Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Зеликин, Теория полей экстремалей для кратных интегралов, *УМН*, 2011, том 66, выпуск 4, 103–136

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9429>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 14:08:02

УДК 517.972

Теория полей экстремалей для кратных интегралов

М. И. Зеликин

Строится общая теория, объединяющая и обобщающая теории поля для кратных интегралов, построенные Вейлем и Каратеодори. Вводятся обобщения преобразований Лежандра, Вейля, Каратеодори и обусловленные этими преобразованиями связность и кривизна расслоенного пространства, на котором определены кратные интегралы.

Библиография: 33 названия.

Ключевые слова: поле экстремалей, функция Вейерштрасса, преобразование Лежандра, связность и кривизна расслоенных пространств, ковариантное дифференцирование.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение.....	103
2. k -лагранжевы многообразия	111
3. Функция Вейерштрасса	115
4. Условие разрешимости	116
5. Условия трансверсальности	118
6. Обобщения преобразований Лежандра, Вейля, Каратеодори	119
7. Формулы для функций действия.....	122
8. Канонические уравнения	124
9. Необходимые и достаточные условия замкнутости формы Ω	126
10. Связность и кривизна (локальная теория).....	130
11. Примеры	133
Список литературы	134

1. Введение

Пусть $\mathfrak{M}$ – некоторая область на гладком n -мерном многообразии; $\rho: \xi \rightarrow \mathfrak{M}$ – векторное ν -мерное расслоение над базой $\mathfrak{M}$, слой этого расслоения над точкой $t \in \mathfrak{M}$, т. е. полный прообраз точки t при отображении ρ , является ν -мерным линейным пространством. Локальные координаты на $\mathfrak{M}$ будут обозначаться через $t = (t^1, \dots, t^n)$, координаты на слоях – через $x = (x^1, \dots, x^\nu)$. Принимается

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 10-01-00293-а), а также программы Президиума РАН “Математическая теория управления”.

© М. И. Зеликин, 2011

обычное соглашение о суммировании по повторяющимся индексам, при этом латинские индексы, отвечающие координатам базы, меняются от 1 до n , греческие, отвечающие координатам в слоях, меняются от 1 до ν . Кроме того, будут использоваться мультииндексы, обозначаемые заглавными буквами. При этом заглавные латинские индексы относятся к наборам координат в базе; заглавные греческие – к наборам координат в слое расслоения ξ . Через I обозначается полный набор из всех индексов от 1 до n . Через $dt^K := dt^{i_1} \wedge dt^{i_2} \wedge \dots \wedge dt^{i_k}$ будет обозначаться упорядоченное внешнее произведение дифференциалов, входящих в мультииндекс K (буква K будет указанием на то, что в этот мультииндекс входит ровно k элементов). Знак внешнего произведения (знак $\wedge$) мы будем для краткости опускать; в дальнейшем он всегда будет подразумеваться при произведении дифференциалов. Под модулем мультииндекса понимается число входящих в него индексов.

Рассмотрим функционал, часть которого, относящаяся к карте $V \subset \mathfrak{N}$, имеет вид

$$\mathcal{F} = \int_V f\left(t, x, \frac{Dx}{Dt}\right) dt^I. \quad (1)$$

Последующие вычисления будут производиться в координатах карты V .

Обозначим через $J_1(\xi)$ расслоение 1-джетов над ξ и пусть

$$q_i^\alpha := \frac{\partial x^\alpha}{\partial t^i} = g_i^\alpha(t, x) \quad (2)$$

– сечение $J_1(\xi)$. Такое сечение можно рассматривать как поле наклонов $\mathcal{G}$, т. е. как распределение n -мерных плоскостей в пространстве ξ . Будем говорить, что многообразие $M = \{x = \hat{x}(t)\}$ погружено в поле $\mathcal{G}$, если $\frac{\partial \hat{x}^\alpha}{\partial t^i} = g_i^\alpha(t, x)$.

Мы будем использовать три различных обозначения при дифференцировании по аргументам t^i , x^α , $\frac{\partial x^\alpha}{\partial t^i}$. Дифференцирование произвольной функции от $\left(t, x, \frac{Dx}{Dt}\right)$ по этим аргументам обозначается приписыванием соответствующего нижнего индекса. Если многообразие погружено в поле наклонов, то все функции становятся зависящими от t^i и x^α , и частные производные полученных функций по этим аргументам обозначаются через $\frac{\partial}{\partial t^i}$ и $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ соответственно. Если речь идет о некотором сечении расслоения ξ , то все функции становятся зависящими только от t , и их полные производные по t^i обозначаются через $\frac{d}{dt^i}$. Матрица Якоби от переменных S^K по аргументам t^J будет обозначаться через $\frac{\mathcal{D}[S^K]}{\mathcal{D}[t^J]}$. При этом каллиграфическая $\mathcal{D}$ означает производную по явно входящему аргументу, в то время как прямая D (скажем, $\frac{D[S^K]}{D[t^J]}$) – полную производную по t с учетом зависимости $x(t)$. Определитель этой матрицы обозначается $\left| \frac{D[S^K]}{D[t^J]} \right|$. Через $\mathbb{I}$ будет обозначаться единичная матрица (ее размерность диктуется смыслом соответствующей формулы).

Естественным необходимым условием минимума функционала является неотрицательность второй вариации [1]. Изучение условий неотрицательности

второй вариации началось с работы А. Клебша [2], который исследовал функционал Дирихле

$$\delta^2 \mathcal{F} = \int_V \left[\frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial(\frac{\partial x^\alpha}{\partial t^i}) \partial(\frac{\partial x^\beta}{\partial t^j})} \frac{\partial h^\alpha}{\partial t^i} \frac{\partial h^\beta}{\partial t^j} + 2 \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial(\frac{\partial x^\alpha}{\partial t^i}) \partial x^\beta} \frac{\partial h^\alpha}{\partial t^i} h^\beta + \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} h^\alpha h^\beta \right] dt^I.$$

Идея Клебша состояла в сведении этого функционала к интегралу от главной части интегранда, т. е. к квадратичным членам от преобразованных первых производных искомой функции. Сведение осуществлялось путем прибавления под интегралом замкнутой дифференциальной формы типа дивергенции. По-видимому, Клебш исходил из интуитивного убеждения, что для многомерного интеграла справедлив прямой аналог необходимого условия Лежандра: если вторая вариация неотрицательна, то квадратичная форма главных членов, определенная на $(n \times \nu)$ -матрицах

$$q_i^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial t^i},$$

неотрицательна на пространстве $(n \times \nu)$ -матриц при всех t . В работе Ж. Адамара [3], вышедшей почти через полвека после работы Клебша, было показано, что это не так. Адамар выяснил, что квадратичная форма главных членов не обязана быть неотрицательной на множестве всех матриц, и нашел следующее необходимое условие неотрицательности второй вариации.

ТЕОРЕМА 1 (Адамар). Пусть функционал

$$\delta^2 \mathcal{F} = \int_V \left[a_{\alpha\beta}^{ij}(t) \frac{\partial x^\alpha}{\partial t^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial t^j} + 2c_{\alpha\beta}^i(t) \frac{\partial x^\alpha}{\partial t^i} x^\beta + b_{\alpha\beta}(t) x^\alpha x^\beta \right] dt^I \quad (3)$$

неотрицателен при $x(\cdot)$, удовлетворяющих граничным условиям

$$x|_{\partial V} = 0.$$

Тогда при всех значениях $t \in V$ квадратичная форма $a_{\alpha\beta}^{ij}(t)q_i^\alpha q_j^\beta$ принимает неотрицательные значения на всех $(n \times \nu)$ -матрицах вида $q_i^\alpha = \xi^\alpha \eta_i$ (т. е. на всех матрицах ранга 1).

Утверждение теоремы 1 можно переформулировать следующим образом: биквадратичная форма $a_{\alpha\beta}^{ij}(t)\xi^\alpha \xi^\beta \eta_i \eta_j$ неотрицательна при всех значениях $t \in V$ и $\xi \in \mathbb{R}^\nu$, $\eta \in (\mathbb{R}^n)^*$.

Заметим, что для случая одной независимой переменной простое достаточное условие оптимальности малых участков экстремали состоит в предположении выпуклости подинтегральной функции по переменным $\frac{dx}{dt}$. Для случая многих независимых переменных аналогичное предположение также дает несложное доказательство достаточности. Однако это предположение существенно сильнее необходимого условия Адамара.

Работа Адамара стимулировала появление целой серии работ, авторы которых стремились сократить пробел между необходимыми и достаточными условиями оптимальности для кратных интегралов. Одной из ярких работ этого цикла явилась работа Ф. Терпстры [4], который рассмотрел абстрактные алгебраические вопросы, навеянные вышеупомянутой проблематикой.

А именно, пусть

$$a_{\alpha\beta}^{ij}(t)q_i^\alpha q_j^\beta \quad (4)$$

– квадратичная форма на $(n \times \nu)$ -матрицах $\|q_i^\alpha\|$. Рассмотрим конус матриц ранга 1, т. е. матриц вида $q_i^\alpha = \xi^\alpha \otimes \eta_i$. На этом конусе форма (4) превращается в биквадратичную форму

$$a_{\alpha\beta}^{ij}(t)\xi^\alpha \xi^\beta \eta_i \eta_j, \quad (5)$$

определенную на парах векторов $\xi \in \mathbb{R}^\nu$, $\eta \in (\mathbb{R}^n)^*$. Предположим, что форма (4) неотрицательна на матрицах ранга 1. Терпстра поставил вопрос: можно ли превратить форму (4) в положительно определенную форму на всем пространстве матриц путем добавления к ней членов

$$r_{\alpha\beta}^{ij}(q_i^\alpha q_j^\beta - q_i^\beta q_j^\alpha),$$

где тензоры $r_{\alpha\beta}^{ij}$ кососимметричны как по индексам i, j , так и по индексам α, β ? Такого рода добавки к главным членам возникают при прибавлении под знаком интеграла замкнутой дифференциальной формы.

Заметим, что добавленные члены обращаются в нуль на матрицах ранга 1, и, тем самым, биквадратичная форма (5) не изменяется, в то время как форма (4) претерпевает существенное изменение. Терпстра показал, что такая добавка существует, если выполнено следующее условие.

УСЛОВИЕ 1. *Форма (5) допускает разложение в сумму квадратов билинейных форм, среди которых как минимум $n\nu$ форм линейно независимы.*

Вопрос о разложимости форм четной степени в сумму квадратов исследовал Гильберт. Окончательный вариант теоремы о биквадратичных формах принадлежит Ван дер Вардену, который доказал, что разложение всегда возможно, если $\min(\nu, n) \leq 2$. Если же этот минимум больше или равен 3, то для этих размерностей существуют неразложимые положительно определенные формы. Первый явный пример такой формы построил Терпстра [4]. Более простой пример был позднее предложен Д. Серром [5], [6].

Эти проблемы оказались тесно связанными с вопросом существования минимума. Для доказательства существования важную роль играет условие полунепрерывности снизу рассматриваемого функционала.

Ч. Морри [7] и впоследствии Дж. Болл и Ф. Мюрат [8] показали, что необходимым и достаточным условием полунепрерывности снизу для второй вариации является условие Адамара–Лежандра. Ими же было изучено интересное обобщение понятия выпуклости для кратного интеграла, часто называемое поливыпуклостью. Чтобы определить это понятие, рассмотрим подынтегральную функцию $f(t, x, \dot{x})$ как функцию от матрицы

$$q = \left\| \frac{\partial x^\alpha}{\partial t^i} \right\|$$

при фиксированных t, x . Каждой $(n \times \nu)$ -матрице q поставим в соответствие совокупность элементов ее всевозможных внешних степеней, т. е. все $(l \times l)$ -миноры этой матрицы, $1 \leq l \leq \min(n, \nu)$. Получим точку r -мерного пространства,

которая обозначается $\tau(q)$. Нетрудно подсчитать, что $r = C_{n+\nu}^n - 1$. Отображение τ переводит $n\nu$ -мерное пространство $\mathbb{R}^{n\nu}$ в алгебраическое подмножество $\mathcal{K}$ пространства $\mathbb{R}^r$, определяемое соотношениями Плюккера на миноры матрицы q . Тем самым, функция f оказывается определенной на $\mathcal{K}$. Функция называется поливыпуклой, если она допускает продолжение с множества $\mathcal{K}$ на пространство $\mathbb{R}^r$, в результате которого получается выпуклая функция на всем пространстве. Поливыпуклость является достаточным (но не необходимым) условием полунепрерывности снизу интеграла от f (см. [7], [9]–[11]). Интересно, что функции, построенные Терпстрой и Серром, дают примеры полунепрерывных снизу, но не поливыпуклых функционалов.

Разрыв между необходимыми и достаточными условиями для кратных интегралов существенно сократил Л. Ван Хов [12]. В конце 40-х годов прошлого века он доказал, что естественное усиление условия Адамара–Лежандра

$$\frac{\partial^2 f}{\partial(\frac{\partial x^\alpha}{\partial t^i}) \partial(\frac{\partial x^\beta}{\partial t^j})} \xi^\alpha \xi^\beta \eta_i \eta_j \geq \varepsilon |\xi|^2 |\eta|^2 \quad (6)$$

является локально достаточным условием C^1 -минимума. Выражение “локально достаточное” означает, что область, по которой происходит интегрирование, является достаточно малой.

Идея доказательства Ван Хова состоит в следующем. Во-первых, коэффициенты замораживаются, т.е. фиксируются аргументы $(t = t_0, x = x_0)$ в коэффициентах квадратичной формы, стоящей под знаком интеграла (3) (это не повлияет на оценки, возникающие при доказательстве положительной определенности, потому что в качестве области интегрирования можно выбрать сколь угодно малую окрестность точки (t_0, x_0)). Во-вторых, к полученному функционалу с постоянными коэффициентами применяется преобразование Фурье и используется равенство Парсеваля.

