Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Фаминский, Р. В. Кувшинов, Начально-краевые задачи для обобщенного уравнения Кавахары, *УМН*, 2011, том 66, выпуск 4, 187–188

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9427>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 14:24:03

Начально-краевые задачи для обобщенного уравнения Кавахары

А. В. Фаминский, Р. В. Кувшинов

Для обобщенного уравнения Кавахары

$$u_t - u_{xxxxx} + bu_{xxx} + au_x + g(u)u_x = f(t, x) \quad (1)$$

($u = u(t, x)$, $a, b \in \mathbb{R}$) рассматриваются две начально-краевые задачи: 1) в полуполосе $\Pi_T^+ = (0, T) \times \mathbb{R}_+$ ($\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$) и 2) в ограниченном прямоугольнике $Q_T = (0, T) \times (0, 1)$. Для обеих задач ставятся начальное условие

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \geq 0 \quad \text{или} \quad x \in [0, 1], \quad (2)$$

и краевые условия на левой границе ($t \in [0, T]$)

$$u(t, 0) = \mu_0(t), \quad u_x(t, 0) = \mu_1(t), \quad (3)$$

а для второй задачи ставятся также краевые условия на правой границе

$$u(t, 1) = \nu_0(t), \quad u_x(t, 1) = \nu_1(t), \quad u_{xx}(t, 1) = \nu_2(t). \quad (4)$$

Предполагается, что функция g имеет не более чем линейный порядок роста на бесконечности, а именно, для некоторой константы c

$$|g'(u)| \leq c \quad \forall u \in \mathbb{R}, \quad g(0) = 0. \quad (5)$$

Устанавливаются результаты о глобальной корректности указанных задач ($T > 0$ – произвольно) в классах как обобщенных, так и гладких решений.

Уравнение (1) при $g(u) \equiv u$ носит название уравнения Кавахары и описывает распространение длинных нелинейных волн в средах со слабой дисперсией (см., например, [1]). Последние результаты о глобальной корректности задачи Коши для этого уравнения можно найти в [2]. В случае нулевых краевых функций (и правой части f) глобальная корректность рассматриваемых задач для уравнения Кавахары установлена в [3] и [4]. Первые результаты в случае неоднородных краевых условий для задачи в Π_T^+ для уравнения (1) были получены в [5] и [6].

Символ I в дальнейшем обозначает или полуось $\mathbb{R}_+$ или интервал $(0, 1)$, а k, l, m – целые неотрицательные числа. Решения рассматриваемых задач строятся в пространствах $X_k((0, T) \times I)$ функций $u(t, x)$ таких, что

$$\begin{aligned} \partial_t^m u &\in C([0, T]; H^{k-5m}(I)), \quad 5m \leq k, \\ \partial_x^l u &\in C_b(\bar{I}; H^{(k-l+2)/5}(0, T)), \quad l \leq k+2, \end{aligned}$$

и в случае задачи в Π_T^+ дополнительно

$$\partial_t^m \partial_x^l u \in L_8(0, T; C_b(\bar{\mathbb{R}}_+)), \quad 5m + l \leq k,$$

и при $k \geq 2$

$$\partial_t^m \partial_x^l u \in L_2(\mathbb{R}_+; C[0, T]), \quad 5m + l \leq k - 2$$

(для задачи в Q_T аналогичные свойства следуют из первых двух; символ C_b обозначает пространство непрерывных и ограниченных функций).

Для описания свойств правой части уравнения введем пространство

$$M_k((0, T) \times I) = \left\{ f : \partial_t^m f \in L_2(0, T; H^{k-5m}(I)), \quad m \leq \frac{k+2}{5} \right\}.$$

