Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Гетце, Ю. В. Прохоров, В. В. Ульянов, Оценки для характеристических функций многочленов от асимптотически нормальных случайных величин, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 2, 3–26

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm943>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 17:21:42

УДК 519.2

ОЦЕНКИ ДЛЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МНОГОЧЛЕНОВ
ОТ АСИМПТОТИЧЕСКИ НОРМАЛЬНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Ф. ГЕТЦЕ, Ю. В. ПРОХОРОВ, В. В. УЛЬЯНОВ

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение и обозначения	3
2. Основные результаты	4
3. Леммы	8
4. Доказательство теоремы 1	19
5. Доказательство теоремы 2	21
6. Доказательство теоремы 3	22
7. Доказательство теоремы 5	22
8. Доказательство теоремы 6	23
9. Доказательство теоремы 7	24
Список литературы	25

1. Введение и обозначения

Пусть через $X = (X^{(1)}, \dots, X^{(k)})$ обозначен случайный вектор со значениями в k -мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^k$. Рассмотрим последовательность $X_1, X_2, \dots$ независимых копий X . Пусть

$$S_n = n^{-1/2}(X_1 + \dots + X_n)$$

и $S_n = (S_n^{(1)}, \dots, S_n^{(k)})$.

В этой работе мы изучаем характеристическую функцию

$$g_n(t, a) = \mathbb{E} \exp\{it f(S_n + a)\}, \quad a \in \mathbb{R}^k,$$

при больших значениях n и t , где

$$f(x) = \sum_{m_1=0}^m \dots \sum_{m_k=0}^m \alpha(m_1, \dots, m_k) (x^{(1)})^{m_1} \dots (x^{(k)})^{m_k}, \quad m \geq 2.$$

Работа выполнена при поддержке Исследовательского центра 343 в Билефельдском университете, ФРГ; работа третьего автора была поддержана также Фондом им. А. Гумбольта, ФРГ.

Оценки для $g_n(t, a)$ можно получить, используя так называемое неравенство симметризации (см. [1], [2], в частности следствие 3.26 и замечание после него в [2], относящееся к работе Вейля [3]; см. также [4]). Например, в случае $k = 1$ такой подход приведет к следующему неравенству (ср. леммы 3.1, 4.1, 4.2 в [5]). Пусть

$$f(x) = \alpha x^m + \alpha_{m-1} x^{m-1} + \dots + \alpha_0.$$

Для произвольной случайной величины X , положительных чисел A, ε и любого целого $m \geq 2$ существуют положительные постоянные c_1 и c_2 , зависящие от A, ε, m и распределения X такие, что для всех $a \in \mathbb{R}^1$

$$(1) \quad |g_n(t, a)| \leq c_1 (n^{-A} + |\alpha t|^{-1/(m2^m)})$$

при условии, что

$$(2) \quad c_2 |\alpha t| \leq n^{(m-1)/2-\varepsilon}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если случайный вектор X имеет дискретное распределение, то, как известно, $g_n(t, a)$ является почти периодической функцией (см., например, [6, с. 6] и [7, с. 26]) и поэтому

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |g_n(t, a)| = 1.$$

Следовательно, $|t|$ должно изменяться в конечном интервале, зависящем от n и f .

Цель настоящей работы – показать, что степень $1/(m2^m)$ при $|t|^{-1}$ в (1) можно заменить большим значением в следующих двух случаях:

- а) распределение X имеет невырожденную дискретную компоненту (см. теоремы 1 и 2 ниже),
- б) при некотором n_0 распределение суммы S_{n_0} имеет абсолютно непрерывную компоненту (см. теоремы 3 и 4).

Кроме этого получены оценки для $|\mathbb{E} \exp\{it f(Y + a)\}|$, где Y – гауссовское распределение в $\mathbb{R}^k$ (см. теоремы 5, 6 и 7).

Наши доказательства опираются на неравенства для тригонометрических сумм и интегралов. В случае а) мы используем оценки типа Виноградова для тригонометрических сумм (см. [8] и лемму 6 ниже).

В случае б) применяется неравенство Виноградова для тригонометрических интегралов (см. лемму 4, гл. 2, в [9]) и его обобщения на многомерный случай (см. лемму 4 ниже). Наши уточнения оценки (1) аналогичны по форме тем улучшениям, к которым приводил метод Виноградова для тригонометрических сумм по сравнению с результатами Вейля (см. введение в [9]).

2. Основные результаты

Пусть P, P_1, P_2 обозначают три вероятностные меры в $\mathbb{R}^k$ и γ – положительное число, $0 < \gamma \leq 1$. Мера P_1 называется *компонентой* меры P с *весом* γ , если

$$P = \gamma P_1 + (1 - \gamma) P_2.$$

В теоремах 1 и 2 рассматривается одномерный случай и многочлены вида

$$f(x) = \alpha x^m + \alpha_{m-1} x^{m-1} + \dots + \alpha_0, \quad m \geq 2.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $X_1, X_2, \dots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины с распределением, имеющим компоненту P_1 такую, что для некоторых чисел $a_1 < a_2$ имеем

$$P_1\{a_1\} = P_1\{a_2\} = \frac{1}{2}.$$

Пусть δ , $0 < \delta \leq 1$, обозначает вес компоненты P_1 . Положим

$$\beta_m = \frac{1}{12(m-1)^2 \ln(m-1)}.$$

Тогда для всех n , $n > 4/\delta$, и $m > \hat{c}$

$$(3) \quad \sup_{a \in \mathbb{R}^1} |\mathbb{E} \exp\{it f(S_n + a)\}| \leq 2 \exp(-n\delta^2/8) + 15\tilde{c}(m)(n\delta)^{-\beta_m} (\ln n)^{3/2} \\ + 17(a_2 - a_1)^{-m/(m-1)} \delta^{-1/2} \left(\frac{\sqrt{n}}{|\alpha t|} \right)^{1/(m-1)}$$

при условии, что

$$(4) \quad 0 < |\alpha t| \leq \left[\frac{\pi}{3m\sqrt{\delta} (a_2 - a_1)^m} (\ln n)^{-1/2} \right] n^{(m-1)/2},$$

где постоянные $\hat{c}$ и $\tilde{c}(m)$ те же, что и в лемме 6 ниже.

ЗАМЕЧАНИЕ. Обозначим через L выражение, стоящее в квадратных скобках в правой части (4). Имеем

$$\left(\frac{\sqrt{n}}{|\alpha t|} \right)^{1/(m-1)} \geq |\alpha t|^{-m/(m-1)^2} L^{-1/(m-1)^2}.$$

Таким образом, последнее слагаемое в правой части (3) имеет порядок $O(|t|^{-m/(m-1)^2})$ при больших $|t|$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $X_1, X_2, \dots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины с распределением F , имеющим невырожденную дискретную компоненту. Тогда для любых $\varepsilon > 0$ и целого $m \geq 2$ существуют абсолютные постоянные c_4, c_5 и постоянные c_2, c_3 , зависящие от F, ε и m такие, что для всех $n \geq 1$ и любого t , удовлетворяющего (2), справедливо неравенство

$$(5) \quad \sup_{a \in \mathbb{R}^1} |\mathbb{E} \exp\{it f(S_n + a)\}| \leq c_3 \left(n^{-c_4/(m^2 \ln m)} + \left(\frac{\sqrt{n}}{|\alpha t|} \right)^{c_5/m} \right).$$

Рассмотрим теперь случай непрерывных компонент. Предположим, что случайный вектор Y в $\mathbb{R}^k$ имеет распределение P_Y с абсолютно непрерывной компонентой веса λ . Тогда P_Y имеет абсолютно непрерывную компоненту веса γ , $0 < \gamma < \lambda$, и такую, что плотность этой компоненты ограничена. Пусть $\gamma = \lambda/2$. Тогда (см. [10, с. 4] или [11, § 16]) распределение $P_Y * P_Y$ имеет компоненту веса $(\lambda/2)^2$ с равномерно непрерывной плотностью, скажем, $r(x)$ на $\mathbb{R}^k$. Если $r(a_0) = r_0 > 0$ при некотором a_0 , то существует η такое, что при всех x , для которых $|x - a_0| \leq \eta$, имеем $r(x) \geq r_0/2$. Следовательно, $P_Y * P_Y$ имеет компоненту, равномерно распределенную на некотором шаре.