Эта конструкция вскрывает внутреннюю причину того факта, что в условии Адамара–Лежандра участвуют лишь матрицы ранга 1. А именно, при применении преобразования Фурье операция дифференцирования переходит в операцию умножения на соответствующую независимую переменную. Если образом функции $x^\alpha(t)$ при преобразовании Фурье является функция $\xi^\alpha(\eta)$, то образом производной $\frac{\partial x^\alpha}{\partial t^i}$ является $\xi^\alpha \eta_i$. В результате под знаком интеграла в равенстве Парсеваля возникает биквадратичная форма, фигурирующая в левой части формулы (6), и неравенство (6) гарантирует положительную определенность рассматриваемого функционала.

Для доказательства условий оптимальности на “больших” участках поверхности требуется теория индекса функционала типа кратного интеграла и обобщение понятия сопряженной точки для многомерного вариационного исчисления. Теории индекса была посвящена целая серия работ (см., например, [13]–[17]). В этой статье мы не будем описывать эти результаты.

Для доказательства достаточных условий сильного минимума положительная определенность второй вариации недостаточна и требуется подход, связанный с теорией поля и инвариантным интегралом Гильберта [18], [19]. Первый вариант такой теории был предложен К. Каратеодори [20] в 20-х годах.

Другой (относительно более простой) вариант, основанный на несколько более жестких требованиях к минимизируемому функционалу, был построен Г. Вейлем [21] в 30-х годах. Опишем кратко оба подхода в удобной для последующих обобщений форме.

В многомерном вариационном исчислении должно быть столько же функций действия, какова размерность пространства независимых переменных. Пусть задано n функций действия: $S^i(t, x)$ ($i = 1, \dots, n$). В основу конструкции Вейля положен инвариантный интеграл, построенный по замкнутой дифференциальной форме типа дивергенции вектора S^i :

$$\Omega = \sum_{i=1}^n dt^1 \dots dt^{i-1} dS^i dt^{i+1} \dots dt^n = \frac{dS^i}{dt^i} dt^I.$$

Напомним, что в этой формуле под выражением $\frac{dS^i}{dt^i}$ следует понимать полную производную функции S^i с учетом зависимости $x(t)$. Вейль предложил для функций от матриц $q_i^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial t^i}$ использовать прямой аналог преобразования Лежандра, в котором роль скалярного произведения играет след произведения матриц:

$$f(t, x, q) \mapsto f^*(t, x, p^*) = -f + \text{tr}(p^* q), \quad (p^*)_\alpha^i = \frac{\partial f}{\partial q_i^\alpha}.$$

При этом q как функция p^* должна давать глобальный максимум функции Вейерштрасса $-f + \text{tr}(p^* q)$. Условием этого является выпуклость функции f на пространстве матриц q при фиксированных t и x . Условием минимума функции Вейерштрасса, построенной по дифференциальной форме Ω , является равенство

$$\frac{\partial S^i}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial f}{\partial \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial t^i} \right)}.$$

Конструкция Каратеодори основана на инвариантном интеграле типа детерминанта от производных функций S^i :

$$\Omega = \det \left\| \frac{\partial S^i}{\partial t^j} \right\| dt^I.$$

Каратеодори посмотрел на преобразование Лежандра как на алгебраическое преобразование в пространстве четверок. Пусть $(f, \phi, q_i^\alpha, p_\alpha^i)$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq \alpha \leq \nu$, – набор, состоящий из $2(n\nu + 1)$ величин, где f – исходная функция, ϕ – двойственная к ней функция (гамильтониан), q_i^α – исходные независимые переменные в пространстве джетов, отвечающие “скоростям” $\frac{\partial x^\alpha}{\partial t^i}$, p_α^i – двойственные к ним переменные, отвечающие моментам $\frac{\partial f}{\partial \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial t^i} \right)}$. Считается, что все эти переменные связаны соотношением

$$f + \phi = \text{tr}(pq). \quad (7)$$

Будем говорить, что преобразование тангенциальное, если оно переводит каноническую форму $df - p dq$ на расслоении 1-джетов в пропорциональную

ей каноническую форму $df^* - q^* dp^*$. При преобразовании Лежандра новые переменные получаются из старых путем перестановки:

$$f^* = \phi, \quad \phi^* = f, \quad q^* = p, \quad p^* = q.$$

Очевидно, что это преобразование тангенциальное, бирациональное, инволютивное и сохраняющее соотношение (7).

Каратеодори построил новое преобразование в пространстве четверок для инвариантного интеграла типа детерминанта. Текст Каратеодори труден из-за отсутствия мотивировок и из-за использования соотношений, содержащих множество индексов. Длинная серия нетривиальных формул, которые в конце концов приводят к нужному результату, производит впечатление волшебства. Поэтому мы приведем здесь доказательство основной теоремы Каратеодори, записанное в удобной для нас матричной форме.

Введем вспомогательную квадратную матрицу A порядка n , которую будем называть сопрягающей:

$$A = \|f\mathbb{I} - pq\|. \quad (8)$$

Введем обозначение $f^{n-2}/\det A = \gamma$. Матрицу, транспонированную к матрице B , будем обозначать через B^t .

Определим отображение $\mathcal{Z}$ четверки (f, ϕ, p, q) формулами

$$f^* = \gamma f, \quad \phi^* = \gamma \phi, \quad (p^*)^t = \gamma q A, \quad (q^*)^t = A^{-1} p. \quad (9)$$

Значит,

$$p^* q^* = A p q A^{-1} \gamma.$$

Отсюда, используя перестановочность матриц A и pq , получаем

$$\frac{p^* q^*}{f^*} = \frac{pq}{f}.$$

Следовательно, если выполнено условие $f + \phi = \text{tr}(pq)$, то

$$f^* + \phi^* = \text{tr}(p^* q^*).$$

ТЕОРЕМА 2 (Каратеодори). *Преобразование $\mathcal{Z}$ тангенциальное, бирациональное и инволютивное.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перепишем формулу (8) в виде $pq = f\mathbb{I} - A$ и выразим $(q^*)^t q$ с помощью формул (9). Имеем $(q^*)^t q = A^{-1} pq = A^{-1}(f\mathbb{I} - A) = A^{-1}f - \mathbb{I}$. Следовательно, $\mathbb{I} + (q^*)^t q = fA^{-1}$, откуда

$$\det(\mathbb{I} + (q^*)^t q) = \frac{f^n}{\det A} = f f^*. \quad (10)$$

Вычислим дифференциал обеих частей (10), используя следующую формулу для дифференциала определителя:

$$d(\det g) = (\det g) \text{tr}(g^{-1} dg).$$

Имеем

$$\begin{aligned}
 f df^* + f^* df &= f f^* \operatorname{tr} \left(\frac{A}{f} [(dq^*)^t q + (q^*)^t dq] \right) \\
 &= f^* \left(\operatorname{tr} \left(\frac{qA(dq^*)^t}{\gamma} \right) + \operatorname{tr} (A(q^*)^t dq) \right) \\
 &= f f^* \left(\operatorname{tr} \left(\frac{p^* dq^*}{\gamma f} \right) + \operatorname{tr} \left(\frac{p dq}{f} \right) \right) = f \operatorname{tr} (p^* dq^*) + f^* \operatorname{tr} (p dq). \quad (11)
 \end{aligned}$$

Комбинируя первый и последний члены в цепочке равенств (11), получаем

$$f(df^* - \operatorname{tr}(p^* dq^*)) + f^*(df - \operatorname{tr}(p dq)) = 0. \quad (12)$$

Теперь докажем, что преобразование $\mathcal{Z}$ бирационально и инволютивно.

Рассмотрим повторное преобразование $\mathcal{Z} \circ \mathcal{Z}$. Введем сопрягающую матрицу $A^* = f^* \mathbb{I} - p^* q^*$. Используя (8), получаем

$$A^* = \gamma f \mathbb{I} - (\gamma q A)^t (A^{-1} p)^t = \gamma \|f \mathbb{I} - (A^{-1} p q A)^t\|.$$

Но матрица $p q$ коммутирует с матрицей A , поэтому

$$A^* = \gamma \|f \mathbb{I} - (p q)^t\| = \gamma A^t, \quad \gamma^* = \frac{(f^*)^{n-2}}{\det A^*} = \frac{\gamma^{n-2} f^{n-2}}{\gamma^n \det A} = \frac{1}{\gamma}. \quad (13)$$

Из формул (9), (13) последовательно находим

$$\begin{aligned}
 f^{**} &= \gamma^*(f^*) = f, & \phi^{**} &= \gamma^* \phi^* = \phi, \\
 p^{**} &= \gamma^*(q^* A^*)^t = \gamma^* \gamma A A^{-1} p = p, \\
 q^{**} &= ((A^*)^{-1} p^*)^t = \gamma (A^t q^t)^t \frac{1}{\gamma} A^{-1} = q.
 \end{aligned} \quad (14)$$

Теорема доказана.

Впоследствии Т. Де Донде [22], Т. Лепаж [23], Г. Бёрнер [24] и др. связали подходы Каратеодори и Вейля с техникой дифференциальных форм. Причем главные усилия были направлены на то, чтобы найти самые общие дифференциальные формы, которые могли бы привести к теории поля.

На наш взгляд, следует искать не самые общие, а только инвариантные дифференциальные формы, имеющие непосредственный геометрический смысл (каковыми и были, по существу, формы Каратеодори и Вейля). Функции действия S^i определяют одновременную параметризацию всех многообразий, образующих “поток” решений, входящих в поле экстремалей. Именно поэтому набор дифференциальных форм, характеризующий “поток” в расслоении ξ , должен обладать свойствами инвариантности относительно выбора координат для отображений $\xi \rightarrow S$. Кроме того, в пользу требования инвариантности говорит и тот факт, что искомое n -мерное многообразие совсем не обязано всюду однозначно проектироваться на пространство переменных $(t^1, \dots, t^n)$.

Основная цель данной работы – найти и исследовать не изученные до сих пор конструкции инвариантных интегралов, а также описать соответствующие им тангенциальные преобразования. Будет построена серия преобразований, использующая касательные плоскости в пространствах различных внешних степеней матрицы джетов. Отметим, что Каратеодори использовал только одну, старшую внешнюю степень – детерминант.

Для построения теории поля надо прибавить под интегралом замкнутую дифференциальную форму, которая не изменяет значения интеграла, но превращает подынтегральное выражение в неотрицательную функцию (аналог функции Вейерштрасса). Так же как и в конструкции характеристических классов [25], для построения дифференциальной формы разумно использовать инвариантные полиномы на алгебре матриц, составленных из производных функций действия, т. е. полиномы, не меняющиеся при изменении координат на расслоении ξ . При таком выборе дифференциальная форма становится глобально однозначно определенной. Именно такими формами были след и детерминант, т. е. формы, предложенные Вейлем и Каратеодори соответственно. Мы рассмотрим здесь аналогичные конструкции для всех остальных образующих кольца инвариантных симметрических многочленов от корней матрицы $\left\| \frac{\partial S^i}{\partial t^j} \right\|$.

2. k -лагранжевы многообразия

Пусть C – квадратная $(n \times n)$ -матрица.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Главным минором называется минор матрицы C с номерами строк, совпадающими с номерами столбцов.

ЛЕММА 1. Сумма всех главных миноров матрицы C порядка k равна коэффициенту характеристического многочлена $P(\lambda)$ при λ^{n-k} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно посмотреть на матрицу

$$C = \|c_j^i - \lambda \delta_j^i\|$$

и заметить, что коэффициент при λ^{n-k} получается вычеркиванием строк и столбцов, отвечающих любым k диагональным элементам (что и приводит к главным минорам), с последующим суммированием по всем таким диагональным элементам.

Пусть задано n функций действия: $S^i(t, x)$ ($i = 1, \dots, n$). Совокупность этих функций будем называть вектором действия. Для построения аналога интеграла Гильберта рассмотрим следующую замкнутую дифференциальную форму:

$$\mathfrak{S} = \sum_{|K|=k} (-1)^{r(K)} dS^{i_1} \dots dS^{i_k} dt^{I \setminus K}, \quad (15)$$

где $K = (i_1, \dots, i_k)$ и через $r(K)$ обозначено число перестановок, необходимых для того, чтобы упорядочить произведение дифференциальных форм $dt^{i_1} \dots dt^{i_k} dt^{I \setminus K}$ по возрастанию индексов. Легко подсчитать, что

$$r(K) = \sum_{i_s \in K} i_s - \frac{k(k+1)}{2}.$$

Легко видеть, что дифференциальная форма $\mathfrak{S}_k$ соответствует коэффициенту при λ^{n-k} характеристического многочлена $P_C(\lambda)$ матрицы

$$C = \left\| \frac{dS^i}{dt^j} \right\| = \left\| \frac{\partial S^i}{\partial t^j} + \frac{\partial S^i}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\alpha}{dt^j} \right\|.$$

Действительно, записывая каждое из слагаемых формы $\mathfrak{S}_k$ через упорядоченное произведение всех дифференциалов dt^i , получим в качестве коэффициентов якобианы, соответствующие всем главным минорам матрицы C :

$$\left| \frac{D[S^K]}{D[t^K]} \right|.$$

При $k = 1$ получается теория Вейля, т. е. интеграл от дивергенции вектора S , а при $k = n$ – теория Каратеодори, т. е. интеграл от детерминанта.

Для того чтобы записать дифференциальную форму $\mathfrak{S}_k$ в терминах подынтегральной функции f , сделаем небольшое отступление.

