Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Бакурадзе, М. А. Джигладзе, Кольца $K(s)^*(BG)$ для групп $G_{38}, \dots, G_{41}$ порядка 32, *УМН*, 2011, том 66, выпуск 5, 185–186

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9428>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 18:28:01

Кольца $K(s)^*(BG)$ для групп $G_{38}, \dots, G_{41}$ порядка 32

М. Бакурадзе, М. Джибладзе

Конечная группа G называется хорошей [1], если кольцо K -теории Моравы $K(s)^*(BG)$ порождено образами классов Эйлера при трансфере. Основным инструментом для вычисления аддитивной структуры являются спектральные последовательности Атьи–Хирцебруха [2], [3] и Серра [4]. Однако, даже если аддитивная структура вычислена, описание мультипликативной структуры является трудной задачей. Более того, мультипликативная структура не всегда определяется теорией представлений. Описание колец $K(s)^*(BG)$, использующее формальные группы и принцип расщепления, не всегда удобно. Здесь мы рассматриваем четыре группы $G = G_{38}, \dots, G_{41}$ порядка 32 из списка Уолла–Сениора. В [5] доказано, что кольцо $K(s)^*(BG)$ порождено элементами четной размерности, а при $s = 2$ оно порождено трансфер-образами характеристических классов Чженя. В статье [5] также можно найти подробное обсуждение кольцевых структур для всех остальных групп порядка 32, известных по предыдущим работам. Для описания порождающих соотношений мы используем формулу для трансфер-образов классов Чженя из [6] и следуем плану, который уже был успешно реализован для 2-групп D, SD, QD, Q в [7].

Пусть G – одна из групп $G_{38}, \dots, G_{41}$, и пусть H – максимальная абелева подгруппа индекса два, т. е. $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^2 \rangle \cong C_4 \times C_2 \times C_2$ для $G = G_{38}$ и $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \cong C_4 \times C_4$ в остальных случаях. Рассмотрим одномерные комплексные расслоения λ, μ и ν над BH , индуцированные из канонических одномерных расслоений при помощи проекций на первый, второй и третий сомножитель соответственно в случае $H \triangleleft G_{38}$ и индуцированные при помощи проекций на первый и второй сомножители соответственно в остальных случаях. При факторизации группы G по центру получается $C_2 \times C_2 \times C_2$. Проекции на сомножители индуцируют три одномерных расслоения α, β и γ соответственно. Определим x_i как $c_i(\text{Ind}_H^G(\lambda))$ для $G = G_{39}, G_{40}$ и как $c_i(\text{Ind}_H^G(\nu))$ для $G = G_{38}, G_{41}$; y_i как $c_i(\text{Ind}_H^G(\nu))$ для $G = G_{39}, G_{40}$ и как $c_i(\text{Ind}_h^G(\lambda))$ для $G = G_{38}, G_{41}$; a как $c_1(\alpha)$ для $G = G_{38}, G_{41}$ и как $c_1(\alpha\beta)$ для $G = G_{39}, G_{40}$; b как $c_1(\beta)$ для $G = G_{38}, G_{39}, G_{40}$ и как $c_1(\alpha\beta)$ для $G = G_{41}$ и c как $c_1(\gamma)$ в о всех случаях. Пусть $\text{Tr}^*: K(s)^*(BH) \rightarrow K(s)^*(BG)$ – гомоморфизм трансфера [8], соответствующий двойному накрытию $\rho: BH \rightarrow BG$. Положим $T = \text{Tr}^*(c_1(\lambda)c_1(\nu))$. Наш основной результат заключается в следующем.

ТЕОРЕМА. Пусть G – одна из групп $G_{38}, \dots, G_{41}$. Тогда:

1) $K(s)^*(BG) \cong K(s)^*[a, b, c, x_2, y_2, T]/R$, где идеал R порожден элементами