ТЕОРЕМА 3. Пусть

$$f_0(x) = (x^{(1)})^m + \dots + (x^{(k)})^m, \quad m \geq 2,$$

и $X_1, X_2, \dots$ обозначают последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов в $\mathbb{R}^k$. Предположим, что при некотором n_0 распределение суммы $X_1 + \dots + X_{n_0}$ имеет абсолютно непрерывную компоненту. Пусть η обозначает действительное число такое, что распределение суммы $X_1 + \dots + X_{2n_0}$ имеет компоненту веса δ , равномерно распределенную на шаре $\{x : |x - a_0| \leq \eta\}$. Тогда для всех $n \geq 6n_0/\delta$

$$\sup_{a \in \mathbb{R}^k} |\mathbb{E} \exp\{it f_0(S_n + a)\}| \leq 2 \exp\left(\frac{-n\delta^2}{24n_0}\right) + c^{**}(k) \eta^{-k} (n_0\delta^{-1})^{k/2} |t|^{-k/m},$$

где

$$c^{**}(k) = \left(\frac{486}{\pi}\right)^{k/2} \left(\left(\frac{k}{2} + 1\right)^{k/2} + 2^{k+1} \Gamma^2\left(\frac{k}{2} + 1\right)\right)$$

и $\Gamma(\cdot)$ есть гамма-функция.

Для компонент с дифференцируемой плотностью получен следующий результат, близкий теореме 3.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $X_1, X_2, \dots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов в $\mathbb{R}^k$ с плотностью p такой, что

$$p = \alpha p_0 + (1 - \alpha)p_1, \quad 0 < \alpha \leq 1,$$

где p_0 непрерывно дифференцируема. Пусть

$$V_0 = \int_{\mathbb{R}^k} |\operatorname{grad} p_0(x)| dx.$$

Тогда для $n \geq 2(k+1)/\alpha$, $m \geq 2$ и $t \neq 0$

$$(6) \quad \sup_{a \in \mathbb{R}^k} |\mathbb{E} \exp\{it f_0(S_n + a)\}| \leq c(k) V_0^k \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{k/2} |t|^{-k/m} + 2 \exp\left(-\frac{\alpha^2 n}{8}\right),$$

где $c(k) = 1.1 \cdot (17.5)^k$. Если $\alpha = 1$, то второе слагаемое в правой части (6) можно опустить.

Рассмотрим теперь общий многочлен вида

$$(7) \quad f(x) = \sum_{m_1=0}^m \dots \sum_{m_k=0}^m \alpha(m_1, \dots, m_k) x_1^{m_1} \dots x_k^{m_k}$$

с $\alpha(0, \dots, 0) = 0$. Пусть M обозначает степень многочлена $f(x)$, т.е.

$$M = \max\{m_1 + \dots + m_k : \alpha(m_1, \dots, m_k) \neq 0\}.$$

Очевидно, $kt \geq M$. Определим

$$\alpha_{**}(f) = \max |\alpha(m_1, \dots, m_k)| > 0,$$

где максимум берется по всем $m_1, \dots, m_k$ таким, что

$$0 \leq m_1, \dots, m_k \leq m, \quad m_1 + \dots + m_k = M.$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть Z — случайный вектор в $\mathbb{R}^k$ с независимыми стандартными нормальными координатами $Z^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots$. Для $f(x)$, определенной в (7), с $M \geq 2$ имеем

$$\sup_{a \in \mathbb{R}^k} |\mathbb{E} \exp\{it f(Z + a)\}| \leq c_6 |\alpha_{**} t|^{-1/m} \ln^{c_7} (2 + |\alpha_{**} t|),$$

где

$$c_6 = k(2/\pi)^{1/2} + 2^{(13k-3M/m)/2} (2\pi)^{1/m-k/2} (1.25M + 1)^{k-1}$$

и $c_7 = (3k - M/m)/2 - 1 \geq 0$.

Пусть теперь

$$f_1(x) = x^{(1)} \dots x^{(k)}, \quad k \geq 2.$$

Пусть Z , как и выше, есть случайный вектор в $\mathbb{R}^k$ с независимыми стандартными нормальными координатами. Обозначим

$$w_k(t) = \mathbb{E} e^{it f_1(Z)}.$$

Легко видеть, что $w_k(t)$ есть смесь по $\sigma > 0$ характеристических функций нормальных распределений, т.е. $\exp\{-t^2/(2\sigma^2)\}$. Следовательно, $w_k(t)$ есть действительная неотрицательная четная функция, монотонно стремящаяся к нулю при $|t| \rightarrow \infty$.

ТЕОРЕМА 6. Для любого $k \geq 2$ и всех $|t| \geq 1$ имеем

$$l_k |t|^{-1} \ln^{k-2}(|t|) \leq w_k(t) \leq L_k |t|^{-1} \ln^{k-2}(2 + |t|),$$

где

$$l_k = 2^{-1/2} \left(\frac{2}{(k-2)^2 \pi e} \right)^{(k-2)/2}$$

и

$$L_{2m} = 3^{m-1}, \quad L_{2m+1} = 2.6 \cdot 3^{m-1}, \quad m \geq 1.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Применяя теорему 5, мы получим лишь

$$w_k(t) \leq c(k) |t|^{-1} \ln^{k-1}(2 + |t|).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для $k = 2, 3, 4$ справедлива (см. лемму 9 и следствие леммы 11 ниже) асимптотическая формула

$$w_k(t) = L_k^* |t|^{-1} \ln^{k-2} |t| (1 + o(1)) \quad \text{при } |t| \rightarrow \infty,$$

где L_k^* — положительная постоянная. Видимо, эта формула справедлива и при $k > 4$.

Рассмотрим теперь случай, когда многочлен в $\mathbb{R}^k$ имеет вид

$$(8) \quad f_2(x) = (x^{(1)})^{m_1} \dots (x^{(k)})^{m_k}$$

с $m_j \geq 1$, $j = 1, 2, \dots, k$.

Пусть, как и выше, Z есть случайный вектор в $\mathbb{R}^k$ с независимыми стандартными нормальными координатами $Z^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots, k$.

ТЕОРЕМА 7. *Предположим, что среди $m_1, m_2, \dots, m_k$ в (8) существует единственное наибольшее число, скажем, $m = m_1$ и среди остальных m_j , $j = 2, 3, \dots, k$, существует по крайней мере одно нечетное число, скажем, m_2 . Для $0 < \theta < 1$ обозначим*

$$z_\theta = \mathbb{E}|Z^{(1)}|^{-\theta}.$$

Имеем

$$|t|^{1/m} |\mathbb{E} \exp\{it f_2(Z)\}| \uparrow c_8 \quad \text{при} \quad |t| \uparrow \infty,$$

где

$$c_8 = m^{-1} z_{1/m}^{-1} z_{(m-1)/m} z_{m_2/m} \cdots z_{m_k/m}.$$

3. Леммы

а) *Биномиальное распределение.*

ЛЕММА 1. *Для любых p , $0 \leq p \leq 1$, и $\varepsilon > 0$*

$$\sum_{|m-np| \geq n\varepsilon} \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m} \leq 2e^{-n\varepsilon^2/2}.$$

Доказательство см. в [12, р. 102].