Рассмотрим $(n \times n)$ -матрицу $C = \Phi + \Psi$, где $\Phi = \text{diag}(\phi^k)$ – диагональная матрица, $\Psi = \|a^i b_j\|$ – матрица ранга 1, являющаяся тензорным произведением контравариантного вектора a^i на ковариантный вектор b_j . Мы будем рассматривать только необходимый нам в дальнейшем случай, когда ϕ^k , a^i – дифференциальные формы первого порядка, b_j – элементы основного поля. По причине некоммутативности внешнего произведения дифференциальных форм, мы будем понимать составленный из них детерминант в некотором специальном (если угодно, символическом) смысле. При раскрытии определителя в каждом из слагаемых его разложения упорядочим произведения элементов определителя в соответствии с номерами строк. При таком условии определитель с двумя одинаковыми столбцами (но не строками!) будет равен нулю. Поэтому можно, не меняя значения определителя, складывать его столбцы (но нельзя складывать строки).

ЛЕММА 2. *Детерминант матрицы C равен*

$$\det C = \prod_{i=1}^n \phi^i + \sum_{j=1}^n b_j \phi^1 \dots \phi^{j-1} a^j \phi^{j+1} \dots \phi^n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку среди компонент вектора b_j найдется хотя бы одна отличная от нуля (иначе $\det C = 0$), можно без ограничения общности считать, что $b_1 \neq 0$. Сохранив первый столбец матрицы C , вычтем из каждого столбца с номером i первый столбец, умноженный на b_i/b_1 . Разлагая полученный определитель по первой строке, получим требуемую формулу. Лемма доказана.

Чтобы найти аналог формы Пуанкаре–Картана, запишем подынтегральное выражение функционала (1) в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{C_n^k f^{k-1}} \sum_{|K|=k} (-1)^{r(K)} \sum_{i \in K} \det(\text{diag } f dt^i) dt^{I \setminus K} \\ &= \frac{1}{C_n^k f^{k-1}} \sum_{|K|=k} \left((-1)^{r(K)} \prod_{i \in K} f dt_i \right) dt^{I \setminus K}. \end{aligned}$$

Прибавим затем к каждому из сомножителей, стоящих под знаком произведения, канонические формы для распределения (2) на расслоении 1-джетов

$$\omega^\alpha := dx^\alpha - \sum_{j=1}^n g_j^\alpha dt^j, \text{ умножив их на соответствующие моменты } p_\alpha^i := f_{q_i}^\alpha.$$

Лемма 2 дает основание рассмотреть в качестве кандидата на роль дифференциальной формы Пуанкаре–Картана следующее выражение:

$$\Omega = \sum_{|K|=k} \Omega_K, \quad (16)$$

где

$$\Omega_K = \frac{(-1)^{r(K)}}{C_n^k f^{k-1}} \prod_{i \in K} \left[f dt^i + \frac{n}{k} \sum_{\alpha=1}^{\nu} p_{\alpha}^i (dx^{\alpha} - g_i^{\alpha}(t, x) dt^i) \right] dt^{I \setminus K}. \quad (17)$$

Здесь $\prod$ есть внешнее произведение дифференциальных форм, а под знак функций f подставлено распределение (2). В формуле (17) в круглых скобках участвует только слагаемое $g_i^{\alpha} dt^i$, потому что остальные слагаемые типа $g_j^{\alpha} dt^j$ при $j \neq i$ дадут нуль, так как дифференциал dt^j встретится во внешнем произведении дважды.

Выбор дифференциальной формы (16) можно обосновать следующим образом. Каждое слагаемое дифференциальной формы $\sum_K dS^K dt^{I \setminus K}$ представляет собой простой поливектор порядка k . Записываем его в виде внешнего произведения одномерных форм. Пользуясь инвариантностью, выделяем в каждом из сомножителей, входящих в dS^K , независимые слагаемые, и принимаем их за dt^i . Вид остающихся слагаемых объясняется следующим образом. На интегральной поверхности распределения (2) дифференциальная форма Ω сводится к $f dt$. Кроме того, производные для обоих функционалов по q_i^{α} от подынтегральных функций совпадают. (Оба факта обеспечиваются выбором числовых коэффициентов C_n^k и n/k .) Эти условия необходимы, чтобы можно было говорить о минимуме функции Вейерштрасса, построенной с помощью дифференциальной формы (16) (см. ниже раздел 3).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Замена детерминанта произведением диагональных элементов, по существу, эквивалентна ограничению на картановскую подалгебру симметрической полилинейной Ад-инвариантной формы, определенной на алгебре Ли, которое эту форму определяет однозначно [26].

Предположим, что распределение (2) является интегрируемым. Тогда многообразие $\mathfrak{M} \subset J_1(\xi)$, $\dim \mathfrak{M} = \nu + n$, определяемое уравнениями (2), расслаивается на n -мерные слои. Коль скоро $\mathfrak{M}$ в силу самого своего задания однозначно проектируется на пространство ξ , полученное слоение индуцирует слоение ξ на n -мерные слои Φ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Многообразие $\mathfrak{M} \subset J_1(\xi)$, $\dim \mathfrak{M} = \nu + n$, называется k -лагранжевым, если ограничение дифференциальной формы Ω на многообразие $\mathfrak{M}$ замкнуто.

Дифференциальная форма Ω приводит к естественному, приведенному в разделе 6, обобщению преобразования Лежандра. Оно соответствует описанию функции f от матричного переменного как огибающей семейства всех касательных плоскостей к поверхности $f: \mathbb{R}^{n\nu} \rightarrow \mathbb{R}$, рассматриваемой как функция от k -й внешней степени аргумента $\frac{Dx}{Dt}$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть распределение (2) интегрируемо, а многообразие $\mathfrak{M}$ является k -лагранжевым. Тогда слои $\Phi \subset \xi$ удовлетворяют уравнению Эйлера

$$\frac{d}{dt^i}(f_{q_i^\alpha}) + f_{x^\alpha} = 0. \quad (18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Распишем дифференциал формы

$$\Omega_K = \frac{1}{C_n^k} f dt + \frac{1}{C_{n-1}^{k-1}} \sum_{\alpha=1}^{\nu} \sum_{s=1}^k [f_{q_{i_s}^\alpha} dt^{i_1} \dots dt^{i_{s-1}} \times (dx^\alpha - g_{i_s}^\alpha dt^{i_s}) dt^{i_{s+1}} \dots dt^{i_k}] dt^{I \setminus K}.$$

Слагаемые, содержащие более одной формы ω^α , в этой формуле опущены, так как после дифференцирования и следующей затем подстановки распределения (2) они дадут нуль. Вычислим дифференциал Ω_K , сохраняя лишь слагаемые вида $dx^\lambda dt$. Представим результат в виде четырех групп слагаемых:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{1}{C_n^k} \frac{\partial f}{\partial x^\lambda} dx^\lambda dt^I, \\ \phi_2 &= \frac{1}{C_n^k} f_{q_j^\alpha} \frac{\partial g_j^\alpha}{\partial x^\lambda} dx^\lambda dt^I, \\ \phi_3 &= \sum_{s=1}^k \frac{1}{C_{n-1}^{k-1}} f_{q_{i_s}^\alpha} \left(-\frac{\partial g_{i_s}^\alpha}{\partial x^\lambda} \right) dx^\lambda dt^I, \\ \phi_4 &= \sum_{s=1}^k \frac{1}{C_{n-1}^{k-1}} \frac{d}{dt^{i_s}} f_{q_{i_s}^\alpha} dt^{i_s} dt^{i_1} \dots dt^{i_{s-1}} dx^\lambda dt^{i_{s+1}} \dots dt^{i_k} dt^{I \setminus K}. \end{aligned}$$

Суммы ϕ_1 и ϕ_2 получились от дифференцирования слагаемого $(1/C_n^k) f dt^I$. Сумма ϕ_3 получилась от дифференцирования по x^λ сомножителя ω^α . В сумме ϕ_4 берется полная производная по t^{i_s} , а от ω^α сохраняется лишь dx^λ . Для того чтобы упорядочить дифференциалы в сумме ϕ_4 , необходимо переставить dt^{i_s} и dx^λ , и сумма ϕ_4 изменит знак.

Просуммируем полученные выражения по K . Выражение $\sum_K \phi_1$ (так же как и $\sum_K \phi_2$) состоит из одинаковых слагаемых, число которых равно числу групп K , т.е. C_n^k . В результате коэффициенты $1/C_n^k$ сократятся. В выражении $\sum_I \phi_3$ (так же как и в $\sum_I \phi_4$) каждое слагаемое внутри ϕ_3 встретится столько раз, во сколько групп K оно входит. Число таких групп равно C_{n-1}^{k-1} . В результате коэффициенты $1/C_{n-1}^{k-1}$ сократятся. После этого сокращения $\sum_K \phi_2 + \sum_K \phi_3 = 0$. Оставшиеся слагаемые $\sum_K \phi_1 + \sum_K \phi_4$ дадут

$$\left(-\frac{d}{dt^i}(f_{q_i^\alpha}) + f_{x^\alpha} \right) dx^\lambda dt^I = 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если при $n = 1$ множество решений уравнения Эйлера конечномерно, то при $n > 1$ имеется функциональный произвол при выборе ре-

шений. Эти решения можно по разному объединять в “лагранжевы многообразия”. Этим фактом объясняется существование множества различных теорий поля для многомерных интегралов.

3. Функция Вейерштрасса

По инвариантному интегралу от формы (16) естественно строится аналог функции Вейерштрасса для поля наклонов $g_i^\alpha(t, x)$ [27]. Интеграл от дифференциальной формы Ω призван сыграть роль инвариантного интеграла Гильберта. Для того чтобы функция Вейерштрасса была неотрицательной при всех значениях производных, необходимо, чтобы на многообразиях, погруженных в поле наклонов $g_i^\alpha(t, x)$, значение подынтегральной функции, отвечающей интегралу Гильберта, равнялось значению f и чтобы ее производные равнялись соответствующим производным функции f . На многообразиях, погруженных в рассматриваемое поле наклонов, канонические формы ω^α обращаются в нуль. Поэтому при вычислении дифференциала надо принимать во внимание только те слагаемые, которые не содержат произведений форм вида $\omega_j^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial t^j} - g_j^\alpha(t, x)$. Обозначим через $\hat{f}$ значение функции f , в которую подставлено поле наклонов (2). Матрицу A_j^i , в которой индексы i и j принимают значения только из полииндекса K , будем обозначать через $(A_j^i)_K$. Положим

$$\mathcal{E}\left(t, x, \frac{Dx}{Dt}, g\right) := f\left(t, x, \frac{Dx}{Dt}\right) - \sum_{|K|=k} \frac{1}{C_n^k \hat{f}^{k-1}} \det \left\| \hat{f} \delta_j^i + \frac{n}{k} \hat{p}_\alpha^i(\omega_j^\alpha) \right\|_K. \quad (19)$$

Тот факт, что коэффициент $\frac{1}{C_n^k \hat{f}^{k-1}}$ перед детерминантом обеспечивает выполнение условия $\hat{f} = f$, очевиден. Коэффициент $\frac{n}{k}$ приводит к совпадению производных от функций f и $\hat{f}$, так как при разложении детерминанта в формуле (19) слагаемые $\omega_j^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial t^j} - g_j^\alpha(t, x)$ в первой степени возникнут, только если член ω_j^α берется лишь в одном сомножителе диагонали, а в остальных сомножителях берутся члены $\hat{f}$. Производная $\frac{\partial x^\mu}{\partial t^m}$ присутствует лишь на m -м месте диагонали, и коэффициент при ней равен $\frac{n}{k} q_\mu^m$. Этот коэффициент не зависит от K , и при суммировании по K он встретится столько раз, сколько слагаемых K содержат индекс m , т. е. C_{n-1}^{k-1} раз. Суммарный коэффициент будет равен $\frac{C_{n-1}^{k-1}}{C_n^k} = \frac{k}{n}$, что и приводит к совпадению производных у функции f и у вычитаемого в формуле (19). В результате при $\frac{Dx}{Dt} = g$ будут выполнены соотношения

$$\mathcal{E}(t, x, g, g) = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \left(\frac{dx^\alpha}{dt^i}\right)}(t, x, g, g) = 0. \quad (20)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Поле наклонов $g_i^\alpha(t, x)$ называется геодезическим для дифференциальной формы Ω в области $\mathcal{V} \subset \xi$, если минимум функции Вейерштрасса (19) достигается в каждой точке $(t, x) \in \mathcal{V}$ при $\frac{Dx}{Dt} = g$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Таким образом, для геодезического поля наклонов функция Вейерштрасса $\mathcal{E}\left(t, x, \frac{Dx}{Dt}, g\right)$ неотрицательна при фиксированных (t, x) относительно изменения производных в окрестности точки $\frac{Dx}{Dt} = g$. Неотрицательность функции Вейерштрасса допускает следующую геометрическую интерпретацию.

Напомним, что преобразование Лежандра в случае однократного интеграла и преобразование Вейля в случае кратного интеграла описывают функцию $f\left(\cdot, \cdot, \frac{Dx}{Dt}\right)$ с помощью опорных плоскостей к ее графику $f: \mathbb{R}^{n\nu} \rightarrow \mathbb{R}$. В отличие от этого, определяемые ниже преобразования $\mathcal{Z}_k$ будут описывать f с помощью k -полилинейных (по переменным $\frac{\partial x^\alpha}{\partial t^i}$) опорных многообразий к графику f . Эти опорные многообразия можно рассматривать как плоскости в пространстве поливекторов размерности k .

ТЕОРЕМА 4. Если многообразие $\hat{x}(\cdot)$ погружено в геодезическое поле $g_i^\alpha(t, x)$ в области $\mathcal{V}$, то на этом многообразии достигается минимум функционала по отношению к любым другим многообразиям с той же границей, лежащим в области $\mathcal{V}$. При этом локальный минимум относительно выбора $\frac{Dx}{Dt}$ дает достаточное условие слабого минимума функционала; глобальный минимум по $\frac{Dx}{Dt}$ дает достаточное условие сильного минимума.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство стандартно следует из инвариантности интеграла и неотрицательности функции Вейерштрасса в соответствующих областях.

Обратим внимание на то, что в этой теореме не предполагается, что поле $g_i^\alpha(t, x)$ интегрируемо, и, тем не менее, погружение в геодезическое поле наклонов дает минимум для одного отдельно взятого многообразия.

