Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Я. Будылин, Неравенство, полученное при рассмотрении нестабильных решеток ранга 2, *УМН*, 2011, том 66, выпуск 4, 183–184

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9430>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 13:18:53

Неравенство, полученное при рассмотрении нестабильных решеток ранга 2

Р. Я. Будылин

Пусть K – числовое поле с кольцом целых F , $n = [K : \mathbb{Q}] < \infty$ и P – проективный модуль над кольцом F . Поля K_i – архимедовы пополнения поля K . Пусть r – число вещественных точек, s – комплексных. Мы будем пользоваться определениями из [1].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Структура F -решетки на модуле P есть набор скалярных (эрмитовых) произведений на каждом вещественном (комплексном) векторном пространстве $P \otimes_F K_i$. Если $K_i = \mathbb{C}$, то скалярное произведение предполагается эрмитовым.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Решетку называют полустабильной, если ее каноническая фильтрация имеет вид $0 \subset P$. В противном случае решетка называется нестабильной.

Пусть $P = F^k$. Обозначим через $O(k, K_i)$ группу $O_k(\mathbb{R})$ для вещественных точек и группу $U_k(\mathbb{C})$ – для комплексных точек. Множество скалярных (эрмитовых) произведений над вещественным (комплексным) пополнением K_i отождествляется с $\text{Gl}(k, K_i)/O(k, K_i)$. Обозначим группу $\prod_{K_i} \text{Gl}(k, K_i)$ через G , группу $\left\{ (x_i) \in G \mid \prod_{K_i} \|x_i\| = 1 \right\}$ через G' , группу $\text{Gl}(k, F)$ через H , группу $\prod_{K_i} O(k, K_i)$ через O . Множество решеток с точностью до эквивалентности отождествляется со множеством $H \backslash G/O$. Множество G/O отождествляется со множеством решеток с выделенным базисом в F^n . Назовем его элементы вложенными решетками. Элементы множества G'/O назовем специальными вложенными решетками. По теореме о сильной аппроксимации действие группы H на множестве G'/O – это действие с компактным фактором. Пусть множество M – фундаментальная область этого действия.

Пусть $N(k, K_i)$ – унитарные матрицы из $\text{Gl}(k, K_i)$, группа $A(k, K_i)$ – вещественные диагональные матрицы с положительными элементами на диагонали. Обозначим группу $\prod_{K_i} A(k, K_i)$ через A , группу $\prod_{K_i} N(k, K_i)$ через N . Разложение Ивасава

даст разложение $G = ANO$. Пусть $da^{(i)}$ – мера Хаара на $A(k, K_i)$ равная $1/(a_1 \cdots a_k) da_1 \cdots da_k$, где a_i есть i -й диагональный элемент. После замены переменной $a_i = e^{e_i}$ получим $de_1 \cdots de_k$. Пусть $dn^{(i)}$ – мера Хаара на $N(k, K_i)$, равная стандартной мере Лебега на $\mathbb{R}^{k(k-1)/2 \dim(K_i)}$. Мера $dg^{(i)}$ на $\text{Gl}(n, K_i)$, равная $\rho_{K_i}(a) da^{(i)} dn^{(i)} do^{(i)}$, где $\rho_{K_i}(a) = \prod_{k < l} \left(\frac{a_k}{a_l} \right)^{\dim_{\mathbb{R}}(K_i)}$ и $do^{(i)}$ – произвольная мера Хаара на $O(K_i)$, является мерой Хаара [2; лемма 3]. Положим $\rho = \prod_{K_i} \rho_{K_i}$, через dn

и da обозначим меры Хаара на N и A соответственно. В разложении Ивасава для группы G' группа A заменяется на подгруппу $A' \subset A$, состоящую из наборов диагональных матриц (P^i) таких, что $\prod_{K_i} \det(P^i)^{\dim_{\mathbb{R}}(K_i)} = 1$. Пусть da' – произвольная мера Хаара на A' .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть X – пространство с левым действием группы G . Мера μ на X называется G -эквивариантной, если $g_*\mu = \mu$ для любого элемента $g \in G$.

ТЕОРЕМА 1. Мера $\rho(a) da' dn$ является G' -эквивариантной на G'/O .

Далее всюду $k = 2$. Пусть a, b – базис модуля F^2 .