ЛЕММА 2. *Для любого целого $n \geq 1$*

$$\max_{0 \leq m \leq n} \binom{n}{m} 2^{-n} \leq \sqrt{\frac{2}{\pi n}}.$$

Доказательство тривиально следует из формулы Стирлинга.

б) *Равномерное распределение на единичном шаре в $\mathbb{R}^k$.*

Пусть U обозначает случайный вектор в $\mathbb{R}^k$ с равномерным распределением на единичном шаре

$$|x|^2 := (x^{(1)})^2 + \dots + (x^{(k)})^2 \leq 1.$$

Его плотность, скажем, $q(x)$ дается формулой $q(x) = \Gamma(k/2 + 1) \pi^{-k/2}$, если $|x| \leq 1$, и $q(x) = 0$ в противном случае. Характеристическая функция случайного вектора U дается формулой

$$\mathbb{E} e^{i(v, U)} = \frac{\Gamma(k/2 + 1) \cdot 2^{k/2}}{|v|^{k/2}} J_{k/2}(|v|),$$

где $J_\nu(z)$ обозначает функцию Бесселя порядка ν .

Пусть

$$0 < j_{\nu,1} < j_{\nu,2} < \dots$$

есть положительные решения уравнения $J_\nu(z) = 0$. Нам нужен только случай $\nu = k/2$, $k = 1, 2, 3, \dots$. Известно (см., например, [13, §15.3]), что

$$j_{k/2,1} > \sqrt{\frac{k}{2} \left(\frac{k}{2} + 2 \right)} > \frac{k}{2}.$$

ЛЕММА 3. Для $k = 1, 2, 3, \dots$

$$(9) \quad |\mathbb{E}e^{i(v,U)}| \leq \exp\left\{-\frac{|v|^2}{2(k+2)}\right\}, \quad \text{если } |v| \leq j_{k/2,1},$$

и для $|v| > j_{k/2,1}$

$$(10) \quad |\mathbb{E}e^{i(v,U)}| \leq 0.75.$$

Кроме того,

$$(11) \quad \int_{\mathbb{R}^k} |\mathbb{E}e^{i(v,U)}|^2 dv \leq 2^k \pi^{k/2} \Gamma\left(\frac{k}{2} + 1\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем (см. [13, §15.41 и §15.51]) для всех комплексных z

$$J_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} \prod_{l=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{j_{\nu,l}^2}\right).$$

Следовательно, для любого $v \in \mathbb{R}^k$

$$(12) \quad \mathbb{E}e^{i(v,U)} = \prod_{l=1}^{\infty} (1 - |v|^2 j_{k/2,l}^{-2})$$

и

$$\sum_{l=1}^{\infty} j_{k/2,l}^{-2} = \frac{1}{2(k+2)}.$$

Отсюда и из неравенства $1 - z \leq e^{-z}$ вытекает (9).

Для $|v| \geq k/2 \geq 1/2$

$$(13) \quad |\mathbb{E}e^{i(v,U)}| \leq \frac{\Gamma(k/2+1)2^{k/2}}{|v|^{k/2}} \sqrt{\frac{2}{\pi|v|}} \left(1 - \frac{k^2}{4|v|^2}\right)^{-1/4} := G_k(|v|)$$

(см. [13, §13.74]). Для $|v| \geq j_{k/2,1}$ правая часть (13) не превосходит

$$G_k(\sqrt{(k/2)(k/2+2)}).$$

Применяя формулу Стирлинга к $\Gamma(k/2+1) = (k/2)\Gamma(k/2)$, получим

$$(14) \quad G_k\left(\sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)\left(\frac{k}{2}+2\right)}\right) \leq 2e^{-1+3/(k+4)+1/(6k)} \left(\frac{2}{e}\right)^{k/2} \left(\frac{k}{4}+1\right)^{1/4}.$$

При возрастании $k \geq 1$ правая часть (14) убывает, и для $k = 4$ она равна

$$e^{10/24} \cdot (2/e)^3 \cdot 2^{1/4} < 0.75.$$

Для $k = 2$ или 3 имеем $j_{1,1} = 3.83171 \dots$ и $j_{3/2,1} = 4.493409 \dots$ (см. [14]).

Поэтому $G_2(j_{1,1}) = 0.21654 \dots$ и $G_3(j_{3/2,1}) = 0.15307 \dots$. Далее, для $k = 1$ имеем $j_{1/2,1} = \pi$ и для $|v| \geq \pi$

$$|\mathbb{E}e^{i(v,U)}| = \left|\frac{\sin v}{v}\right| \leq \frac{1}{\pi} = 0.31830 \dots$$

Итак, (10) доказано.

Рассмотрим теперь интеграл в (11). Имеем

$$\frac{1}{(2\pi)^k} \int_{\mathbb{R}^k} |\mathbb{E}e^{i(v,U)}|^2 dv = q * q(0) \leq \sup_x q(x) = \Gamma\left(\frac{k}{2} + 1\right) \pi^{-k/2},$$

что эквивалентно (11). Тем самым доказательство леммы 3 завершено.

СЛЕДСТВИЕ ЛЕММЫ 3. Для всех целых $n \geq 2$ и r , $2 \leq r \leq n$, имеем

$$(15) \quad \int_{\mathbb{R}^k} |\mathbb{E} e^{i(v, U/\sqrt{n})}|^r dv \leq c^*(k) \left(\frac{n}{r}\right)^{k/2},$$

где

$$c^*(k) = 2^k \pi^{k/2} \left(\left(\frac{k}{2} + 1\right)^{k/2} + 2^{k+1} \Gamma^2\left(\frac{k}{2} + 1\right) \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интеграл в левой части (15) равен

$$(16) \quad n^{k/2} \int_{\mathbb{R}^k} |\mathbb{E} e^{i(v, U)}|^r dv = n^{k/2} \left(\int_{|v| < j_{k/2,1}} + \int_{|v| \geq j_{k/2,1}} \right) |\mathbb{E} e^{i(v, U)}|^r dv \\ \leq \left(\frac{n}{r}\right)^{k/2} (2\pi)^{k/2} (k+2)^{k/2} + n^{k/2} (0.75)^{r-2} 2^k \pi^{k/2} \Gamma\left(\frac{k}{2} + 1\right).$$

Заметим, что

$$(17) \quad \max_{r \geq 0} r^{k/2} (0.75)^r < 2^k \Gamma\left(\frac{k}{2} + 1\right).$$

Тогда (15) вытекает из (16) и (17).

с) *Неравенства для вероятностей больших отклонений.*

Нам нужны простые верхние оценки для $\mathbb{P}(|S'_n| > x)$ и $\mathbb{P}(|Y| > x)$, где $S'_n = n^{-1/2}(U_1 + \dots + U_n)$ и $U_1, \dots, U_n$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов, имеющих равномерное распределение на единичном шаре, т.е. $U_n \stackrel{d}{=} U$ и Y имеет гауссовское распределение с нулевым средним и невырожденной ковариационной матрицей $\Lambda = (\lambda_{j,l})$, $1 \leq j, l \leq k$. Здесь и всюду ниже запись $X \stackrel{d}{=} Z$ означает, что случайные величины X и Z одинаково распределены.

Заметим, что аналогично (12) получаем

$$\mathbb{E} \exp(v, U) = \prod_{l=1}^{\infty} (1 + |v|^2 j_{k/2,l}^{-2}) \leq \exp\left(\frac{|v|^2}{2(k+2)}\right).$$

Имеем (см. [15])

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|S'_n| > x) &\leq e^{-x^2/2} \mathbb{E} \exp(|S'_n|^2/2) \\ &= e^{-x^2/2} \mathbb{E} \left(\frac{1}{(2\pi)^{k/2}} \int_{\mathbb{R}^k} e^{(S'_n, u)} e^{-|u|^2/2} du \right) \\ &\leq e^{-x^2/2} \frac{1}{(2\pi)^{k/2}} \int_{\mathbb{R}^k} e^{|u|^2/(2(k+2)) - |u|^2/2} du \\ &= e^{-x^2/2} \left(1 - \frac{1}{k+2} \right)^{-k/2}. \end{aligned}$$

Второй сомножитель является убывающей функцией от k . Поэтому для всех $x \geq 0$ имеем

$$\mathbb{P}(|S'_n| > x) < e^{1/2 - x^2/2}.$$

Нам будет достаточно этой грубой оценки.