Если поле интегрируемо, то через каждую точку области $\mathcal{V}$ проходит многообразие, с наклоном, определяемым полем, которое, в силу теоремы 2, дает минимум и а fortiori является экстремалью. Тем самым в интегрируемом случае многообразие $\hat{x}(\cdot)$ погружается в поле экстремалей. Через каждую точку области $\mathcal{V}$ проходит одна и только одна n -мерная экстремаль, дающая минимум функционалу. Эти экстремали трансверсально пересекаются n -мерным семейством ν -мерных поверхностей уровня функций действия $S^i = \text{Const}$ (условия трансверсальности будут найдены ниже в разделе 5). Описанный геометрический объект в немецкой классической литературе по вариационному исчислению носит название “совершенная фигура” (eine vollständige Figur).

4. Условие разрешимости

Найдем условие минимума функции $\mathcal{E}$ в точке g . Для этого первая производная в точке g должна быть равна нулю. Дифференцируем по $\frac{dx^\lambda}{dt^m}$. Этот аргумент входит только в m -й столбец каждого из определителей, и производ-

ная будет равна тому же определителю, в котором m -й столбец заменен на

$$\frac{n}{k} \hat{p}_\lambda^i.$$

Разлагая определитель по этому столбцу, получаем

$$p_\lambda^l - \frac{1}{C_n^k \hat{f}^{k-1}} \sum_{|K|=k, K \ni l} \sum_{i \in K} \left(\text{adj}_i^l(C(K)) \frac{n}{k} \hat{p}_\lambda^i \right) = 0. \quad (21)$$

Через $C(K)$ обозначена матрица определителя, отвечающая главному минору с индексом K в формуле (19). Через $\text{adj}_i^l(C(K))$ обозначен вектор (при меняющемся i) из алгебраических дополнений (с соответствующими знаками) к столбцу l матрицы $C(K)$. Через $\text{adj}_{ij}^{lm}(C(K))$ обозначим алгебраическое дополнение (адьюнкт) к минору, стоящему в столбцах (l, m) и в строках (i, j) матрицы $C(K)$. Таким же образом, вторая производная функции $\mathcal{E}$ в точке g на множестве $(n\nu \times n\nu)$ -матриц получится заменой двух столбцов на коэффициенты при соответствующих $\frac{dx}{dt}$. Разлагая вторые производные по паре столбцов (l, m) , получаем условие минимума: квадратичная форма с коэффициентами

$$\frac{\partial^2 f}{\partial q_\lambda^l \partial q_m^\mu} - \frac{1}{C_n^k \hat{f}^{k-1}} \sum_{|K|=k, K \ni (l, m)} \sum_{(i, j) \in K} \frac{n^2}{k^2} (\text{adj}_{ij}^{lm}(C(K))) [\hat{p}_\lambda^i \hat{p}_\mu^j - \hat{p}_\lambda^j \hat{p}_\mu^i] \quad (22)$$

на пространстве $(n\nu \times n\nu)$ -матриц должна быть неотрицательна. Преобразуем коэффициенты квадратичной формы (22), которые добавляются к первому слагаемому

$$\frac{\partial^2 f}{\partial q_\lambda^l \partial q_m^\mu}. \quad (23)$$

Если минор $\text{adj}_{ij}^{lm} C(K)$ не главный, т.е. если $(l, m) \neq (i, j)$, то после подстановки в него $q = g$ возникнет нулевая строка или столбец, что даст нуль. Если же $(l, m) = (i, j)$, то после подстановки возникнет диагональная матрица с диагональю $\hat{f}$, что даст $\text{adj}_{ij}^{ij} C(K) = \hat{f}^{k-2}$. В результате все слагаемые рассматриваемого коэффициента оказываются одинаковыми. Число этих слагаемых равно числу миноров K , содержащих пару индексов (l, m) , т.е. равно C_{n-2}^{k-2} . Окончательно получаем

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial q_\lambda^l \partial q_m^\mu} = \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial q_\lambda^l \partial q_m^\mu} - \frac{n(k-1)}{k(n-1)\hat{f}} (p_\lambda^l p_\mu^m - p_\mu^l p_\lambda^m) > 0. \quad (24)$$

Выражение $(p_\lambda^l p_\mu^m - p_\mu^l p_\lambda^m)$ определяет кососимметрическую форму, и она обращается в нуль на матрицах ранга 1. Следовательно, ее добавление не нарушает необходимого условия Адамара–Лежандра. Формула (24) показывает, какие именно кососимметрические формы ранга 1 следует добавить к подинтегральной функции для получения инвариантных дифференциальных форм различного порядка k .

5. Условия трансверсальности

Рассмотрим задачу минимизации функционала (1) с переменной границей ∂V . Можно, например, считать, что край искомого решения $\hat{x}(\cdot)$ должен принадлежать некоторому фиксированному многообразию $\mathcal{X}$. Минимум в этой задаче, очевидно, удовлетворяет необходимым условиям оптимальности для задачи с фиксированной границей. Найдем дополнительные необходимые условия, связанные с возможностью варьирования границы.

Пусть каждая точка многообразия $\hat{x}(\cdot)$ сдвигается в пространстве (t, x) по траекториям какого-нибудь векторного поля $T^i(t, x)$, $X^\alpha(t, x)$, касательного к многообразию $\mathcal{X}$. Обозначим через θ время сдвига по соответствующим траекториям. Решение системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{t} = T(t, x), \\ \dot{x} = X(t, x) \end{cases} \quad (25)$$

с начальными условиями $(t_0, x_0) \in \hat{x}(\cdot)$ обозначим через $\mathcal{T}(\theta; t_0, x_0)$, $\mathfrak{X}(\theta; t_0, x_0)$. Через $h(t)$ обозначим производные x по параметру θ при фиксированном t :

$$h(t) = \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial \theta}(0; t, \hat{x}(t)).$$

После подстановки $\mathcal{T}(\theta)$, $\mathfrak{X}(\theta)$ получаем функцию $\mathcal{F}(\theta)$. Найдем

$$\frac{d}{d\theta} \mathcal{F}(0) = \int_V \left(\hat{f}_{x^\alpha} h^\alpha + \hat{f}_{\partial x^\alpha / \partial t^i} \frac{\partial h^\alpha}{\partial t^i} \right) dt^I + \int_{\partial V} \hat{f} T_\nu dS. \quad (26)$$

Здесь T_ν – проекция вектора T на ν (на нормаль к границе ∂V), а dS – элемент объема этой границы. Проинтегрируем по частям слагаемое, содержащее производную от функции h . Получим под знаком интеграла по V левую часть уравнения Эйлера на $\hat{x}(\cdot)$, которая дает нуль, а под знаком интеграла по ∂V добавится слагаемое $\hat{f}_{\partial x^\alpha / \partial t^i} h^\alpha (-1)^{i-1} dt^{I \setminus i}$. Выразим h^α в точках ∂V через компоненты векторного поля T , X .

Дифференцируя тождество $\mathfrak{X}(\theta) = x(\mathcal{T}(\theta), \theta)$, получаем

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial \theta} + \frac{\partial \hat{x}^\alpha}{\partial t^j} \frac{\partial t^j}{\partial \theta} = X^\alpha,$$

или

$$h^\alpha = X^\alpha - \frac{\partial \hat{x}^\alpha}{\partial t^j} T^j. \quad (27)$$

Подставим (27) в (26) и учтем, что $T_\nu dS = T^i (-1)^{i-1} dt^{I \setminus i}$. Получим

$$\frac{d}{d\theta} \mathcal{F}(0) = \int_{\partial V} \left[\hat{f}_{\partial x^\alpha / \partial t^i} X^\alpha + \left(\hat{f} \delta_j^i - \hat{f}_{\partial x^\alpha / \partial t^i} \frac{\partial \hat{x}^\alpha}{\partial t^j} \right) T^j \right] (-1)^{i-1} dt^{I \setminus i}. \quad (28)$$

ТЕОРЕМА 5. *Необходимое условие оптимальности для задачи с переменной границей имеет вид*

$$\hat{f}_{\partial x^\alpha / \partial t^i} X^\alpha + \left(\hat{f} \delta_j^i - \hat{f}_{\partial x^\alpha / \partial t^i} \frac{\partial \hat{x}^\alpha}{\partial t^j} \right) T^j = 0$$

для любого векторного поля $T(t, x)$, $X(t, x)$, касательного к многообразию $\mathcal{X}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для некоторого касательного в точке (t_0, x_0) к $\mathcal{X}$ вектора $T(t_0, x_0)$, $X(t_0, x_0)$ условие теоремы нарушено. Тогда можно гладко продолжить этот вектор до касательного к $\mathcal{X}$ поля, отличного от нуля лишь в достаточно малой окрестности точки (t_0, x_0) . Для вариации, соответствующей сдвигу по этому полю, будем иметь

$$\frac{d}{d\theta} \mathcal{F}(0) < 0,$$

что противоречит минимальности $\hat{x}$. Теорема доказана.

Условия трансверсальности определяют n условий на выбор экстремального вектора смещения (T, X) , т. е. число условий равно числу функций действия. Выясним смысл этих условий в случае $k = n$ (случай Каратеодори). Имеем

$$\int_V f dt^I = \int_V \det \left\| \frac{\partial S^i}{\partial t^j} + \frac{\partial S^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial t^j} \right\| dt^I.$$

Обозначим матрицу, стоящую под знаком детерминанта, через F , а через a_s^r обозначим матрицу, фигурирующую в условиях трансверсальности:

$$a_s^r = f \delta_s^r - f \sum_{i=1}^n (F^{-1})_i^r \frac{\partial S^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial t^s}.$$

Условия трансверсальности имеют вид

$$a_s^r T^s + p_\alpha^r X^\alpha = 0.$$

В нашем случае

$$\left[f \delta_s^r - f \sum_{i=1}^n (F^{-1})_i^r \frac{\partial S^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial t^s} \right] T^s + f \sum_{i=1}^n (F^{-1})_i^r \frac{\partial S^i}{\partial x^\alpha} X^\alpha = 0.$$

Делим на f и умножаем слева на матрицу F_r^m :

$$\left[F_s^m - \frac{\partial S^m}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial t^s} \right] T^s + \frac{\partial S^m}{\partial x^\alpha} X^\alpha = 0.$$

Подставляя значение F , получаем

$$\frac{\partial S^m}{\partial t^s} T^s + \frac{\partial S^m}{\partial x^\alpha} X^\alpha = 0,$$

и, значит, вектор (T, X) лежит на пересечении поверхностей $S^m = \text{Const}$.

6. Обобщения преобразований Лежандра, Вейля, Каратеодори

Как и для классического преобразования Лежандра, мы фиксируем значения (t, x) . Эти значения не будут упоминаться в формулах, и под $f(q)$ всегда будет пониматься $f(t, x, q)$. Напомним, что

$$q_i^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial t^i}$$

– это основной аргумент функции f , а

$$p_\alpha^i = \frac{\partial f}{\partial q_i^\alpha}$$

– соответствующий момент. Обозначим k -ю внешнюю степень матрицы R , т. е. матрицы, составленной из миноров k -го порядка матрицы R , через $\Lambda^k R$. Часть функции Вейерштасса, отвечающую инвариантному интегралу (16), запишем в виде

$$\tilde{\Delta} = \frac{1}{C_n^k f^{k-1}} \operatorname{tr} \Lambda^k \left\| \hat{f} \delta_j^i + \frac{n}{k} p_\alpha^i q_j^\alpha \right\|. \quad (29)$$

В силу леммы 1, выражение для $\tilde{\Delta}$ естественно связать с функцией

$$\tilde{\mathfrak{S}} = \operatorname{tr} \Lambda^k \left\| \frac{\partial S^i}{\partial t^j} + \sum_{\alpha=1}^{\nu} \frac{\partial S^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial t^j} \right\|. \quad (30)$$

Каноническая переменная, которая вместо q_i^α будет играть роль независимой переменной в строящемся аналоге преобразования Лежандра, должна быть связана с $\frac{\partial S^i}{\partial x^\alpha}$. Имея в виду это обстоятельство, введем матрицу, которая в строящемся аналоге преобразования Лежандра–Вейля–Каратеодори будет играть роль новой независимой переменной:

$$(q^*)^\alpha_i(t, x, q) = \left(\frac{\partial \tilde{\Delta}}{\partial q_i^\alpha} \right)^t. \quad (31)$$

Мы совершаем транспонирование для того, чтобы, как и прежде, нижний индекс отвечал дифференцированию по t и, тем самым, обозначался латинской буквой.

Дифференцируя (29), имеем

$$(q^*)^\mu_m = \frac{1}{C_n^k f^{k-1}} \frac{n}{k} [(p)^t]^\mu_l \sum_{K \ni (m, l)} \left(\operatorname{adj}_l^m \left\| \hat{f} \delta_j^i + \frac{n}{k} p_\alpha^i q_j^\alpha \right\|_K \right)^t.$$

Нижний индекс K у матрицы означает, что ее элементы берутся только с индексами из мультииндекса K . С помощью сопрягающей матрицы

$$[A^{-1}]^l_m = \frac{1}{C_n^k f^{k-1}} \sum_{K \ni (m, l)} \left(\operatorname{adj}_l^m \left\| \hat{f} \delta_j^i + \frac{n}{k} p_\alpha^i q_j^\alpha \right\|_K \right) \frac{n}{k} \quad (32)$$

запишем $(q^*)^\mu_m$ в виде

$$(q^*)^\mu_m = [p^t]^\mu_l [A^{-1}]^l_m. \quad (33)$$

Заметим, что A зависит от q .

