+\infty} a(x + t\theta) dt, \quad (3)$$

где a – некоторая достаточно регулярная комплекснозначная функция на $\mathbb{R}^2$, достаточно быстро зануляющаяся на бесконечности, то P_W известно как лучевое преобразование (или преобразование Радона) с поглощением.

Классическое преобразование Радона возникает, в частности, в рентгеновской томографии. Преобразование Радона с поглощением (по крайней мере при $a \geq 0$) возникает, в частности, в однофотонной эмиссионной компьютерной томографии (со стандартной английской аббревиатурой SPECT). Некоторые другие веса W также возникают в приложениях. Более подробную информацию по этим вопросам можно найти, например, в [1], [2].

Точные и одновременно явные формулы обращения для классического преобразования Радона и для преобразования Радона с поглощением были впервые даны в [3] и [4] соответственно. Для некоторых других весов W точные и одновременно явные формулы обращения были даны в [5], [6].

С другой стороны, следующая приближенная формула обращения Чанга для преобразования P_W , где W дано формулами (3) с $a \geq 0$, уже давно используется в численных расчетах, см. [7], [8], [2]:

$$f_{\text{appr}}(x) = \frac{1}{4\pi w_0(x)} \int_{\mathbb{S}^1} h'(x\theta^\perp, \theta) d\theta, \quad h'(s, \theta) = \frac{d}{ds} h(s, \theta), \\ h(s, \theta) = \frac{1}{\pi} \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}} \frac{P_W f(t, \theta)}{s - t} dt, \quad s \in \mathbb{R}, \quad \theta \in \mathbb{S}^1, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (4)$$

где w_0 определено в (2). Известно, что формула (4) эффективна как первое приближение в SPECT-восстановлениях и, в частности, достаточно устойчива к сильному пуассоновскому шуму в SPECT-данных.

Результаты настоящей заметки состоят в теореме 1 и замечании 1.

Пусть $C_0(\mathbb{R}^2)$ обозначает пространство непрерывных функций с компактным носителем на $\mathbb{R}^2$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть предположения (2) выполнены и $f_{\text{appr}}(x)$ дано формулой (4). Тогда

$$f_{\text{appr}} = f \quad (\text{в смысле распределений}) \quad \text{на } \mathbb{R}^2 \quad \text{для всех } f \in C_0(\mathbb{R}^2), \quad (5)$$

если и только если

$$W(x, \theta) - w_0(x) \equiv w_0(x) - W(x, -\theta), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \theta \in \mathbb{S}^1. \quad (6)$$

Схема доказательства теоремы 1 дана в [9] и использует, в частности, следующую формулу:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (P_W f(s, \theta) + P_W f(-s, -\theta)) &= P_{W_{\text{sym}}} f(s, \theta), \quad (s, \theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1, \\ W_{\text{sym}}(x, \theta) &= \frac{1}{2} (W(x, \theta) + W(x, -\theta)), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \theta \in \mathbb{S}^1. \end{aligned} \quad (7)$$

Утверждение, что при условиях теоремы 1 свойство (6) влечет тождество (5), может быть также выведено из рассмотрений, развитых в [2].

Используя то, что $W_{\text{sym}} \equiv w_0$ при условии (6), мы получаем также

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть условия (2), (6) выполнены и $f \in C_0(\mathbb{R}^2)$. Тогда:

(А) $P_W f$ на $\Omega(D)$ однозначно определяет f (или, более точно, $w_0 f$) на $\mathbb{R}^2 \setminus D$ с помощью (7) и восстановления Кормака по $P_{W_{\text{sym}}} f$ на $\Omega(D)$, где D – некоторый выпуклый компакт в $\mathbb{R}^2$, $\Omega(D)$ обозначает множество всех прямых в $\mathbb{R}^2$, которые не пересекают D ;

(В) $P_W f$ на $\mathbb{R} \times (S_+ \cup S_-)$ однозначно определяет f на $\mathbb{R}^2$ с помощью (7) и стандартного восстановления по данным с ограниченными направлениями $P_{W_{\text{sym}}} f$ на $\mathbb{R} \times S_+$, где S_+ обозначает произвольное непустое открытое связное подмножество единичной окружности $\mathbb{S}^1$, $S_- = -S_+$.

В случае, когда W дано формулами (3), при дополнительных условиях, что $a \geq 0$ и $\text{supp } a \subset D$, где D – некоторая известная не слишком большая область, и при $f \in C(\mathbb{R}^2)$, $f \geq 0$, $\text{supp } f \subset D$, преобразование $P_W f$ относительно хорошо приближается преобразованием $P_{W_{\text{appr}}} f$, где $W_{\text{appr}}(x, \theta) = w_0(x) + (W(x, \theta) - W(x, -\theta))/2$. При этом вес W_{appr} уже удовлетворяет условию (6). Это объясняет эффективность формулы (4) как первого приближения в СПЕКТ-восстановлениях (на уровне интегральной геометрии).

Список литературы

- [1] F. Natterer, *The mathematics of computerized tomography*, Teubner, Stuttgart, 1986.
 [2] L. A. Kunyansky, *Inverse Problems*, **8**:5 (1992), 809–819. [3] J. Radon, *Ber. Verh. Konigl. Sachs. Ges. Wiss. Leipzig*, **69** (1917), 262–277. [4] R. G. Novikov, *Ark. Mat.*, **40**:1 (2002), 145–167.
 [5] J. Boman, J. O. Strömberg, *J. Geom. Anal.*, **14**:2 (2004), 185–198. [6] S. Gindikin, *Inverse Probl. Imaging*, **4**:4 (2010), 649–653. [7] L. T. Chang, *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, **25**:1 (1978), 638–643. [8] K. Murase, H. Itoh, H. Mogami, M. Ishine, M. Kawamura, A. Lio, K. Hamamoto, *Eur. J. Nucl. Med.*, **13** (1987), 55–62. [9] R. G. Novikov, arXiv: [1101.1725](https://arxiv.org/abs/1101.1725).

Р. Г. Новиков (R. G. Novikov)

Международный институт теории прогноза
 землетрясений и математической геофизики РАН;
 CNRS, Centre de Mathématiques Appliquées,
 Ecole Polytechnique, France
 E-mail: novikov@cmap.polytechnique.fr

Представлено С. П. Новиковым

Принято редколлегией

01.02.2011