Для $P(|Y| > x)$ имеем

$$P(|Y| > r\sigma) \leq 2 \exp(-r^2/2),$$

где $\sigma^2 = \text{tr } \Lambda = E|Y|^2$. Эту оценку можно получить из неравенств в [16].

d) *Тригонометрические интегралы и суммы.*

Используем обозначения, введенные перед теоремой 5, в частности, рассмотрим многочлен $f(x)$ общего вида (7).

Заметим, что для любого $a \in \mathbb{R}^k$ и $f_a(x) := f(x + a)$

$$\alpha_{**}(f_a) = \alpha_{**}(f).$$

Определим дополнительно

$$\alpha_*(f) = \max_{0 \leq m_1, \dots, m_k \leq m} |\alpha(m_1, \dots, m_k)|.$$

Введем для $m > 0$, $k \geq 1$ и $\alpha > 0$

$$\lambda(\alpha) = \min(1, 32^k \alpha^{-1/m} \ln^{k-1}(\alpha + 2)).$$

Легко видеть, что $\lambda(\alpha)$ есть невозрастающая функция.

ЛЕММА 4 (см. теорему 5, §3, гл. 1 в [17]). Пусть

$$I_k(f) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \exp\{2\pi i f(x)\} dx.$$

Тогда

$$|I_k(f)| \leq \lambda(\alpha_*).$$

СЛЕДСТВИЕ 1 ЛЕММЫ 4. Для всех действительных $h > 0$ и $a \in \mathbb{R}^k$ с $k \geq 2$

$$\left| \int_{-h}^h \cdots \int_{-h}^h \exp\{it f(x + a)\} dx \right| \leq (2h)^k \lambda((2\pi)^{-1}|t|(2h)^M \alpha_{**}(f)).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $k > 1$ и многочлен $f(x)$ может быть представлен в виде суммы многочленов, зависящих от различных блоков величин, например,

$$\tilde{f}(x) = x^{(1)}(x^{(2)})^6 + (x^{(3)})^3(x^{(4)})^2,$$

то на самом деле можно получить больший показатель степени у $|t|^{-1}$ чем тот, что вытекает из следствия 1, без учета множителя вида $\ln^{k-1}(|t| + 2)$. Например, для $\tilde{f}(x)$, указанной выше, можно получить $|t|^{-1/2}$ вместо $|t|^{-1/6}$. См. также лемму 7 ниже.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Одномерный случай рассмотрен в [9].

СЛЕДСТВИЕ 2 ЛЕММЫ 4. Для $k = 1$, $m \geq 2$, $h > 0$ и любого $a \in \mathbb{R}^1$

$$(18) \quad \left| \int_{-h}^h \exp\{it \widehat{f}(x+a)\} dx \right| \leq \frac{32 \cdot (2\pi)^{1/m}}{|\alpha t|^{1/m}} < \frac{81}{|\alpha t|^{1/m}},$$

где

$$\widehat{f}(x) = \alpha x^m + \alpha_{m-1} x^{m-1} + \dots + \alpha_1 x.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В некоторых частных случаях абсолютную постоянную в правой части (18) можно заменить на меньшую.

ЛЕММА 5 (ср. (18)). Пусть $m \geq 2$ и

$$f(x) = \alpha x^m + \alpha_1 x + \alpha_0.$$

Тогда для всех действительных a, b и $t \neq 0$

$$\left| \int_a^b e^{itf(x)} dx \right| \leq 6 \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^{1/3} |\alpha t|^{-1/m} < 8.3204 \cdot |\alpha t|^{-1/m}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы ван дер Корпута в случае $m = 2$ имеем

$$\left| \int_a^b e^{itf(x)} dx \right| \leq \frac{8}{\sqrt{|t| \min |f''(x)|}} = \frac{8}{\sqrt{2} |\alpha t|^{1/2}},$$

где минимум берется по всем x , $a \leq x \leq b$.

Рассмотрим теперь случай $m \geq 3$. Пусть $h > 0$, положим

$$N = m/2, \quad \gamma = 8(m(m-1)|\alpha t|)^{-1/2}, \quad \lambda(h) = h + \gamma h^{-(N-1)}.$$

Легко видеть, что $\lambda(h)$ имеет единственный минимум в некоторой точке h_m и

$$\lambda(h_m) = d_m |\alpha t|^{-1/m},$$

где

$$d_m = \frac{m}{m-2} \left(\frac{16(m-2)^2}{m(m-1)} \right)^{1/m}.$$

Для $m \geq 3$ имеем

$$d_m \leq d_3 = 3 \left(\frac{8}{3}\right)^{1/3}.$$

Запишем для $\theta > 0$

$$I(\theta) = \int_0^\theta \exp\{it f(x)\} dx.$$

Имеем $|I(\theta)| \leq h_m$, если $0 < \theta \leq h_m$. По лемме ван дер Корпута для $\theta > h_m$

$$|I(\theta)| \leq h_m + \frac{8}{\sqrt{|t| |f''(h_m)|}} = \lambda(h_m) \leq d_3 |\alpha t|^{-1/m}.$$

Это неравенство справедливо и для $\theta < 0$. Поскольку

$$\left| \int_a^b e^{it f(x)} dx \right| \leq |I(b)| + |I(a)|,$$

лемма 5 доказана.

Для тригонометрических сумм нам потребуется следующая

ЛЕММА 6 (см. [8, предложение 4.2, §4, гл. VIII]). Пусть $P \geq 1$ и Q есть целые числа,

$$S = \sum_{Q < x \leq Q+P} \exp\{2\pi i(\alpha x^m + \alpha_{m-1}x^{m-1} + \dots + \alpha_0)\},$$

где $\alpha, \alpha_{m-1}, \dots, \alpha_0$ есть действительные числа.

Предположим, что

$$0 < 2mP|\alpha| \leq 1.$$

Тогда существует постоянная $\hat{c} \geq 3$, не зависящая от $m, P, Q, \alpha, \alpha_{m-1}, \dots, \alpha_0$, такая, что для $m \geq \hat{c}$ имеем (ниже $m_1 = m - 1$)

$$|S| \leq \tilde{c}(m)P^{1-1/(6m_1^2 \ln m_1)} \ln P + 2|\alpha|^{-1/m_1},$$

где

$$\tilde{c}(m) = 2e^{15m_1 \ln^2 m_1}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Утверждение леммы 6 можно найти также в первом издании книги Прахара (см. [8]), вышедшем в 1957 году. В обоих изданиях это одна из трех теорем, включенных в раздел “Die Methode von Vinogradoff”.

е) *Функции от случайных векторов с абсолютно интегрируемыми характеристическими функциями.*

Пусть $Y = (Y^{(1)}, \dots, Y^{(k)})$ – случайный вектор со значениями в $\mathbb{R}^k$. Обозначим $g_Y(v)$, $v = (v^{(1)}, \dots, v^{(k)})$, характеристическую функцию Y . Пусть $p_Y(x)$, $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(k)})$, обозначает плотность Y (если она существует) и Λ_Y – ковариационная матрица Y (если $E|Y|^2 < \infty$). Предположим, что

$$(19) \quad J_Y = \int_{\mathbb{R}^k} |g_Y(v)| dv < \infty.$$

Напомним некоторые простые неравенства для J_Y . Во-первых, если $g_Y(v) \geq 0$, то $J_Y = (2\pi)^k p_Y(0)$. Например, для гауссовского случайного вектора Y имеем

$$J_Y = (2\pi)^{k/2} (\det \Lambda)^{-1/2}.$$

Далее, для всех Y таких, что $E|Y|^2 < \infty$, получим (см. [18, §11.12])

$$J_Y \geq \int_{Q_Y \leq 2} \left(1 - \frac{1}{2} Q_Y(v)\right) dv = \left(\Gamma\left(\frac{k}{2} + 1\right)\right)^{-1} 2^{k/2} \pi^{k/2} (\det \Lambda)^{-1/2},$$

где

$$Q_Y(v) = E(v, Y - EY)^2.$$

Для функций от случайных векторов рассмотрим сначала два частных случая.