Каноническую функцию, соответствующую функции f , обозначим через

$$H = f^*(q^*) = \gamma(\tilde{\Delta} - f). \quad (34)$$

Определение этой функции будет дано ниже в формуле (38). Выразим в канонических координатах дифференциальную форму Ω , отвечающую функции $\tilde{\Delta}$. Прежде всего вынесем за знак формы функцию $f^*(q^*)$. Каждый простой поливектор в сумме по индексам K ($|K| = k$) записывается в виде произведения k дифференциальных форм первого порядка. Выделим в каждой из них слагаемое dt^i ($i \in K$). Число простых поливекторов равно C_n^k , и мы сократим Ω на этот числовой множитель. Далее учтем, что коэффициент у q_i^α должен равняться $\hat{f}_{q_i^\alpha}$. Следовательно, коэффициенты при dx^α в сомножителях каждого

из мономов должны содержать число C_{n-1}^{k-1} – число миноров K , содержащих индекс i . С учетом того, что мы сокращаем на C_n^k , этот множитель становится равным $\frac{n}{k}$. В результате под интегралом получится полилинейная по переменным q_i^α функция, производная которой по q_m^μ дает $[(q^*)^t]_\mu^m$. Следовательно, она совпадает с функцией Δ . Мы приходим к рассмотрению дифференциальной формы

$$\Omega = H \sum_{|K|=k} (-1)^{r(K)} \left(\prod_{i \in K} \left(dt^i + \sum_{\alpha=1}^{\nu} \frac{n[(q^*)^t]_\alpha^i}{kH} dx^\alpha \right) dt^{I \setminus K} \right). \quad (35)$$

Отнормируем введенные переменные, положив

$$Q_\alpha^i = \frac{n[(q^*)^t]_\alpha^i}{kH}. \quad (36)$$

Формула (35) примет вид

$$\Omega = H \sum_{|K|=k} (-1)^{r(K)} \left(\prod_{i \in K} \left(dt^i + \sum_{\alpha=1}^{\nu} Q_\alpha^i dx^\alpha \right) dt^{I \setminus K} \right). \quad (37)$$

Условие (21) минимума функции Вейерштрасса можно записать в виде уравнения $p_\alpha^i = \frac{\partial \Delta}{\partial q_i^\alpha}$, или $q^* = p^t A^{-1}$. При выполнении условия (24) можно разрешить уравнение (31) относительно q и найти зависимость $q = q(q^*)$.

Введем преобразование $\mathcal{Z}_k$, следуя подходу Каратеодори.

Рассмотрим множество четверок $\{f, \phi, q_i^\alpha, p_\alpha^i\}$, удовлетворяющих условиям

$$f + \phi = \tilde{\Delta}.$$

Введем сопрягающую матрицу A с помощью формулы (32). (В силу условия разрешимости (24) матрица A на экстремали должна быть невырождена.) Тогда, в силу (33), получаем

$$\frac{\partial \tilde{\Delta}}{\partial q_m^\mu} = [p^t]_\mu^i [A^{-1}]_m^i.$$

Обозначим через γ скалярный коэффициент

$$\gamma = \frac{f^{k-2}}{\det A}.$$

Величины, отвечающие образам четверки при преобразовании $\mathcal{Z}_k$, будем помечать верхним индексом $*$. Определим преобразование $\mathcal{Z}_k$ формулами

$$f^* = \gamma \phi, \quad \phi^* = \gamma f, \quad p^* = \gamma A q^t, \quad q^* = p^t A^{-1}. \quad (38)$$

Преобразованной функцией будет $f^*(q^*)$.

ТЕОРЕМА 6. Преобразование $\mathcal{Z}_k: f(q) \mapsto f^*(q^*)$ бирациональное и инволютивное.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Бирациональность $\mathcal{Z}_k$ очевидна.

Докажем инволютивность. Поскольку

$$q^* p^* = \gamma (p^t A^{-1})(A q^t) = \gamma p^t q^t$$

и определитель при транспонировании матрицы не меняется, получаем

$$\tilde{\Delta}^* = \gamma \tilde{\Delta} \quad (39)$$

Умножив формулу $f + \phi = \tilde{\Delta}$ на γ , получим $f^* + \phi^* = \tilde{\Delta}^*$.

Матрица A^{-1} определяется при дифференцировании по q функции (29). Поэтому матрица $(A^{-1})^*$ будет определяться при дифференцировании по q^* матрицы

$$\frac{1}{C_n^k(f^*)^{k-1}} \operatorname{tr} \Lambda^k \left\| (f^*) \delta_j^i + \frac{n}{k} (p^*)_\alpha^i (q^*)_j^\alpha \right\|.$$

В силу формул (38), (39), эта матрица равна

$$\frac{\gamma}{C_n^k f^{k-1}} \operatorname{tr} \Lambda^k \left\| f \delta_j^i + \frac{n}{k} p_\alpha^i q_j^\alpha \right\|^t.$$

Следовательно, $A^* = \gamma A^t$. Далее,

$$\gamma^* = \frac{(f^*)^{k-2}}{\det A^*} = \frac{\gamma^{k-2} (f)^{k-2}}{\gamma^k \det A} = \frac{1}{\gamma}.$$

Полученные формулы позволяют найти вторую итерацию преобразования $\mathcal{Z}_k$:

$$\begin{aligned} f^{**} &= \gamma^*(\phi^*) = f, & \phi^{**} &= \gamma^* f^* = \phi, \\ p^{**} &= \gamma^* A^*(q^*)^t = \gamma^* \gamma A^t (A^{-1})^t p = p, \\ q^{**} &= (p^*)^t (A^*)^{-1} = \gamma (q A^t)^t \frac{1}{\gamma} (A^{-1})^t = q. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Было бы интересно непосредственно доказать, что преобразование $\mathcal{Z}_k$ тангенциальное. В пользу этого свидетельствует то, что, в полном соответствии с инволютивностью и тангенциальностью преобразования $\mathcal{Z}_k$, форма Ω в (37) получается из дифференциальной формы, отвечающей функции (29), заменой всех переменных на двойственные к ним (в смысле преобразования $\mathcal{Z}_k$) величины.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В конструкции преобразований $\mathcal{Z}_k$ ясно просматривается связь с условием поливыпуклости функции f . Действительно, если f допускает выпуклое продолжение на пространство всех миноров $\Lambda^k \left(\frac{Dx}{Dt} \right)$, то это выпуклое продолжение можно описывать как огибающую опорных плоскостей в пространствах поливекторов любой размерности (см. замечание 3 в разделе 3). Следовательно, после добавления соответствующих слагаемых вида (24), к f можно применять преобразования $\mathcal{Z}_k$.

7. Формулы для функций действия

Сравним два выражения подынтегральной функции для инвариантного интеграла, во-первых, в терминах функций действия S :

$$\tilde{\mathfrak{S}} = \sum_{|K|=k} \det \left\| \frac{\partial S^i}{\partial t^j} + \sum_{\alpha=1}^{\nu} \frac{\partial S^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial t^j} \right\|, \quad (40)$$

и, во-вторых, в терминах исходной подынтегральной функции f , записанной как подынтегральное выражение для дифференциальной формы Ω (37):

$$H \sum_{|K|=k} \left(\prod_{i \in K} \left(1 + \sum_{\alpha=1}^{\nu} Q_{\alpha}^i \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial t^i} \right) \right). \quad (41)$$

Разложим каждый из определителей формулы (40) в сумму его столбцов и соберем вместе члены с определителями одинакового порядка. Для записи соответствующей формулы положим, что $J \subset K$ – мультииндекс, состоящий из индексов, включенных в K , а Ξ – мультииндекс того же порядка, что и J , из набора $\{1, 2, \dots, \nu\}$. Тогда

$$\tilde{\Theta} = \sum_{|K|=k} \left(\left| \frac{\mathcal{D}[S^K]}{\mathcal{D}[t^K]} \right| + \sum_{s=1}^{\min(k, \nu)} \sum_{|J|=|\Xi|=s} \left(\left| \frac{\mathcal{D}[S^{K \setminus J}]}{\mathcal{D}[t^{K \setminus J}]} \right| \left| \frac{\mathcal{D}[S^J]}{\mathcal{D}[x^{\Xi}]} \right| \left| \frac{\mathcal{D}[x^{\Xi}]}{\mathcal{D}[t^J]} \right| \right) \right). \quad (42)$$

Перемножим скобки под знаком произведения в формуле (37) и учтем, что якобиан $\frac{\mathcal{D}[x^{\Xi}]}{\mathcal{D}[t^J]}$ равен коэффициенту, возникающему при выражении dx^{Ξ} через dt . Сравнивая (37) с (42), получаем серию формул

$$\begin{aligned} \sum_{|K|=k} \left| \frac{\mathcal{D}[S^K]}{\mathcal{D}[t^K]} \right| &= H, \\ \sum_{K \ni i} \left| \frac{\mathcal{D}[S^K]}{\mathcal{D}[t^{K \setminus i} x^{\alpha}]} \right| &= H \sum_{K \ni i} Q_{\alpha}^i. \end{aligned} \quad (43)$$

Наконец, для того чтобы записать общую формулу, конкретизируем обозначения. Фиксируем множества $J = \{j_1, \dots, j_s\}$ и $\Xi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$. Тогда

$$\sum_{K \supset J} \left| \frac{\mathcal{D}[S^K]}{\mathcal{D}[t^{K \setminus J} x^{\Xi}]} \right| = H \sum_{K \supset J} \det \|Q_{\Xi}^J\|.$$

В последней формуле подразумевается, что под знаком детерминанта подставлены $j \in J$, $\alpha \in \Xi$. Выражения $\frac{\mathcal{D}[S^K]}{\mathcal{D}[t^{K \setminus J} x^{\Xi}]}$ представляют собой плюккеры координаты k -мерных поливекторов, составленных из градиентов (по всем, как по зависимым, так и по независимым, аргументам (x^{α}, t^i)) функций действия S^i . Итак, канонические переменные H и Q определяют суммы плюккеро-вых координат для градиентов функций действия в расслоении ξ . В конструкции Вейля ($k = 1$) это обычные одномерные векторы-градиенты; в конструкции Каратеодори – это один поливектор максимальной размерности n .

Найдем теперь соответствующие выражения через исходную функцию f . Напомним, что

$$\tilde{\Delta} = \sum_{|K|=k} \frac{1}{C_n^k f^{k-1}} \det \left\| f \delta_j^i + \frac{n}{k} \sum_{\alpha=1}^{\nu} (p_{\alpha}^i q_j^{\alpha}) \right\|. \quad (44)$$

Проведем с определителями в формуле (44) ту же операцию, что и с функцией (40). Разложим каждый из определителей в сумму его столбцов и соберем вместе члены с определителями одинакового порядка.

Подсчитаем сначала коэффициенты при соответствующих минорах. Коэффициент при f под знаком суммы по K равен C_n^k , и в сумме содержится столько же одинаковых слагаемых. Значит, суммарный коэффициент равен 1. Коэффициент при $f^0 p_\alpha^i \frac{\partial x^\alpha}{\partial t^i}$ под знаком суммы по K равен C_{n-1}^{k-1} , и в сумме содержится столько же одинаковых слагаемых, так как это как раз число k -наборов, содержащих индекс i . Значит, суммарный коэффициент также равен 1. Но слагаемых, содержащих пару индексов (i, j) , будет C_{n-2}^{k-2} , и коэффициент при $f^{-1} \frac{\mathcal{D}[x^{\alpha, \beta}]}{\mathcal{D}[t^{i, j}]}$ равен $\frac{k-1}{n-1}$. Для общего члена коэффициент при $f^{-s+1} \frac{\mathcal{D}[x^\Xi]}{\mathcal{D}[t^J]}$ равен $\frac{C_{n-s}^{k-s}}{C_{n-1}^{k-1}}$. Минор, составленный из элементов $\frac{\partial f}{\partial p_\alpha^i}$ при $\alpha \in \Xi$, $i \in J$, будем обозначать через

$$\frac{\mathcal{D}[f]}{\mathcal{D}[p_\Xi^J]}.$$

Получаем формулу

$$\tilde{\Delta} = f + p_\alpha^i \frac{\partial x^\alpha}{\partial t^i} + \sum_{s=2}^{\min(k, \nu)} \sum_{|J|=|\Xi|=s} \left(f^{-s+1} \frac{C_{n-s}^{k-s}}{C_{n-1}^{k-1}} \left| \frac{\mathcal{D}[f]}{\mathcal{D}[p_\Xi^J]} \right| \left| \frac{\mathcal{D}[x^\Xi]}{\mathcal{D}[t^J]} \right| \right). \quad (45)$$

Приравнявая коэффициенты при $\frac{\mathcal{D}[x^\Xi]}{\mathcal{D}[t^J]}$ в формулах (44) и (45), получим уравнения для функций действия через функцию f .

8. Канонические уравнения

Аналоги уравнения Якоби естественнее всего записываются в канонических переменных, т. е. в терминах плюккеровых координат поливекторов, составленных из градиентов функций действия по координатам q_i^α в расслоении ξ . Для получения этих уравнений достаточно выписать условия замкнутости дифференциальной формы Ω :

$$\Omega = H \sum_{|K|=k} (-1)^{r(K)} \left(\prod_{i \in K} \left(dt^i + \sum_{\alpha=1}^{\nu} Q_\alpha^i dx^\alpha \right) dt^{I \setminus K} \right).$$

Имеем

$$\begin{aligned} d\Omega = \sum_K \left(\frac{\partial H}{\partial t^m} dt^m + \frac{\partial H}{\partial x^\mu} dx^\mu \right) \left(\sum_K \prod (dt^i + Q_\alpha^i dx^\alpha) \right) \\ + H \sum_K \left(\frac{\partial Q_\mu^l}{\partial x^\lambda} dx^\lambda + \frac{\partial Q_\mu^l}{\partial t^m} dt^m \right) \prod (dt^i + Q_\alpha^i dx^\alpha) = 0. \end{aligned} \quad (46)$$

В формуле (46) все множители произведения упорядочены по dt^i , но в сомножителях, где $i \notin K$, пропускаются все слагаемые, добавляемые к dt^i . Кроме того, в сомножителях $dt^l + Q_\mu^l dx^\mu$ следует пропустить уже продифференцированные функции Q_μ^l . Приравняем к нулю коэффициенты формы $d\Omega$ при

независимых произведениях дифференциалов. Коэффициент при $dx^\mu dt^I$ равен

$$\sum_{K \ni m} \left(\frac{\partial H}{\partial x^\mu} - Q_\mu^m \frac{\partial H}{\partial t^m} - H \frac{\partial Q_\mu^m}{\partial t^m} \right) = 0. \quad (47)$$

Знак минус у двух последних членов в формуле (47) связан с необходимостью поменять местами дифференциалы dt^m и dx^μ .