Кроме того, для определения условий согласования граничных данных, введем индуктивным способом специальные функции $\Phi_m(x)$, а именно, положим $\Phi_0 \equiv u_0$ и для любого натурального m

$$\Phi_m \equiv \partial_t^{m-1} f|_{t=0} + \Phi_{m-1}^{(5)} - b\Phi_{m-1}''' - a\Phi_{m-1}' - \partial_t^{m-1} [g(u)u_x]|_{\partial_t^l \partial_x^j u = \Phi_l^{(j)}, l \leq m-1}.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $g \in C^{k+1}(\mathbb{R})$, выполнено условие (5), $u_0 \in H^k(\mathbb{R}_+)$, $\mu_0 \in H^{(k+2)/5}(0, T)$, $\mu_1 \in H^{(k+1)/5}(0, T)$, $f \in M_k(\Pi_T^+)$ для $k \geq 2$, $\mu_0^{(m)}(0) = \Phi_m(0)$ при $m < k/5$, $\mu_1^{(m)}(0) = \Phi_m'(0)$ при $m < (k-1)/5$. Тогда задача (1)–(3) корректна в пространстве $X_k(\Pi_T^+)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $g \in C^{k+1}(\mathbb{R})$, выполнено условие (5), $u_0 \in H^k(0, 1)$, $\mu_0, \nu_0 \in H^{(k+2)/5}(0, T)$, $\mu_1, \nu_1 \in H^{(k+1)/5}(0, T)$, $\nu_2 \in H^{k/5}(0, T)$, $f \in M_k(Q_T)$ для $k \geq 0$, $\mu_0^{(m)}(0) = \Phi_m(0)$, $\nu_0^{(m)}(0) = \Phi_m(1)$ при $m < k/5$, $\mu_1^{(m)}(0) = \Phi_m'(0)$, $\nu_1^{(m)}(0) = \Phi_m'(1)$ при $m < (k-1)/5$, $\nu_2^{(m)}(0) = \Phi_m''(1)$ при $m < (k-2)/5$. Тогда задача (1)–(4) корректна в пространстве $X_k(Q_T)$.

Доказательство этих результатов для случая самого уравнения Кавахары можно найти в [7]–[9].

Под корректностью понимается, что решение в указанном пространстве существует, единственно и непрерывно зависит от начальной и краевых функций, а также от правой части уравнения.

Условия гладкости граничных функций являются естественными, поскольку для решения $v(t, x)$ из пространства $C_b(\mathbb{R}^t; H^k(\mathbb{R}))$ линейной задачи Коши

$$v_t - v_{xxxx} = 0, \quad v(0, x) = v_0(x) \in H^k(\mathbb{R}),$$

справедливы соотношения

$$\|D_t^{2/5} v(\cdot, x)\|_{H^{k/5}(\mathbb{R}^t)} = \|D_t^{1/5} v_x(\cdot, x)\|_{H^{k/5}(\mathbb{R}^t)} = \|v_{xx}(\cdot, x)\|_{H^{k/5}(\mathbb{R}^t)} \sim \|v_0\|_{H^k(\mathbb{R})}.$$

Список литературы

- [1] Т. Kawahara, *J. Phys. Soc. Japan*, **33**:1 (1972), 260–264. [2] Hua Wang, Shang Bin Cui, Dong Gao Deng, *Acta Math. Sinica (Engl. Ser.)*, **23**:8 (2007), 1435–1446. [3] N. A. Larkin, G. G. Doronin, *Bol. Soc. Parana. Mat.* (3), **25**:1–2 (2007), 9–16. [4] G. G. Doronin, N. A. Larkin, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, **10**:4 (2008), 783–799. [5] К. Сангаре, *Вестн. РУДН. Сер. матем.*, **10**:1 (2003), 91–107. [6] К. Сангаре, А. В. Фаминский, *Матем. заметки*, **85**:1 (2009), 98–109; англ. пер.: К. Sangare, A. V. Faminskii, *Math. Notes*, **85**:1 (2009), 90–100. [7] Р. В. Кувшинов, А. В. Фаминский, *Дифференц. уравнения*, **45**:3 (2009), 391–402; англ. пер.: R. V. Kuvshinov, A. V. Faminskii, *Differ. Equ.*, **45**:3 (2009), 404–415. [8] Р. В. Кувшинов, *Вестн. РУДН. Сер. матем., инф., физ.*, **3** (2010), 5–16. [9] Р. В. Кувшинов, *Вестн. РУДН. Сер. матем., инф., физ.*, **4** (2010), 35–47.

А. В. Фаминский (A. V. Faminskii)
Российский университет дружбы народов
E-mail: afaminskii@sci.pfu.edu.ru

Представлено М. И. Зеликиным
Принято редколлегией
25.04.2011

Р. В. Кувшинов (R. V. Kuvshinov)
Российский университет дружбы народов
E-mail: infy@mail.ru