Случай 1.

Для целого $m \geq 2$ положим

$$f_0(x) = (x^{(1)})^m + \dots + (x^{(k)})^m.$$

ЛЕММА 7. При выполнении условия (19) имеем для любого $a \in \mathbb{R}^k$ и всех действительных $t \neq 0$

$$(20) \quad |\mathbb{E} e^{it f_0(Y+a)}| \leq 9^k (2\pi)^{-k} \left(\int_{\mathbb{R}^k} |g_Y(v)| dv \right) |t|^{-k/m}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (ср. [19]). Поскольку $|g_Y(v)| = |g_{Y+a}(v)|$, можем предполагать, что $a = 0$. Запишем

$$K(u) = \left\{ x : \max_{1 \leq j \leq k} |x^{(j)}| \leq u \right\}.$$

Тогда

$$(21) \quad \begin{aligned} & \int_{K(u)} e^{it f_0(x)} p_Y(x) dx \\ &= \int_{K(u)} e^{it f_0(x)} \left\{ \frac{1}{(2\pi)^k} \int_{\mathbb{R}^k} e^{-i(v,x)} g_Y(v) dv \right\} dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^k} \int_{\mathbb{R}^k} g_Y(v) \left\{ \prod_{j=1}^k \int_{-u}^u \exp(-iv^{(j)} x^{(j)} + it(x^{(j)})^m) dx^{(j)} \right\} dv. \end{aligned}$$

Применяя лемму 5, находим оценку сверху для модуля интеграла в левой части (21), которая не зависит от u . Устремляя u к бесконечности, получим (20).

ПРИМЕР. Если Y имеет невырожденное нормальное распределение, то для любого $a \in \mathbb{R}^k$

$$(22) \quad |\mathbb{E} \exp\{it f_0(Y+a)\}| \leq c(k, \Lambda) |t|^{-k/m},$$

где

$$c(k, \Lambda) = (2\pi)^{-k/2} 9^k (\det \Lambda_Y)^{-1/2}.$$

Заметим, что (22) было получено в следствии 8.1 в [20] другим методом и без указания вида постоянной $c(k, \Lambda)$.

В частности, при $k = 2$ имеем

$$|\mathbb{E} \exp\{it (Y^{(1)} + a^{(1)})^m + (Y^{(2)} + a^{(2)})^m\}| \leq \frac{81}{2\pi} \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} (1 - \rho^2)^{-1/2} |t|^{-2/m},$$

где σ_1 и σ_2 — стандартные отклонения $Y^{(1)}$ и $Y^{(2)}$, соответственно, и ρ — их коэффициент корреляции. Положим при $m \geq 2$

$$b_m = \begin{cases} \sqrt{2/\pi} \Gamma(1 + 1/m), & \text{если } m \text{ четно,} \\ \sqrt{2/\pi} \Gamma(1 + 1/m) \cos(\pi/(2m)), & \text{если } m \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Ясно, что $b_m < \sqrt{2/\pi}$ и $b_m \uparrow \sqrt{2/\pi}$ при $m \rightarrow \infty$.

Из неравенств для характеристических функций степеней нормальных случайных величин (см. [21]) получаем для независимых $Y^{(1)}, \dots, Y^{(k)}$ с нулевыми средними (ср. (22))

$$\sup_t |t|^{k/m} |\mathbb{E} \exp\{it f_0(Y)\}| = b_m^k \sigma_1^{-1} \dots \sigma_k^{-1},$$

где $\sigma_j^2 = \text{Var } Y^{(j)}$, $j = \overline{1, k}$.

Случай 2.

Если $k = 1$, $m \geq 2$ и

$$f(x) = \alpha x^m + \alpha_{m-1} x^{m-1} + \dots + \alpha_0,$$

то, применяя те же рассуждения, что и выше, к

$$\int_{-h}^h \exp\{it f(x+a)\} p_Y(x) dx = \int_{-h}^h \exp\{it f(x+a)\} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ivx} g(v) dv \right) dx$$

и (18), находим

$$|\mathbb{E} e^{it f(Y+a)}| \leq \frac{32(2\pi)^{-1+1/m}}{|\alpha t|^{1/m}} \int_{-\infty}^{\infty} |g(v)| dv.$$

В общем случае для многочленов вида (7) можно оценивать характеристическую функцию с помощью неравенства

$$(23) \quad |\mathbb{E} e^{it f(Y+a)}| \leq \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq j \leq k} |Y^{(j)}| \geq h \right) + (2h)^k \lambda \left((2\pi)^{-1} |t| (2h)^M \alpha_{**} \right) (2\pi)^{-k} \int_{\mathbb{R}^k} |g(v)| dv,$$

выбирая h как положительную функцию от t , стремящуюся к бесконечности при $|t| \rightarrow \infty$. Если первое слагаемое в правой части (23) экспоненциально убывает с ростом h , мы получим оценку для характеристической функции порядка $|t|^{-1/m} \log^a |t|$ с некоторым $a \geq 0$ при $|t| \rightarrow \infty$. Доказательство теоремы 5 проводится именно таким путем.

f) *Многочлены специального вида от независимых нормальных случайных величин.*

ЛЕММА 8. Пусть случайная величина X есть произведение трех независимых случайных величин:

$$X = Z_1^m \cdot Z_2 \cdot S,$$

где $m \geq 1$ есть целое, Z_1, Z_2 имеют стандартное нормальное распределение и $S > 0$ таково, что

$$(24) \quad \mathbb{E} S^{-1/m} < \infty.$$

Тогда

$$|t|^{1/m} |\mathbb{E} e^{itX}| \uparrow d \quad \text{при} \quad |t| \uparrow \infty,$$

где

$$d = \mathbb{E} |Z_1|^{-(m-1)/m} \mathbb{E} S^{-1/m}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, достаточно доказать лемму только для $t > 0$. Имеем

$$Z_1^m Z_2 S \stackrel{d}{=} |Z_1|^m Z_2 S$$

и

$$\begin{aligned} t^{1/m} |E e^{itX}| &= \int_0^\infty d\Pr(S < s) \\ &\times \left(t^{1/m} \int_0^\infty \exp(-t^2 v^2 s^2 / 2 - v^{2/m} / 2) (2/\pi)^{1/2} m^{-1} v^{(1-m)/m} dv \right) \\ &= \int_0^\infty s^{-1/m} d\Pr(S < s) \\ &\times \left(\int_0^\infty \exp(-\tau^2 / 2 - \tau^{2/m} / [2(st)^{2/m}]) m^{-1} (2/\pi)^{1/2} \tau^{(1-m)/m} d\tau \right). \end{aligned}$$

При фиксированном $s > 0$ внутренний интеграл в последнем равенстве возрастает и стремится к

$$m^{-1} E |Z_1|^{-(m-1)/m} = m^{-1} z_{(m-1)/m}$$

при $t \uparrow \infty$.

Отсюда и из (24) вытекает лемма 8.

В леммах 9–11 ниже используем обозначения, введенные перед теоремой 6. В доказательствах лемм появляются функции Бесселя J_0 , I_0 , K_0 , Y_0 . Все необходимые формулы для этих функций и числовые значения взяты из [14] и [22].