Все слагаемые, стоящие под знаком суммы, одинаковы, следовательно, каждое из них равно нулю. Для более компактной записи уравнений удобно ввести оператор

$$L_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} - Q_\mu^m \frac{\partial}{\partial t^m}.$$

В терминах оператора L уравнение (47) принимает вид

$$H \frac{\partial Q_\mu^m}{\partial t^m} = L_\mu H. \quad (48)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Сокращенная запись L_α не случайна. С эвристической точки зрения удобно представлять себе Q_α^i как производную от t^i по x^α , не обращая внимания на несоответствие размерностей. Тогда оператор

$$L_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} - Q_\alpha^m \frac{\partial}{\partial t^m}$$

– это как бы полная производная по x^α с учетом воображаемой зависимости $t(x)$.

Перепишем уравнение (48) в другой форме, подставив в него $Q_\mu^m = \frac{n[(q^*)^t]_\mu^m}{kH}$. Получаем

$$\frac{n}{k} H \frac{\partial [(q^*)^t]_\mu^m}{\partial t^m} - \frac{n}{k} [(q^*)^t]_\mu^m \frac{\partial H}{\partial t^m} = H \frac{\partial H}{\partial x^\mu} - H Q_\mu^m \frac{\partial H}{\partial t^m}.$$

Вторые слагаемые в левой и правой частях последнего уравнения взаимно уничтожаются, и в результате уравнение (48) приобретает вид

$$\frac{n \partial [(q^*)^t]_\mu^m}{k \partial t^m} = \frac{\partial H}{\partial x^\mu}. \quad (49)$$

В силу определения функции H (34), используя инволютивность преобразования $\mathcal{Z}_k$, получим

$$-\frac{\partial H}{\partial [(q^*)^t]_\mu^m} = q_m^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial t^m}. \quad (50)$$

Объединяя (49) и (50), получаем систему

$$\begin{cases} \frac{n}{k} \frac{\partial [(q^*)^t]_\mu^m}{\partial t^m} = \frac{\partial H}{\partial x^\mu}, \\ \frac{\partial x^\mu}{\partial t^m} = -\frac{\partial H}{\partial [(q^*)^t]_\mu^m}. \end{cases} \quad (51)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Напомним, что уравнения Эйлера были получены приравнением к нулю коэффициента при $dx^\lambda dt^l$ дифференциальной формы $d\Delta$. Формула (49) также получена путем приравнивания к нулю того же коэффициента той же формы, но только записанной в канонических переменных (в плюккеровых координатах градиентов функций действия S^i). Поэтому систему уравнений (51) естественно считать канонической формой уравнений Эйлера. При этом, так же как и в классическом случае, уравнение (50), по существу, следует из определения функций H и q^* . Вид канонической системы один и тот же для любого k , однако сам гамильтониан, так же как и функция q^* , зависит от выбираемого инвариантного интеграла.

9. Необходимые и достаточные условия замкнутости формы Ω

Вычислим коэффициент при $dx^\mu dx^\lambda dt^{l \setminus l}$ в (46).

Слагаемое $\frac{\partial H}{\partial t^m} dt^m$ рождает два члена. У одного из них, полученного умножением на $Q_\mu^l Q_\lambda^m$, дифференциал dt^m стоит на первом месте, дифференциал dx^μ выбираем на месте с номером m в произведении дифференциалов, а дифференциал dx^λ – на месте с номером l . Для необходимого упорядочения понадобится l перестановок. У второго наоборот: dx^μ выбираем на месте с номером l , а dx^λ – на месте с номером m . Для него понадобится $l - 1$ перестановка. В результате эти два члена примут вид

$$(-1)^l \frac{\partial H}{\partial t^m} (Q_\lambda^l Q_\mu^m - Q_\mu^l Q_\lambda^m).$$

Слагаемое $\frac{\partial H}{\partial x^\mu} dx^\mu$ также рождает два члена. Аналогичными рассуждениями убеждаемся, что их сумма принимает вид

$$(-1)^l \left(\frac{\partial H}{\partial x^\lambda} Q_\mu^l - \frac{\partial H}{\partial x^\mu} Q_\lambda^l \right).$$

Слагаемое $\frac{\partial Q_\mu^l}{\partial x^\lambda} dx^\lambda$ в (46) порождает следующую пару членов:

$$(-1)^l H \left(\frac{\partial Q_\mu^l}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial Q_\lambda^l}{\partial x^\mu} \right).$$

И, наконец, слагаемое $\frac{\partial Q_\mu^l}{\partial t^m} dt^m$ порождает четвертую пару членов

$$(-1)^l H \left(\frac{\partial Q_\lambda^l}{\partial t^m} Q_\mu^m - \frac{\partial Q_\mu^l}{\partial t^m} Q_\lambda^m \right).$$

При фиксированном l выражение, стоящее под знаком суммы по мультииндексу K , не зависит от K , поэтому сумма всех четырех пар членов равна нулю. Получаем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial H}{\partial t^m} (Q_\lambda^l Q_\mu^m - Q_\mu^l Q_\lambda^m) + \left(\frac{\partial H}{\partial x^\lambda} Q_\mu^l - \frac{\partial H}{\partial x^\mu} Q_\lambda^l \right) \\ & + H \left(\frac{\partial Q_\mu^l}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial Q_\lambda^l}{\partial x^\mu} \right) + H \left(\frac{\partial Q_\lambda^l}{\partial t^m} Q_\mu^m - \frac{\partial Q_\mu^l}{\partial t^m} Q_\lambda^m \right) = 0. \end{aligned} \quad (52)$$

Используя определение оператора L и группируя должным образом слагаемые, записываем формулу (52) в виде

$$Q_\mu^l L_\lambda(H) + H L_\lambda(Q_\mu^l) - Q_\lambda^l L_\mu(H) - H L_\mu(Q_\lambda^l) = 0.$$

Поскольку L – дифференциальный оператор первого порядка, для него справедливо правило Лейбница дифференцирования произведения. Поэтому последняя формула принимает вид

$$L_\lambda(Q_\mu^l H) - L_\mu(Q_\lambda^l H) = 0.$$

Учитывая определение $Q_\alpha^i = \frac{n(q^*)_\alpha^i}{kH}$, получаем окончательную формулу

$$L_\lambda(q^*)_\mu^l = L_\mu(q^*)_\lambda^l, \quad (53)$$

являющуюся естественным обобщением условия потенциальности вектора импульса в одномерном вариационном исчислении. Поэтому условимся называть уравнение (53) условием потенциальности.

Результаты последующих вычислений по той же схеме приведем, слегка сокращая подробности обоснования.

Вычислим коэффициент при $dx^\mu dx^\lambda dx^\rho dt^{I \setminus \{l, m\}}$ в (46).

Слагаемое $\frac{\partial H}{\partial t^m} dt^m$ в (46) рождает шесть членов:

$$\begin{aligned} (-1)^m \frac{\partial H}{\partial t^m} (Q_\rho^m Q_\mu^l Q_\lambda^r - Q_\rho^m Q_\lambda^l Q_\mu^r + Q_\lambda^m Q_\rho^l Q_\mu^r \\ - Q_\lambda^m Q_\mu^l Q_\rho^r + Q_\mu^m Q_\lambda^l Q_\rho^r - Q_\mu^m Q_\rho^l Q_\lambda^r). \end{aligned} \quad (54)$$

Слагаемое $\frac{\partial H}{\partial x^\mu} dx^\mu$ также рождает шесть членов:

$$(-1)^l \left(\frac{\partial H}{\partial x^\mu} (Q_\lambda^l Q_\rho^r - Q_\rho^l Q_\lambda^r) + \frac{\partial H}{\partial x^\lambda} (Q_\rho^l Q_\mu^r - Q_\mu^l Q_\rho^r) + \frac{\partial H}{\partial x^\rho} (Q_\mu^l Q_\lambda^r - Q_\lambda^l Q_\mu^r) \right). \quad (55)$$

Слагаемое $H \frac{\partial Q_\mu^l}{\partial x^\lambda} dx^\lambda$ рождает двенадцать членов:

$$\begin{aligned} \left(H \frac{\partial Q_\lambda^l}{\partial x^\mu} Q_\rho^r + H \frac{\partial Q_\rho^r}{\partial x^\mu} Q_\lambda^l \right) - \left(H \frac{\partial Q_\rho^l}{\partial x^\mu} Q_\lambda^r + H \frac{\partial Q_\lambda^r}{\partial x^\mu} Q_\rho^l \right) \\ + \left(H \frac{\partial Q_\rho^l}{\partial x^\lambda} Q_\mu^r + H \frac{\partial Q_\mu^r}{\partial x^\lambda} Q_\rho^l \right) - \left(H \frac{\partial Q_\mu^l}{\partial x^\lambda} Q_\rho^r + H \frac{\partial Q_\rho^r}{\partial x^\lambda} Q_\mu^l \right) \\ + \left(H \frac{\partial Q_\mu^l}{\partial x^\rho} Q_\lambda^r + H \frac{\partial Q_\lambda^r}{\partial x^\rho} Q_\mu^l \right) - \left(H \frac{\partial Q_\lambda^l}{\partial x^\rho} Q_\mu^r + H \frac{\partial Q_\mu^r}{\partial x^\rho} Q_\lambda^l \right). \end{aligned} \quad (56)$$

Слагаемое $H \frac{\partial Q_\mu^l}{\partial t^m} dt^m$ также рождает двенадцать членов:

$$\begin{aligned} & H Q_\lambda^m \left(\frac{\partial Q_\mu^l}{\partial t^m} Q_\rho^r + \frac{\partial Q_\rho^r}{\partial t^m} Q_\mu^l \right) - H Q_\lambda^m \left(\frac{\partial Q_\rho^l}{\partial t^m} Q_\mu^r + \frac{\partial Q_\mu^r}{\partial t^m} Q_\rho^l \right) \\ & + H Q_\mu^m \left(\frac{\partial Q_\rho^l}{\partial t^m} Q_\lambda^r + \frac{\partial Q_\lambda^r}{\partial t^m} Q_\rho^l \right) - H Q_\mu^m \left(\frac{\partial Q_\lambda^l}{\partial t^m} Q_\rho^r + \frac{\partial Q_\rho^r}{\partial t^m} Q_\lambda^l \right) \\ & + H Q_\rho^m \left(\frac{\partial Q_\lambda^l}{\partial t^m} Q_\mu^r + \frac{\partial Q_\mu^r}{\partial t^m} Q_\lambda^l \right) - H Q_\rho^m \left(\frac{\partial Q_\mu^l}{\partial t^m} Q_\lambda^r + \frac{\partial Q_\lambda^r}{\partial t^m} Q_\mu^l \right). \end{aligned} \quad (57)$$

Собирая вместе все слагаемые (54)–(57) и используя определение оператора L_α , получаем

$$L_\mu [H(Q_\lambda^l Q_\rho^r - Q_\rho^l Q_\lambda^r)] + L_\lambda [H(Q_\rho^l Q_\mu^r - Q_\mu^l Q_\rho^r)] + L_\rho [H(Q_\mu^l Q_\lambda^r - Q_\lambda^l Q_\mu^r)] = 0. \quad (58)$$

Отметим, что выражение (58) не зависит от мультииндекса K и при суммировании по K оно встретится столько же раз, сколько наборов K содержит набор $\{l, r\}$ в качестве поднабора. Именно поэтому в правой части формулы (58) стоит нуль.

Для получения общей формулы рассмотрим два мультииндекса

$$J = \{i_1, \dots, i_s\} \subset \{1, 2, \dots, n\} \quad \text{порядка } s$$

и

$$\Xi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{s+1}\} \subset \{1, 2, \dots, n\} \quad \text{порядка } s+1.$$

Вычислим коэффициент формы $d\Omega$ при члене $dx^\Xi dt^{I \setminus J}$. Фиксируем индекс $\mu \in \Xi$.

Слагаемое $\frac{\partial H}{\partial x^\mu} dx^\mu$ в (46) дает члены, которые состоят из произведений s сомножителей, полученных из слагаемых вида $Q_\alpha^i dx^\alpha$, где $\alpha \in \Xi \setminus \mu$. Значения индекса i обязательно надо выбирать из мультииндекса J , так как иначе возникнет сомножитель dt^i , который не включен в рассматриваемое произведение дифференциалов. При этом каждый индекс $\alpha \in \Xi \setminus \mu$ и $i \in J$ надо брать только один раз, и, более того, перестановка пары индексов α_i и α_j приводит к перестановке дифференциалов dx_i^α и dx_j^α , т. е. к изменению знака коэффициента при $\frac{\partial H}{\partial x^\mu}$. Поэтому при упорядочении произведений дифференциалов появляется знак, соответствующий четности перестановки. Этим условиям удовлетворяет только детерминант

$$\det \|Q_{\Xi \setminus \mu}^J\|, \quad (59)$$

составленный из элементов Q_α^i , где $i \in J$, $\alpha \in \Xi \setminus \mu$. Для фиксации знака, с которым берется этот детерминант, достаточно определить знак одного конкретного слагаемого из его разложения.