$$\begin{aligned} & a^{2^s}, \quad b^{2^s}, \quad c^{2^s}, \quad c \left(c + x_1 + v_s \sum_{i=1}^{s-1} c^{2^s-2^i} x_2^{2^{i-1}} \right), \quad c \left(c + y_1 + v_s \sum_{i=1}^{s-1} c^{2^s-2^i} y_2^{2^{i-1}} \right), \\ & a \left(a + x_1 + v_s \sum_{i=1}^{s-1} a^{2^s-2^i} x_2^{2^{i-1}} \right), \quad b \left(b + y_1 + v_s \sum_{i=1}^{s-1} b^{2^s-2^i} y_2^{2^{i-1}} \right), \\ & \left(c + x_1 + v_s \sum_{i=1}^{s-1} c^{2^s-2^i} x_2^{2^{i-1}} \right) \left(b + y_1 + v_s \sum_{i=1}^{s-1} b^{2^s-2^i} y_2^{2^{i-1}} \right) + v_s b^{2^s-1} T, \\ & \left(c + y_1 + v_s \sum_{i=1}^{s-1} c^{2^s-2^i} y_2^{2^{i-1}} \right) \left(a + x_1 + v_s \sum_{i=1}^{s-1} a^{2^s-2^i} x_2^{2^{i-1}} \right) + v_s a^{2^s-1} T, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& T^2 + Tx_1y_1 + x_2y_1 \left(c + y_1 + v_s \sum_{i=1}^{s-1} c^{2^s-2^i} y_2^{2^{i-1}} \right) + x_1y_2 \left(c + x_1 + v_s \sum_{i=1}^{s-1} c^{2^s-2^i} x_2^{2^{i-1}} \right), \\
& T \left(a + x_1 + v_s \sum_{i=1}^{s-1} a^{2^s-2^i} x_2^{2^{i-1}} \right) + v_s a^{2^s-1} x_2 (c + y_1), \\
& T \left(b + y_1 + v_s \sum_{i=1}^{s-1} b^{2^s-2^i} y_2^{2^{i-1}} \right) + v_s b^{2^s-1} y_2 (c + x_1), \quad cT
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
v_s^2 x_2^{2^s} + \begin{cases} a^2 + b^2 + ac + v_s abc^{2^s-1} & \text{для } G = G_{39}, G_{40}, G_{41}, \\ c^2 + ac & \text{для } G = G_{38}, \end{cases} \\
v_s^2 y_2^{2^s} + \begin{cases} a^2 + bc + v_s abc^{2^s-1} & \text{для } G = G_{38}, G_{41}, \\ b^2 + bc & \text{для } G = G_{39}, \\ b^2 + c^2 + bc & \text{для } G = G_{40}, \end{cases}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
x_1 &= v_s (x_2 + v_s x_1 x_2^{2^s-1})^{2^s-1} + \begin{cases} a & \text{для } G = G_{38}, \\ b + c + v_s (bc)^{2^s-1} & \text{для } G = G_{39}, G_{40}, G_{41}, \end{cases} \\
y_1 &= v_s (y_2 + v_s y_1 y_2^{2^s-1})^{2^s-1} + \begin{cases} c & \text{для } G = G_{39}, \\ 0 & \text{для } G = G_{40}, \\ a + b + c + v_s (ab + bc + ac)^{2^s-1} & \text{для } G = G_{38}, G_{41}; \end{cases} \\
2) \quad a^2 c &= ac^2, \quad b^2 c = bc^2, \quad x_1^{2^s} = a^{2^s-1} c^{2^s-1}, \quad y_1^{2^s} = b^{2^s-1} c^{2^s-1}.
\end{aligned}$$

Известно [5], что для всех рассматриваемых нами групп эйлера характеристика равна $\chi_{s,2} = 16^s/2 + 8^s - 4^s/2$. Теперь остается лишь проверить, что наш набор образующих и соотношений действительно является полным. Рассмотрим спектральную последовательность Серра для расширения $1 \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow G/H = C_2 \rightarrow 1$, где группа H описана выше. Тогда $E_2 = H^*(G/H, K(s)^*(BH)) \cong \mathcal{F}^{C_2} \oplus \mathcal{T} \otimes H^*(C_2, \mathbb{F}_2)$, где $K(s)^*(BH) = \mathcal{F} \oplus \mathcal{T}$ – разложение на свободный и тривиальный модули. Имеется лишь один нетривиальный дифференциал, вычисляемый в явном виде. Фактор по нему имеет требуемый $K(s)^*$ -ранг.

Список литературы

- [1] M. J. Hopkins, N. J. Kuhn, D. C. Ravenel, *J. Amer. Math. Soc.*, **13**:3 (2000), 553–594.
 [2] В. М. Бухштабер, *Матем. сб.*, **78**:2 (1969), 307–320. [3] В. М. Бухштабер, *Матем. сб.*, **83**:1 (1970), 61–76. [4] I. Kriz, *Topology*, **36**:6 (1997), 1247–1273. [5] B. Schuster, *Algebr. Geom. Topol.*, **11**:1 (2011), 503–521. [6] M. Bakuradze, S. Priddy, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **132**:6 (2004), 1855–1860. [7] M. Bakuradze, V. V. Vershinin, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **134** (2006), 3707–3714. [8] J. F. Adams, *Infinite loop spaces*, Ann. Math. Stud., **90**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ; Univ. of Tokyo Press, Tokyo, 1978, 214 pp.

М. Бакурадзе (M. Bakuradze)
 Тбилисский государственный университет
 им. Ив. Джавахишвили, Грузия
 E-mail: malkhaz.bakuradze@tsu.ge

Представлено В. М. Бухштабером
 Принято редколлегией
 25.04.2011

М. Джигладзе (M. Jibladze)
 Тбилисский государственный университет
 им. Ив. Джавахишвили, Грузия
 E-mail: jib@rmi.acnet.ge