ЛЕММА 9. Характеристическая функция случайной величины $Z^{(1)} Z^{(2)}$ равна

$$(25) \quad w_2(t) = (1 + t^2)^{-1/2},$$

а ее плотность $p(v)$ при любом $v \neq 0$ определяется формулой

$$(26) \quad p(v) = \pi^{-1} K_0(|v|).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку

$$Z^{(1)} Z^{(2)} \stackrel{d}{=} \frac{1}{2} ((Z^{(1)})^2 - (Z^{(2)})^2),$$

формула (25) вытекает из равенства

$$E \exp(it(Z^{(1)})^2) = (1 - 2it)^{-1/2}.$$

Мы получаем (26) из формулы обращения (см. 9.6.25 в [14]).

ЛЕММА 10. Для $K_0(v)$ справедливы следующие неравенства:

а) при $0 < v \leq 1$

$$(27) \quad K_0(v) < 1.267 \ln(2/v),$$

б) при $v \geq 1$

$$(28) \quad K_0(v) \leq e^{1-v} K_0(1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка (27) вытекает из неравенства

$$K_0(v) < \ln(2/v)I_0(v), \quad 0 < v \leq 1,$$

которое, в свою очередь, следует из 9.8.5 в [14].

Далее, $e^v K_0(v)$ есть убывающая функция при $v > 0$. Это следует из формулы (см. 9.6.23 в [14])

$$K_0(v) = \int_1^\infty e^{-vu}(u^2 - 1)^{-1/2} du.$$

Таким образом, (28) доказано.

СЛЕДСТВИЕ ЛЕММЫ 10. *Имеем*

$$(29) \quad \frac{2}{\pi} \int_1^\infty K_0(v) dv < 0.269$$

и для $t \geq 1$

$$(30) \quad \frac{2}{\pi} \int_0^{1/t} K_0(v) dv < 1.614 t^{-1} \ln(2+t).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство немедленно следует из леммы 10 b).

Для $t \geq 1$ находим

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{1/t} K_0(v) dv = \frac{2}{\pi t} \int_0^1 K_0(z/t) dz \leq \frac{2.534}{\pi t} \int_0^1 \ln(2t/z) dz < 1.614 t^{-1} \ln(2+t),$$

что и завершает доказательство следствия.

ЛЕММА 11. *Для* $t > 0$ *выполнены соотношения*

$$(31) \quad w_3(t) = (2\pi)^{-1/2} t^{-1} \exp((4t^2)^{-1}) K_0((4t^2)^{-1})$$

и

$$(32) \quad w_4(t) = \pi(4t)^{-1} \left(J_0^2((2t)^{-1}) + Y_0^2((2t)^{-1}) \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения легко следуют из 2.3.6.10 в томе 1 и 2.16.3.12 в томе 2 в [22].

СЛЕДСТВИЕ ЛЕММЫ 11. *Имеем*

$$w_3(t) = (2/\pi)^{1/2} t^{-1} \ln t \cdot (1 + o(1)) \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty$$

и

$$w_4(t) = \pi^{-1} t^{-1} \ln^2 t \cdot (1 + o(1)) \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty.$$

ЛЕММА 13. В обозначениях, введенных выше, имеем

$$(33) \quad \sup_{a \in \mathbb{R}^k} |\mathbb{E} \exp\{it f(S_n + a)\}| \leq 2 \exp\left(-\frac{n_2 \delta^2}{8}\right) + \sup_{a \in \mathbb{R}^k} \left| \mathbb{E} \exp\left\{it f\left(\frac{Y_{1,1} + \dots + Y_{1,n_3}}{\sqrt{n}} + a\right)\right\} \right|.$$

4. Доказательство теоремы 1

Пусть

$$f(x) = \alpha x^m + \alpha_{m-1} x^{m-1} + \dots + \alpha_0,$$

где $\alpha \neq 0$ и m — целое, $m \geq 2$. Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, принимающих значения 0 и 1 с вероятностями $1/2$.

Возьмем $n_1 = 1$, $n_2 = n$, $n_3 = [n\delta/2] + 1$. Положим

$$\Delta = \frac{a_2 - a_1}{\sqrt{n}}, \quad \tau = (2\pi)^{-1} t \Delta^m, \\ f_1(x) = \Delta^{-m} f(\Delta x) = \alpha x^m + \Delta^{-1} \alpha_{m-1} x^{m-1} + \dots + \Delta^{-m} \alpha_0.$$

Тогда

$$\frac{Y_{1,j}}{\sqrt{n}} \stackrel{d}{=} \frac{a_1}{\sqrt{n}} + \frac{a_2 - a_1}{\sqrt{n}} \cdot \varepsilon_j = \frac{a_1}{\sqrt{n}} + \Delta \varepsilon_j, \\ t f\left(\frac{Y_{1,1} + \dots + Y_{1,n_3}}{\sqrt{n}} + a\right) \stackrel{d}{=} t f\left(\Delta(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{n_3}) + \frac{n_3 a_1}{\sqrt{n}} + a\right) \\ = 2\pi\tau f_1(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{n_3} + a').$$

Таким образом,

$$(34) \quad \sup_{a \in \mathbb{R}^k} \left| \mathbb{E} \exp\left\{it f\left(\frac{Y_{1,1} + \dots + Y_{1,n_3}}{\sqrt{n}} + a\right)\right\} \right| \leq \sup_{a' \in \mathbb{R}^k} \left| \mathbb{E} \exp\{2\pi i \tau f_1(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{n_3} + a')\} \right|.$$

Для упрощения записи, положим $r = n_3$. Имеем

$$(35) \quad \mathbb{E} \exp\{2\pi i \tau f_1(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_r + a')\} = \sum_{j=0}^r \exp\{2\pi i \tau f_1(j + a')\} p_r(j) = \tilde{S},$$

где

$$p_r(j) = \binom{r}{j} 2^{-r}.$$

Вероятности $p_r(j)$ не убывают (не возрастают, соответственно), когда j меняются от 0 до $[r/2] + 1$ (от $[r/2] + 1$ до n , соответственно). Далее, по лемме 2

$$\max_{0 \leq j \leq r} p_r(j) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi r}}.$$

Напомним, что преобразование Абеля для любых действительных чисел a_l и b_l дает

$$(36) \quad \sum_1^N a_l b_l = a_N B_N - \sum_1^{N-1} B_l (a_{l+1} - a_l),$$

где

$$B_l = b_1 + \dots + b_l, \quad l = 1, 2, \dots, N.$$

Если последовательность неотрицательных действительных чисел $a_1, \dots, a_N$ такова, что существует $l_0, 1 \leq l_0 \leq N$, при котором

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{l_0}, \quad a_N \leq a_{N-1} \leq \dots \leq a_{l_0},$$

то из (36) следует неравенство

$$\left| \sum_1^N a_l b_l \right| \leq 3a_{l_0} \max_j |B_j|.$$

Оценим теперь сумму $\tilde{S}$ в (35).