Коэффициенты у членов, полученных от слагаемого $\frac{\partial H}{\partial t^m} dt^m$ в (46), дают члены, которые состоят из произведений s сомножителей, полученных из слагаемых вида $Q_\alpha^m dx^\alpha$ с верхним индексом m (чтобы не возник уже имеющийся

дифференциал dt^m). Повторяя вышеприведенную аргументацию, убеждаемся, что сумма всех таких дифференциалов имеет коэффициентом

$$\sum_{\mu=1}^{\nu} \frac{\partial H}{\partial t^m} Q_{\mu}^m \det \|Q_{\Xi \setminus \mu}^J\|. \quad (60)$$

Объединяя (59) и (60), получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{\mu=1}^{\nu} \left(\frac{\partial H}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial H}{\partial t^m} Q_{\mu}^m \right) \det \|Q_{\Xi \setminus \mu}^J\| dx^{\Xi} dt^{I \setminus J} \\ &= \sum_{\mu=1}^{\nu} L_{\mu}(H) \det \|Q_{\Xi \setminus \mu}^J\| dx^{\Xi} dt^{I \setminus J}. \end{aligned} \quad (61)$$

Вновь зафиксируем индекс μ и соберем слагаемые, получаемые из членов $\frac{\partial Q_{\lambda}^l}{\partial x^{\mu}} dx^{\mu}$ в (46). Коэффициенты при них образуют алгебраические дополнения элементов Q_{λ}^l в матрице $\|Q_{\Xi \setminus \mu}^J\|$ с натуральным циклическим упорядочением элементов строк и столбцов. Выражение, полученное после их умножения на $\frac{\partial Q_{\lambda}^l}{\partial x^{\mu}}$ и суммирования, дает производную по x^{μ} от детерминанта. В результате получается выражение

$$\sum_{\mu=1}^{\nu} H \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} (\det \|Q_{\Xi \setminus \mu}^J\|) dx^{\Xi} dt^{I \setminus J}. \quad (62)$$

Слагаемые, полученные из $\frac{\partial Q_{\mu}^l}{\partial t^m} dt^m$ в (46), по тем же соображениям образуют производную того же детерминанта по t^m , что приводит к следующему выражению:

$$\sum_{\mu=1}^{\nu} H Q_{\mu}^m \frac{\partial}{\partial t^m} (\det \|Q_{\Xi \setminus \mu}^J\|) dx^{\Xi} dt^{I \setminus J}. \quad (63)$$

Сумма выражений (62) и (63) дает действие оператора L_{μ} на соответствующий детерминант. Объединяя (61), (62) и (63), получаем

$$\sum_{\mu=1}^{\nu} \left(L_{\mu}(H) \det \|Q_{\Xi \setminus \mu}^J\| dx^{\Xi} dt^{I \setminus J} + H L_{\mu}(\det \|Q_{\Xi \setminus \mu}^J\|) dx^{\Xi} dt^{I \setminus J} \right).$$

Эти выражения не зависят от мультииндекса K , следовательно, они обращаются в нуль.

Доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 7. *Необходимое и достаточное условие замкнутости дифференциальной формы Ω (37) имеет вид*

$$\sum_{\mu=1}^{\nu} \left(L_{\mu}(H) \det \|Q_{\Xi \setminus \mu}^J\| dx^{\Xi} dt^{I \setminus J} + H L_{\mu}(\det \|Q_{\Xi \setminus \mu}^J\|) dx^{\Xi} dt^{I \setminus J} \right) = 0 \quad (64)$$

при любых наборах Ξ, J .

10. Связность и кривизна (локальная теория)

Для того чтобы найти связность, порождаемую полем экстремалей, вернемся к канонической системе (51):

$$\begin{cases} \frac{n}{k} \frac{\partial x^\mu}{\partial t^m} = -\frac{\partial H}{\partial [(q^*)^t]_\mu^m}, \\ \frac{\partial [(q^*)^t]_\mu^m}{\partial t^m} = \frac{\partial H}{\partial x^\mu}. \end{cases}$$

Рассмотрим производные по параметрам от решения этой системы:

$$\frac{n}{k} \frac{\partial [(q^*)^t]_\mu^m}{\partial \eta^\sigma} = U_{\mu\sigma}^m, \quad \frac{\partial x^\lambda}{\partial \eta^\sigma} = V_\sigma^\lambda. \quad (65)$$

Здесь параметры η^σ отвечают координатам слоя (например, можно взять значение функции $x(t)$ при $t = t_0$). Естественнее всего считать η^σ координатами стандартного слоя расслоения ξ . Уравнения в вариациях в окрестности некоторого решения $\hat{x}(\cdot)$, $\hat{q}^*(\cdot)$ имеют вид

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t^m} = -\hat{H}_{q^*x}V - \hat{H}_{q^*q^*}U, \\ \frac{\partial U^m}{\partial t^m} = \hat{H}_{xx}V + \hat{H}_{xq^*}U. \end{cases} \quad (66)$$

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1. Пусть U, V решение уравнений в вариациях (66) канонической системы, отвечающей уравнениям Эйлера, определенное в некоторой области $\mathfrak{N}$ пространства переменных t .

Предположим, что матрица V определена и обратима в $\mathfrak{N}$.

Рассмотрим в области $\mathfrak{N}$ матрицы W^m , $m = 1, \dots, n$, определяемые формулами $W_{\mu\rho}^m = U_{\mu\sigma}^m (V_\sigma^\rho)^{-1}$. Дифференцируя W^m , получаем

$$\frac{\partial}{\partial t^m}(UV^{-1}) = \hat{H}_{xx}VV^{-1} + \hat{H}_{xq^*}UV^{-1} + UV^{-1}(\hat{H}_{q^*x}V + \hat{H}_{q^*q^*}U)V^{-1}.$$

Подставляя сюда определение W , получаем уравнение Риккати в частных производных [28] для второй вариации функционала (1), соответствующее выбору гамильтониана H :

$$\frac{\partial W^m}{\partial t^m} = \hat{H}_{xx} + \hat{H}_{xq^*}W + W\hat{H}_{q^*x} + W\hat{H}_{q^*q^*}W. \quad (67)$$

Это уравнение определяет изменение k -лагранжевых плоскостей с координатами $W_{\rho\sigma}^m(t)$ вдоль экстремальной поверхности $\hat{x}(t)$ (ср. [29], [30]).

ТЕОРЕМА 8. Пусть $\mathcal{L}$ – гладкое слоение на расслоенном пространстве ξ , порожденное инвариантным интегралом $\mathfrak{S}$, слои которого диффеоморфно проектируются на некоторую область $\mathfrak{N}$ пространства переменных t . Пусть выполнено предположение 1. Тогда функции

$$W_{\rho\sigma}^m = \frac{\partial}{\partial x^\rho} \left\{ \sum_{K \ni (m,l)} \text{adj}_m^l \left\| \frac{\partial S^i}{\partial t^j} + \frac{\partial S^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial t^j} \right\|_K^t \frac{\partial S^l}{\partial x^\mu} \right\} \quad (68)$$

определяют решение уравнения Риккати (67).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Матричные функции

$$U_{\rho\beta}^m = \frac{n}{k} \frac{\partial (q^*)_{\rho}^m}{\partial \eta^{\beta}}$$

определяют производные от q^* по координатам стандартного слоя. Матрица V задает оператор дифференцирования отображения из текущего слоя в стандартный слой расслоения ξ . Невырожденность матрицы V означает, что это отображение определяет диффеоморфизм, и обратное отображение задается матрицей

$$(V^{-1})_{\sigma}^{\beta} = \frac{\partial \eta^{\beta}}{\partial x^{\sigma}}.$$

Композиция UV^{-1} дает

$$\frac{\partial [(q^*)_{\rho}^t]^m}{\partial \eta^{\beta}} \frac{\partial \eta^{\beta}}{\partial x^{\sigma}} = \frac{\partial [(q^*)_{\rho}^t]^m}{\partial x^{\sigma}}.$$

В силу формулы (31),

$$[(q^*)^t]_{\alpha}^i(t, x, q) = \frac{\partial \tilde{\Delta}}{\partial q_i^{\alpha}}.$$

Функции $\tilde{\Delta}$ и $\tilde{\Theta}$ – это просто различная запись одной и той же подынтегральной функции. Следовательно,

$$\frac{\partial \tilde{\Delta}}{\partial q_i^{\alpha}} = \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial q_i^{\alpha}},$$

откуда и следует утверждение теоремы.

СЛЕДСТВИЕ 1. В случае $k = 1$ для преобразования Вейля [21] из формулы (68) получаем, что гессианы компонент вектора действия

$$W = UV^{-1} = \frac{\partial^2 S^m}{\partial x^{\rho} \partial x^{\sigma}}$$

дают решение уравнения Риккати (67).

Покажем, что решение (68) определяет связность в расслоении ξ . С этой целью удобно вернуться от канонических переменных к лагранжевым. Поскольку преобразование $\mathcal{Z}$ инволютивно, надо сделать еще одно преобразование $\mathcal{Z}$ над квадратичной ашпроксимацией гамильтониана, порождающей систему уравнений в вариациях (66):

$$\delta^2 H = \frac{1}{2} ((H_{q^* q^*} U, U) + 2(H_{q^* x} U, V) + (H_{xx} V, V)). \quad (69)$$

В качестве новой переменной надо взять производную от (69) по V :

$$H_{q^* q^*} U + H_{q^* x} V.$$

Тогда W перейдет в

$$\mathfrak{Y}_{i\beta}^{\alpha} = (H_{q^* q^*} U + H_{q^* x} V) V^{-1} = H_{q^* q^*} W + H_{q^* x}. \quad (70)$$

В качестве дифференциальной формы связности мы рассмотрим

$$\zeta^{\alpha} = dx^{\alpha} - \mathfrak{Y}_{i\beta}^{\alpha} x^{\beta} dt^i. \quad (71)$$

Оператор ковариантного дифференцирования, ассоциированный с формой связности (71), имеет вид

$$\nabla_{v^i} x^\alpha = v^i \frac{\partial x^\alpha}{\partial t^i} - v^i \mathfrak{Y}_{i\beta}^\alpha x^\beta. \quad (72)$$

Оператор проектирования касательных векторов (dt, dx) в точке (t, x) расслоения ξ на слой имеет вид

$$(dt^i, dx^\alpha) \mapsto (0, dx^\alpha - \mathfrak{Y}_{i\beta}^\alpha x^\beta dt^i).$$

Горизонтальными векторами связности ∇ являются векторы (dt, dx) , которые лежат в ядре этого оператора: $dx - \mathfrak{Y}_i x dt^i = 0$. Следовательно, горизонтальная компонента вектора (dt, dx) есть вектор

$$(dt, \mathfrak{Y}_i x dt^i). \quad (73)$$

Коммутатор двух матриц A и B будем, как обычно, обозначать $[A, B]$.

ТЕОРЕМА 9. *Тензор кривизны связности ∇ равен*

$$\mathfrak{K} = \frac{\partial \mathfrak{Y}_i}{\partial t^j} - \frac{\partial \mathfrak{Y}_j}{\partial t^i} - [\mathfrak{Y}_i, \mathfrak{Y}_j]. \quad (74)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что формой кривизны связности называется внешняя ковариантная производная от формы связности ζ [31]. Внешней ковариантной производной $D\zeta$ называется значение внешней производной $d\zeta$ на горизонтальных компонентах векторов (dt, dx) . Вычислим ее:

$$d\zeta = -\mathfrak{Y}_\alpha^{m\beta} dx^\beta \wedge dt^m + \left(\frac{\partial}{\partial t^j} \mathfrak{Y}_{i\beta}^\alpha dt^i \wedge dt^j - \frac{\partial}{\partial t^i} \mathfrak{Y}_{j\beta}^\alpha dt^i \wedge dt^j \right).$$

Подставляя сюда горизонтальную компоненту вектора (dt, dx) , получаем (74). Теорема доказана.

Связность, кривизна которой равна нулю, называется плоской.

ТЕОРЕМА 10. *Пусть выполнено предположение 1. Тогда связность ∇ , порожденная полем экстремалей, плоская.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Преобразуем формулу (70):

$$\mathfrak{Y} = (H_{q^*q^*} U + H_{q^*x} V) V^{-1} = -\frac{\partial V}{\partial t^m} V^{-1}. \quad (75)$$

Подставляя в (74), получаем

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial^2 V}{\partial t^i \partial t^j} V^{-1} + \frac{\partial V}{\partial t^i} V^{-1} \frac{\partial V}{\partial t^j} V^{-1} - \left(-\frac{\partial^2 V}{\partial t^j \partial t^i} V^{-1} + \frac{\partial V}{\partial t^j} V^{-1} \frac{\partial V}{\partial t^i} V^{-1} \right) \\ & -\frac{\partial V}{\partial t^i} V^{-1} \frac{\partial V}{\partial t^j} V^{-1} + \frac{\partial V}{\partial t^j} V^{-1} \frac{\partial V}{\partial t^i} V^{-1} = 0. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Таким образом, мы показали, что поле экстремалей определяет в данной карте плоскую связность. Наличие поля приводит к тому, что распределение горизонтальных плоскостей оказывается интегрируемым, и интегральные поверхности этого распределения определяют полный набор горизонтальных сечений расслоения ξ .