Работа выполнена при поддержке гранта МК-4881.2011.1, Лаборатории алгебраической геометрии ГУ-ВШЭ, гранта правительства РФ дог. 1111.G34.31.0023, гранта РФФИ 11-01-00145а и программы “Ведущие научные школы” (грант НШ-4713.2010.1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Назовем главными нестабильными решетками те специальные решетки, члены канонической фильтрации которых изоморфны F .

Следующая лемма описывает фундаментальную область G'/O относительно действия H , из которой легко выделяют главные нестабильные решетки.

ЛЕММА 1. Элементы G/O представимы набором верхнетреугольных матриц $\left(\begin{pmatrix} a_i & 0 \\ 0 & b_i \end{pmatrix}\right)\left(\begin{pmatrix} 1 & c_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$. В качестве фундаментальной области для действия H на G/O можно взять наборы верхнетреугольных матриц, для которых выполняются нижеперечисленные условия:

- 1) элемент $a \in F^2$ выбран так, чтобы кообъем $\text{covol}(Fa) \subset \mathbb{R}^n = \prod K_i$ был наименьшим среди всех элементов F^2 , дополненных до базиса;
- 2) ортогональные проекции наборов $\{\ln(a_i/b_i)\}$ и $\{\ln(a_i b_i)\}$ на плоскость, ортогональную вектору $(\dim(K_1), \dots, \dim(K_{r+s}))$, лежат в некоторой фиксированной фундаментальной области A_0 для F^* ;
- 3) набор $\{c_i\}$ лежит в некоторой фиксированной фундаментальной области N_0 для аддитивного действия F на пространстве $\prod K_i$.

Обозначим $e_i^1 = \ln a_i$, $e_i^2 = \ln b_i$. Пусть также $r_i = e_i^1 - e_i^2$, $r = \sum \dim_{\mathbb{R}}(K_i) r_i$ и $f_i = e_i^1 + e_i^2$, $f = \sum \dim_{\mathbb{R}}(K_i) f_i$. Заметим, что $\rho(a) = e^r$. Пусть r' и f' — ортонормированные координаты в плоскостях $\sum \dim_{\mathbb{R}}(K_i) r_i = 0$ и $\sum \dim_{\mathbb{R}}(K_i) f_i = 0$ соответственно. Возьмем в A' меру Хаара da'' , равную $dr dr' df'$. Мера на вложенных решетках $e^r da'' dn$ обозначим $\nu_{G'/O}^2$.

ТЕОРЕМА 2. Для меры $\nu_{G'/O}^2$ объем главных нестабильных решеток ранга 2 равен $R_K^2 D_K^{1/2}$, где R_K и D_K — регулятор и дискриминант числового поля.

Объем фундаментального множества для группы H внутри множества вложенных решеток ранга 2 с кообъемом, не превосходящим 1, относительно G' -эквивариантной меры $4^{r+s} \rho(a) \prod_{K_i} e^{3f_i \dim_{\mathbb{R}}(K_i)} da dn$ равен $2^{r-2s} R_K D_K^{3/2} \zeta_K(2)/3$. Это следствие формулы Зигеля (см. [3], а также обзор [4]) для $k = 2$. С помощью вычислений с мерами Хаара отсюда можно вывести следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3. Объем фундаментального множества M по мере $\nu_{G'/O}^2$ равен $2^{-3s} \times (r + 4s) R_K D_K^{3/2} \zeta(2)$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Имеет место неравенство $2^{-3s} (r + 4s) D_K \zeta_K(2) \geq R_K$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сравниваем объем главных нестабильных решеток из теоремы 2 с объемом фундаментального множества M .

Автор благодарен А. Н. Паршину за постановку задачи и многочисленные обсуждения, а также М. А. Цфасману за помощь с оценками регулятора и дискриминанта.

Список литературы

- [1] D. R. Grayson, *Comment. Math. Helv.*, **59** (1984), 600–634. [2] А. Борель, *Математика*, **12:4** (1968), 80–103. [3] C. L. Siegel, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **39** (1936), 209–218. [4] А. Н. Паршин, *Итоги науки и техники. Соврем. матем. и ее прил.*, **70**, ВИНИТИ, М., 2001, 159–164.

Р. Я. Будылин (R. Ya. Budylin)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: budylin@yandex.ru

Представлено Э. Б. Винбергом
Принято редколлегией
18.05.2011