Положим

$$A = \lceil \sqrt{r \ln r} \rceil + 1.$$

Тогда по леммам 1, 2 и 6 для $m \geq \hat{c}$

$$(37) \quad \begin{aligned} |\tilde{S}| &\leq \sum_{|j-r/2| \geq A} p_r(j) + \left| \sum_{r/2+A > j > r/2-A} \exp\{2\pi i \tau f_1(j+a')\} p_r(j) \right| \\ &\leq 2 \exp\left(-\frac{1}{2} r \left(\frac{A}{r}\right)^2\right) + 3 \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \max_{r/2-A < k < r/2+A} \left| \sum_{r/2-A < j \leq k} \exp\{2\pi i \tau f_1(j+a')\} \right| \\ &\leq \frac{2}{\sqrt{r}} + 3 \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \left[\tilde{c}(m) (2A)^{1-1/(6m_1^2 \ln m_1)} \ln(2A) + 2|\alpha\tau|^{-1/m_1} \right] \end{aligned}$$

при условии, что

$$(38) \quad 0 < 4mA|\alpha\tau| \leq 1.$$

Наконец, оценим слагаемые в правой части (37). В предположениях теоремы 1

$$r = \left\lfloor \frac{n\delta}{2} \right\rfloor + 1 > \frac{n\delta}{2} \geq 3.$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} 3 \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \cdot 2|\alpha\tau|^{-1/m_1} &= 6 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{n}{r}} (2\pi)^{1/m_1} (a_2 - a_1)^{-m/(m-1)} \left(\frac{\sqrt{n}}{|\alpha t|} \right)^{1/m_1} \\ &< 12\sqrt{2} (a_2 - a_1)^{-m/(m-1)} \delta^{-1/2} \left(\frac{\sqrt{n}}{|\alpha t|} \right)^{1/m_1} \end{aligned}$$

и

$$2A < 2(\sqrt{r \ln r} + 1) < 3\sqrt{r \ln n} < n^2.$$

Введем

$$\theta_m = \frac{1}{6m_1^2 \ln m_1}$$

и получим

$$(2A)^{(1-\theta_m)} \ln(2A) \leq 3r^{(1-\theta_m)/2} (\ln n)^{1/2} \cdot 2 \log n.$$

Следовательно, правая часть (37) не превосходит

$$(39) \quad 2\sqrt{2} (n\delta)^{-1/2} + \frac{18\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \tilde{c}(m)(n\delta)^{-\theta_m/2} (\ln n)^{3/2} + 12\sqrt{2} (a_2 - a_1)^{-m/(m-1)} \delta^{-1/2} \left(\frac{\sqrt{n}}{|\alpha t|} \right)^{1/m_1}.$$

Напомним, что

$$\tilde{c}(m) > 1000, \quad \theta_m < 1/12, \quad n\delta > 4.$$

Следовательно, выражение в (39) меньше, чем

$$15\tilde{c}(m) (n\delta)^{-\theta_m/2} (\ln n)^{3/2} + 17(a_2 - a_1)^{-m/(m-1)} \delta^{-1/2} \left(\frac{\sqrt{n}}{|\alpha t|} \right)^{1/m_1}.$$

Условие (38) выполнено, если

$$0 < |\alpha t| \leq \frac{\pi}{3m} \cdot \frac{1}{\sqrt{\delta}} \cdot \frac{1}{(a_2 - a_1)^m} \cdot n^{(m-1)/2} \cdot (\ln n)^{-1/2},$$

что вместе с (33) и (34) завершает доказательство теоремы 1.

5. Доказательство теоремы 2

По предположению теоремы 1 существуют $a_1 \neq a_2$ такие, что

$$P(X_1 = a_1) = \varepsilon_1 > 0 \quad \text{и} \quad P(X_1 = a_2) = \varepsilon_2 > 0.$$

Положим $\varepsilon_3 = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Определим вероятностную меру P_1 по формуле

$$P_1(\{a_1\}) = P_1(\{a_2\}) = \frac{1}{2}.$$

Тогда распределение F случайной величины X_1 можно представить как

$$F = 2\varepsilon_3 P_1 + (1 - 2\varepsilon_3) P_2,$$

где P_2 — некоторая вероятностная мера.

По теореме 1 получаем (5) для всех n и m , больших некоторых начальных значений. Для всех других возможных значений n и m оценка (5) вытекает из (1) при условии, что t удовлетворяет (2).

6. Доказательство теоремы 3

Пусть $U, U_1, U_2, \dots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов в $\mathbb{R}^k$, имеющих равномерное распределение на единичном шаре $\{x : |x| \leq 1\}$, $x \in \mathbb{R}^k$. Используя обозначения из части 3 g), запишем

$$n_1 = 2n_0, \quad Y_{n,1} \stackrel{d}{=} \eta U_1 + a_0.$$

Тогда по (33)

$$\begin{aligned} (40) \quad & \sup_{a \in \mathbb{R}^k} |\mathbb{E} \exp\{it f_0(S_n + a)\}| \\ & \leq 2 \exp\left(-\frac{n_2 \delta^2}{8}\right) + \sup_{a \in \mathbb{R}^k} \left| \mathbb{E} \exp\left\{it f_0\left(\frac{\eta(U_1 + \dots + U_{n_3})}{\sqrt{n}} + \frac{n_3 a_0}{\sqrt{n}} + a\right)\right\} \right| \\ & = 2 \exp\left(-\frac{n_2 \delta^2}{8}\right) + \sup_{a' \in \mathbb{R}^k} \left| \mathbb{E} \exp\left\{it f\left(\frac{\eta(U_1 + \dots + U_{n_3})}{\sqrt{n}} + a'\right)\right\} \right|. \end{aligned}$$

В силу (15) и (20) имеем

$$\begin{aligned} (41) \quad & \sup_{a' \in \mathbb{R}^k} \left| \mathbb{E} \exp\left\{it f_0\left(\frac{\eta(U_1 + \dots + U_{n_3})}{\sqrt{n}} + a'\right)\right\} \right| \\ & \leq 9^k (2\pi)^{-k} |t|^{-k/m} \int_{\mathbb{R}^k} \left| g_U\left(\frac{\eta v}{\sqrt{n}}\right) \right|^{n_3} dv \\ & \leq 9^k (2\pi)^{-k} c^*(k) |t|^{-k/m} \eta^{-k} \left(\frac{n}{n_3}\right)^{k/2}. \end{aligned}$$

Если $n \geq 6n_0/\delta$, то $n_2 \geq n/(3n_0)$ и $n_3 \geq \min\{2, n\delta/(6n_0)\}$. Следовательно, из (40) и (41) вытекает утверждение теоремы 3.

ЗАМЕЧАНИЕ. Мы опускаем доказательство теоремы 4, так как оно опирается на аналогичные рассуждения. Следует лишь заменить $|g_U(v)|$ на

$$\left| \int_{\mathbb{R}^k} e^{i(v,x)} p_0(x) dx \right|,$$

что, как легко видеть, меньше $(\pi/(3|v|)) V_0$.

7. Доказательство теоремы 5

Ясно, что, не ограничивая общности, можем предполагать, что $\alpha_{**} = 1$. Возьмем в (23)

$$h = (2 \ln(2 + |t|))^{1/2} > 1.$$

Тогда первое слагаемое в правой части (23) меньше, чем

$$k \pi^{-1/2} (2 + |t|)^{-1} \ln^{-1/2}(2 + |t|).$$

Далее, поскольку

$$\ln(2 + |t|) \leq 0.125 (2 + |t|)^{5/2},$$

имеем $2h < (2 + |t|)^{5/4}$ и

$$\ln(2 + (2\pi)^{-1}|t|(2h)^M) < (5M/4 + 1) \ln(2 + |t|).$$

Следовательно, второе слагаемое в правой части (23) меньше, чем

$$A|t|^{-1/m} \ln^B(2 + |t|),$$

где

$$A = 2^{(13k-3M/m)/2} (2\pi)^{1/m-k/2} (1.25M + 1)^{k-1}$$

и $B = (3k - M/m)/2 - 1$.

Приведенные выше рассуждения доказывают теорему 5.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть T — ортогональная $(k \times k)$ -матрица и $f_T(x) = f(Tx)$. Постоянная m в (7) может быть различной для f_T и f . Например, $m = 1$ для $x_1 x_2$, но $m = 2$ для

$$\frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}} = \frac{x_1^2 - x_2^2}{2}.$$

Таким образом, подходящий выбор T может улучшить оценку, даваемую теоремой 5.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Можно получить результаты, аналогичные теореме 5, заменяя Z на $n^{-1/2}(U_1 + \dots + U_n)$. Таким путем можно доказать для общего многочлена (7) неравенство, аналогичное полученному в теореме 3 для f_0 . В этом случае первый член в оценке остается без изменений, а второй имеет порядок $O(|t|^{-1/m} \ln^b |t|)$ с некоторым $b > 0$ при больших значениях $|t|$.