11. Примеры

В качестве примера рассмотрим стандартное расслоение Хопфа $S^3 \rightarrow S^2$, при котором S^3 реализуется в пространстве $\mathbb{C}^2$ как единичная сфера: $(z_1, z_2; w_1, w_2)$, $|z|^2 + |w|^2 = 1$. Для каждой точки (z, w) слои расслоения Хопфа определяются как большие окружности $\{e^{i\phi}z, e^{i\phi}w\}$. Центральная проекция π из центра сферы на касательную плоскость P в точке северного полюса $(1, 0; 0, 0)$ превращает P в трехмерное проективное пространство $\mathbb{RP}^3$ с координатами (η, ζ_1, ζ_2) , соответствующими трем последним координатам плоскости P . Аффинная часть $\mathbb{RP}^3$ может рассматриваться как карта $\mathfrak{A}$ северной полусферы сферы S^3 . Метрика в пространстве $\mathbb{RP}^3$, индуцированная проекцией, имеет вид

$$ds^2 = (1 + \eta^2 + \zeta_1^2 + \zeta_2^2)^{-2} ((d\eta)^2 + (d\zeta_1)^2 + (d\zeta_2)^2).$$

При проекции π слои проектируются в прямые (одно из семейств прямолинейных образующих множества однополостных гиперboloидов, являющихся проекциями торов в S^3). Получаем на P семейство геодезических $\mathfrak{P}$, причем через каждую точку P проходит одна и только одна геодезическая. Каждая геодезическая дает абсолютный минимум длины в классе кривых, лежащих в карте $\mathfrak{A}$. Покажем, что не существует функции действия, которая бы одновременно синхронизировала все экстремали множества $\mathfrak{P}$. Действительно, слои расслоения Хопфа в пространстве $\mathbb{C}^2$ получаются одновременным поворотом на один и тот же угол φ в плоскостях z и w . Точка $(1, \eta; \zeta_1, \zeta_2)$ переходит при этом в точку

$$A = ((\cos \varphi + \eta \sin \varphi), (\sin \varphi - \eta \cos \varphi), (\zeta_1 \cos \varphi + \zeta_2 \sin \varphi), (\zeta_1 \sin \varphi - \zeta_2 \cos \varphi)).$$

Образ точки A в $\mathbb{RP}^3$ получается нормированием по первой координате:

$$\left(\frac{\sin \varphi - \eta \cos \varphi}{\cos \varphi + \eta \sin \varphi}, \frac{\zeta_1 \cos \varphi + \zeta_2 \sin \varphi}{\cos \varphi + \eta \sin \varphi}, \frac{\zeta_1 \sin \varphi - \zeta_2 \cos \varphi}{\cos \varphi + \eta \sin \varphi} \right).$$

Касательные векторы X к слоям получаются дифференцированием по φ при $\varphi = 0$, следовательно, $X = ((1 + \eta^2), (-\eta\zeta_1 + \zeta_2), (\zeta_1 + \eta\zeta_2))$. Условие трансверсальности при $n = 1$ – это условие ортогональности для метрики, индуцированной на P проекцией π . Семейство ортогональных площадок к векторам X отвечает нулям дифференциальной формы $\xi = (1 + \eta^2) d\eta + (-\eta\zeta_1 + \zeta_2) d\zeta_1 + (\zeta_1 + \eta\zeta_2) d\zeta_2$. Однако $\xi \wedge d\xi \neq 0$ и форма ξ не является интегрируемой, что служит препятствием к построению функции действия. Следовательно, $\mathfrak{P}$ не образует поля экстремалей и многообразие $\mathfrak{P} \subset TP$ не является лагранжевым.

Аналогичная ситуация имеет место для кватернионного расслоения Хопфа $S^7 \rightarrow S^4$ [26]. Оно реализуется как единичная сфера $\{(z, w) : \|z\|^2 + \|w\|^2 = 1\}$ в двумерном кватернионном пространстве $\mathbb{H}^2$. Слой, проходящий через точку (z, w) , определяется как совокупность $\{\sigma z, \sigma w\}$, где σ пробегает множество единичных кватернионов $\|\sigma\| = 1$. Легко проверяется, что каждый слой является центральным сечением сферы S^7 . Через каждую точку проходит одна и только одна из этих сфер. Проекция π из центра на касательную плоскость P в точке северного полюса $(1, 0, 0, 0; 0, 0, 0, 0)$ сферы S^7 превращает P в семимерное проективное пространство $\mathbb{RP}^7$ с координатами $(\eta_1, \eta_2, \eta_3; \zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$,

соответствующими семи последним координатам плоскости P . Метрика в пространстве $\mathbb{R}P^7$, индуцированная проекцией π , имеет вид

$$ds^2 = (1 + (\eta)^2 + (\zeta)^2)^{-2} ((d\eta)^2 + (d\zeta)^2).$$

Проекция π переводит слои в семейство $\mathfrak{P}$ трехмерных плоскостей. Через каждую точку проходит одна и только одна плоскость. Каждая из этих плоскостей является в $\mathbb{R}P^7$ минимальным многообразием, дающим абсолютный минимум функционалу трехмерного объема в классе вариаций, лежащих в рассматриваемой карте. Нормирование по первой координате определяет параметрические уравнения плоскостей $\mathfrak{P}$:

$$\eta_i(\sigma) = (\sigma z)_0^{-1}(\sigma z)_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad \zeta_j(\sigma) = (\sigma z)_0^{-1}(\sigma w)_j \quad (j = 0, 1, 2, 3).$$

Заметим, что элемент k -мерного объема задается длиной k -мерного поливектора в метрике, являющейся k -й тензорной степенью метрики объемлющего пространства [32]. В рассматриваемой ситуации функция, стоящая под интегралом, равна

$$f = (1 + \eta^2 + \zeta^2)^{-3} \sqrt{\sum_{|I|+|J|=3} \left| \frac{D(\eta^I \zeta^J)}{D(\sigma)} \right|^2}.$$

Функция f не является выпуклой по производным, и конструкция Вейля к ней неприменима. Однако если рассмотреть f как функцию от якобианов

$$\left| \frac{D(\eta^I \zeta^J)}{D(\sigma)} \right|,$$

то она выпукла. Следовательно, можно применить развитую выше теорию, взяв $k = 3$.

Применив условие трансверсальности из раздела 5, можно проверить, что распределение трехмерных плоскостей, трансверсальных к слоям кватернионного расслоения Хопфа, не является интегрируемым. Семейство $\mathfrak{P}$ не образует поля экстремалей и не определяет 3-лагранжева многообразия. Выкладки в этом случае существенно более длинные и здесь мы их не приводим.

Можно вычислить дифференциальную форму связности распределения нормальных касательных плоскостей к слоям расслоения Хопфа и соответствующую ей форму кривизны. Следует ожидать, что в результате получится класс Чжена расслоения Хопфа.

Было бы интересно рассмотреть экзотические семимерные сферы Милнора, для которых слои являются трехмерными сферами, полученными действием единичных кватернионов σ на $S^7 \subset \mathbb{H}^2$ по закону $\{\sigma z, \sigma^h w \sigma^j\}$, где $h + j = 1$ (см. [33]). Здесь имеется дополнительная трудность, связанная с нахождением явного выражения для метрик на этих сферах.

Список литературы

- [1] А. Т. Фоменко, *Вариационные методы в топологии*, Наука, М., 1982, 344 с.; англ. пер.: А. Т. Fomenko, *Variational principles of topology. Multidimensional minimal surface theory*, Mathematics and its Applications (Soviet Series), **42**, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1990, ISBN: 0-7923-0230-3, xviii+374 pp.

- [2] A. Clebsch, “Über die zweite Variation vielfacher Integrale”, *J. Reine Angew. Math.*, 1859, № 56, 122–148.
- [3] J. Hadamard, “Sur quelques questions de calcul des variations”, *Bull. Soc. Math. France*, **33** (1905), 73–80.
- [4] F. J. Terpstra, “Die Darstellung biquadratischer Formen als Summen von Quadraten mit Anwendung auf die Variationsrechnung”, *Math Ann.*, **116**:1 (1938), 166–180.
- [5] D. Serre, “Condition de Legendre–Hadamard: espaces de matrices des rang $\neq 1$ ”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **293** (1981), 23–26.
- [6] D. Serre, “Formes quadratiques et calcul des variations”, *J. Math. Pures Appl.* (9), **62**:2 (1983), 177–196.
- [7] C. B. Morrey, *Multiple integrals in the calculus of variations*, Grundlehren Math. Wiss., **130**, Springer-Verlag, New York, 1966, 506 pp.
- [8] J. M. Ball, F. Murat, “ $W^{1,p}$ -quasiconvexity and variational problems for multiple integrals”, *J. Funct. Anal.*, **58**:3 (1984), 225–253.
- [9] E. Giusti, “Direct methods in the calculus of variations”, *Frontiers in physics, high technology and mathematics* (Trieste, 1989), World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1990, 130–147.
- [10] E. Silverman, “A sufficient condition for the lower semicontinuity of parametric integrals”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **167** (1972), 465–469.
- [11] J. M. Ball, “Remarks on the paper ‘Basic calculus of variations’”, *Pacific J. Math.*, **116**:1 (1985), 7–10; <http://projecteuclid.org/euclid.pjm/1102707243>.
- [12] L. van Hove, “Sur l’extension de la condition de Legendre du calcul des variations aux intégrales multiples à plusieurs fonctions inconnues”, *Proc. Akad. Wet. Amsterdam*, **50** (1947), 18–23.
- [13] R. Denne Meyer, “Conjugate surfaces for multiple integral problems in the calculus of variations”, *Pacific J. Math.*, **30**:3 (1969), 621–638; <http://projecteuclid.org/euclid.pjm/1102978247>.
- [14] Дж. Саймонс, “Минимальные поверхности в римановых многообразиях”, *Математика*, **16**:6 (1972), 60–104; пер. с англ.: J. Simons, “Minimal varieties in Riemannian manifolds”, *Ann. Math.* (2), **88**:1 (1968), 62–105.
- [15] S. Smale, “On the Morse index theorem”, *J. Math. Mech.*, **14**:6 (1965), 1049–1055.
- [16] R. C. Swanson, “Fredholm intersection theory and elliptic boundary deformation problems. I”, *J. Differential Equations*, **28**:2 (1978), 189–201; “Fredholm intersection theory and elliptic boundary deformation problems. II”, *J. Differential Equations*, **28**:2 (1978), 202–219.
- [17] K. Uhlenbeck, “The Morse index theorem in Hilbert space”, *J. Differential Geom.*, **8**:4 (1973), 555–564; <http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1214431958>.
- [18] M. Giaquinta, S. Hildebrandt, *Calculus of variations*. I, Grundlehren Math. Wiss., **310**, Springer-Verlag, Berlin, 1996, ISBN: 3-540-50625-X, xxx+474 pp.; *Calculus of variations*. II, Grundlehren Math. Wiss., **311**, 1996, ISBN: 3-540-57961-3, xxx+652 pp.
- [19] P. Funk, *Variationsrechnung und ihre Anwendungen in Physik und Technik*, Grundlehren Math. Wiss., **94**, Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1962, 676 pp.
- [20] C. Carathéodory, “Über die Variationsrechnung bei mehrfachen Integralen”, *Acta Szeged*, **4** (1929), 193–216.
- [21] H. Weyl, “Geodesic fields in the calculus of variation for multiple integrals”, *Ann. of Math.* (2), **36**:3 (1935), 607–629.
- [22] Th. De Donder, *Théorie invariante du calcul des variations*, Gauthier-Villars, Paris, 1935, 230 pp.
- [23] T. Lepage, “Sur les champs géodésiques des intégrales multiples”, *Acad. Roy. Belgique. Bull. Cl. Sci.* (5), **27** (1941), 27–46.

- [24] Н. Börner, “Über die Legendresche Bedingung und die Feldtheorien in der Variationsrechnung der mehrfachen Integrale”, *Math. Z.*, **46** (1940), 720–742.
- [25] Дж. Милнор, Дж. Сташев, *Характеристические классы*, Мир, М., 1979, 371 с.; пер. с англ.: J. W. Milnor, J. D. Stasheff, *Characteristic classes*, Ann. Math. Stud., **76**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ; Univ. of Tokyo Press, Tokyo, 1974, vii+331 pp.
- [26] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия*, Наука, М., 1979, 760 с.; англ. пер.: B. A. Dubrovin, A. T. Fomenko, S. P. Novikov, *Modern geometry. Methods and applications. Part I*, Grad. Texts in Math., **93**, Springer-Verlag, New York, 1984, ISBN: 0-387-90872-2, 464 pp.; *Modern geometry. Methods and applications. Part II. The geometry and topology of manifolds*, Grad. Texts in Math., **104**, Springer-Verlag, New York, 1985, ISBN: 0-387-96162-3, 430 pp.
- [27] А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров, *Теория экстремальных задач*, Наука, М., 1974, 479 с.; англ. пер.: A. D. Ioffe, V. M. Tihomirov, *Theory of extremal problems*, Stud. Math. Appl., **6**, North-Holland, Amsterdam–New York, 1979, ISBN: 0-444-85167-4, 460 pp.
- [28] М. I. Zelikin, *Control theory and optimization. I. Homogeneous spaces and the Riccati equation in the calculus of variations*, Encyclopaedia Math. Sci., **86**, Springer-Verlag, Berlin, 2000, ISBN: 3-540-66741-5, xii+284 pp.
- [29] М. И. Зеликин, *Однородные пространства и уравнение Риккати в вариационном исчислении*, Факториал, М., 1998, ISBN: 5-88688-022-4, 351 с.
- [30] М. И. Зеликин, “Гессиан решения уравнения Гамильтона–Якоби в теории экстремальных задач”, *Матем. сб.*, **195**:6 (2004), 57–70; англ. пер.: M. I. Zelikin, “Hessian of the solution of the Hamilton–Jacobi equation in the theory of extremal problems”, *Sb. Math.*, **195**:6 (2004), 819–831.
- [31] Ш. Кобаяси, К. Номидзу, *Основы дифференциальной геометрии*, **I**, Наука, М., 1981, 344 с.; пер. с англ.: Sh. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, **I**, Interscience Publishers, New York–London, 1963, 329 pp.; **II**, Наука, М., 1981, 415 с.; пер. с англ.: Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, **15**, Interscience Publishers, New York–London–Sydney, 1969, 470 pp.
- [32] П. К. Рашевский, *Риманова геометрия и тензорный анализ*, 3-е изд., Наука, М., 1967, 664 с.
- [33] J. Milnor, “On manifolds homeomorphic to the 7-sphere”, *Ann. of Math. (2)*, **64**:2 (1956), 399–405.

М. И. Зеликин (M. I. Zelikin)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН;

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: mzelikin@mtu-net.ru

Поступила в редакцию

14.09.2010