8. Доказательство теоремы 6

Обозначим

$$\begin{aligned} A &= v_3^2 \dots v_k^2, & B &= v_3^2 + \dots + v_k^2, \\ D &= (2/\pi)^{(k-2)/2}, & \delta &= t^{-1/(k-2)} \quad \text{при } t \geq 1. \end{aligned}$$

Поскольку функция $w_k(t)$ четная, достаточно рассмотреть лишь $t \geq 1$. Оценка снизу для $w_k(t)$ вытекает из неравенств

$$\begin{aligned} \mathbb{E} e^{itf(Z)} &= \int_0^\infty \dots \int_0^\infty (1 + At^2)^{-1/2} D e^{-B/2} dv_3 \dots dv_k \\ &\geq \int_\delta^1 \dots \int_\delta^1 (2At^2)^{-1/2} D e^{-B/2} dv_3 \dots dv_k \\ &\geq 2^{-1/2} D e^{-(k-2)/2} t^{-1} \left(\int_\delta^1 \frac{dv}{v} \right)^{k-2} = l_k t^{-1} \ln^{(k-2)} t. \end{aligned}$$

Докажем теперь оценку сверху для $w_k(t)$, используя индукцию по k отдельно по нечетным и четным значениям k .

Из (25) вытекает, что $w_2(t) \leq t^{-1}$ для всех $t > 0$.

Для $t \geq 1$ имеем также

$$\begin{aligned} w_3(t) &= (2\pi)^{-1/2} e^{1/4} t^{-1} K_0((4t^2)^{-1}) \\ &\leq 1.267 (2\pi)^{-1/2} e^{1/4} t^{-1} \ln(8t^2) < 2.6 t^{-1} \ln(2+t). \end{aligned}$$

Предположим, что при некотором $k \geq 2$ справедливо для $t \geq 1$ неравенство

$$w_k(t) \leq L_k t^{-1} \ln^{k-2}(2+t).$$

Тогда

$$\begin{aligned} w_{k+2}(t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty w_k(tv) K_0(v) dv \\ &= \left(\int_0^{1/t} + \int_{1/t}^1 + \int_1^\infty \right) \cdots = I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Из (30) находим

$$I_1 \leq 1.614 t^{-1} \ln(2+t).$$

Далее, по предположению индукции и (29) получаем

$$I_3 \leq \frac{2}{\pi} w_k(t) \int_1^\infty K_0(v) dv \leq 0.269 L_k t^{-1} \ln^{k-2}(2+t).$$

Для I_2 имеем

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \frac{2}{\pi} K_0(1/t) \int_{1/t}^1 w_k(tv) dv \\ &\leq \frac{2}{\pi} K_0(1/t) L_k t^{-1} \int_{1/t}^1 v^{-1} \ln^{k-2}(2+tv) dv \\ &< \frac{2}{\pi} K_0(1/t) L_k t^{-1} \ln^{k-2}(2+t) \ln t. \end{aligned}$$

Поскольку при $t \geq 1$

$$2/\pi K_0(1/t) \leq 3.534/\pi \ln(2t) < 1.075 \ln(2+t),$$

получаем

$$I_2 < 1.076 L_k t^{-1} \ln^k(2+t).$$

Таким образом, для $t \geq 1$

$$w_{k+2}(t) < 2.959 L_k t^{-1} \ln^k(2+t) < L_{k+2} t^{-1} \ln^k(2+t).$$

9. Доказательство теоремы 7

Поскольку m_2 нечетно, мы можем записать (см. следствие 3 в [23])

$$Z_2^{m_2} \stackrel{d}{=} Z_2 S_1,$$

где случайные величины в правой части независимы и $S_1 \geq 0$.

Имеем

$$(42) \quad Z_2^{m_2} Z_3^{m_3} \dots Z_k^{m_k} \stackrel{d}{=} Z_2 S,$$

где

$$S \stackrel{d}{=} S_1 |Z_3|^{m_3} \dots |Z_k|^{m_k}$$

и

$$Z_1^{m_1} Z_2^{m_2} \dots Z_k^{m_k} \stackrel{d}{=} |Z_1|^m Z_2 S.$$

Объединение соотношения

$$S^{-1/m} |Z_2|^{-1/m} \stackrel{d}{=} |Z_2|^{-m_2/m} \dots |Z_k|^{-m_k/m},$$

(42) и леммы 8 завершает доказательство теоремы 7.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Götze F. Asymptotic expansions for bivariate von Mises functionals // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb. 1979. V. 50. № 3. P. 333–355.
- [2] Götze F. Edgeworth expansions in functional limit theorems // Ann. Probab. 1989. V. 17. P. 1602–1634.
- [3] Weyl H. Über die Gleichverteilung von Zahlen mod Eins // Math. Ann. 1916. V. 77. P. 313–352.
- [4] Юринский В. В. Оценка погрешности нормального приближения вероятности попадания в шар // ДАН СССР. 1981. Т. 258. С. 577–578.
- [5] Юринский В. В. О погрешности нормального приближения // Сиб. матем. журн. 1983. Т. 24. С. 188–199.
- [6] Besicovitch A. S. Almost periodic functions. Cambridge, 1932.
- [7] Cramér H. Random variables and probability distributions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1970.
- [8] Prachar K. Primzahlverteilung. Berlin: Springer-Verlag, 1978.
- [9] Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. М.: Наука, 1980.
- [10] Rudin W. Fourier Analysis on Groups. New York: Interscience Publ., 1962.
- [11] Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е. Коммутативные нормированные кольца // УМН. 1946. Т. 1. № 2 (12). С. 48–146.
- [12] Uspensky J. V. Introduction to Mathematical Probability. New York: McGraw-Hill, 1937.
- [13] Watson G. N. A treatise on the theory of Bessel functions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1966 (Reprint of the 1944 edition).
- [14] Abramowitz M., Stegun I. A. Handbook of Mathematical Functions. V. 55. Washington, D.C.: National Bureau of Standards. Appl. Math., 1964.
- [15] Прохоров Ю. В. Распространение неравенств С. Н. Бернштейна на многомерный случай // Теория вероятн. и ее применен. 1968. Т. 13. С. 266–274.
- [16] Юринский В. В. О бесконечномерном варианте неравенств С. Н. Бернштейна // Теория вероятн. и ее применен. 1970. Т. 15. С. 106–107.
- [17] Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Теория кратных тригонометрических сумм. М.: Наука, 1987.
- [18] Cramér H. Mathematical Methods of Statistics. Princeton: Princeton Univ. Press, 1946.
- [19] Садикова С. М. Некоторые неравенства для характеристических функций // Теория вероятн. и ее применен. 1966. Т. 11. С. 500–506.
- [20] Bentkus V., Götze F., Zitikis R. Asymptotic expansions in the integral and local limit theorems in Banach spaces with application to ω -statistics // J. Theoret. Probab. 1993. V. 6. P. 727–780.

- [21] Багиров Э. Б. Нижние оценки для “хвостов” распределений некоторых функций // ДАН СССР. 1990. Т. 311. №2. С. 521–523.
- [22] Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. Integrals and series. V. 1, 2. New York: Gordon & Breach, 1988.
- [23] Багиров Э. Б. Новые следствия формулы Колмогорова для безгранично делимых законов // Теория вероятн. и ее применен. 1991. Т. 36. С. 138–143.

Билефельдский университет, ФРГ;
Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН, Россия;
Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова, Россия

Поступила в редакцию
04.09.1995