Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Степин, Оценки ядра и регуляризованный след полугруппы, порожденной потенциальным возмущением билапласиана, *УМН*, 2011, том 66, выпуск 3, 205–206

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9431>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 15:46:29

Оценки ядра и регуляризованный след полугруппы, порожденной потенциальным возмущением билапласиана

С. А. Степин

Цель сообщения – представить асимптотические формулы и оценки для интегрального ядра $G_V(x, y, t)$ полугруппы $U(t) = \exp(tH_V)$ с генератором $H_V = -P(i\nabla) + V(x)$, где $P(\xi) = |\xi|^4/4$ и $V(x) \in L_1(\mathbb{R}^3)$. Установленные оценки и способ их получения распространяются на случай положительно определенной формы $P(\xi)$ и ограниченного интегрируемого потенциала в пространстве произвольного числа измерений.

Поведение фундаментальных решений параболических уравнений (функций Грина) при $t \downarrow 0$ исследовалось в ряде публикаций, по большей части относящихся к случаю уравнений диффузионного типа, когда для этой цели применима вероятностная техника. С предметом настоящей заметки непосредственно связаны работы [1]–[5], где акцент делается на изучение эволюционных полугрупп, порожденных эллиптическими операторами порядка выше второго. На рассматриваемой здесь модельной задаче проявляются характерные особенности, составляющие существенное отличие от случая диффузионных полугрупп (см. [6], [7]).

Интегральное ядро $G_0(x, y, t)$ невозмущенной полугруппы $U_0(t) = \exp(-t\Delta^2/4)$ имеет вид $(2\pi)^{-3} \int \exp(-t|\xi|^4/4 + i(x - y, \xi)) d\xi$ и допускает оценку

$$|G_0(x, y, t)| \leq Ct^{-3/4} \exp\left(-\frac{1}{4} \frac{|x - y|^{4/3}}{t^{1/3}}\right), \quad C = (2\pi)^{-3} \int e^{-P(\xi)/10} d\xi.$$

Метод перевала позволяет (см. [2], [3]) получить асимптотическую формулу

$$G_0(x, y, t) = \frac{\pi^{-3/2}}{\sqrt{6}} \frac{t^{-1/2}}{|x - y|} \exp\left(-\frac{3}{8} \frac{|x - y|^{4/3}}{t^{1/3}}\right) \times \left\{ \sin\left(\frac{3\sqrt{3}}{8} \frac{|x - y|^{4/3}}{t^{1/3}}\right) + O\left(\frac{t^{1/3}}{|x - y|^{4/3}}\right) \right\}.$$

Полугруппа $U(t)$ представима рядом теории возмущений

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(t), \quad U_n(t) = \int_0^t U_0(s) V U_{n-1}(t - s) ds,$$

фактически совпадающим с представлением параметрикса фундаментального решения $G_V(x, y, t)$ соответствующего параболического уравнения. Применительно к уравнениям диффузионного типа этот подход приводит (см. [6]) к известной формуле Фейнмана–Каца.

ТЕОРЕМА 1. Если потенциал $V \in C^2(\mathbb{R}^3) \cap L_1(\mathbb{R}^3)$ ограничен, то

$$G_V(x, x, t) = (2\pi)^{-3} t^{-3/4} (1 + tV(x)) \int e^{-P(\xi)} d\xi + O(\sqrt{t}), \quad t \downarrow 0,$$

а при фиксированных $x \neq y$ и достаточно малых $t > 0$ справедлива формула

$$G_V(x, y, t) = G_0(x, y, t) \left(1 + t \int_0^1 V(x + (y - x)\tau) d\tau \right) + O\left(t^{7/12} \exp\left(-\frac{3}{8} \frac{|x - y|^{4/3}}{t^{1/3}}\right)\right).$$

Способ отыскания данных формул идейно родственен вероятностному подходу, используемому при вычислении коэффициентов коротковременного разложения теплового ядра, основанного на его представлении в виде винеровского интеграла (см. [7]).

Несмотря на то что в данной ситуации ядро $G_0(x, y, t)$ невозмущенной полугруппы $U_0(t)$ не является плотностью вероятности перехода марковского процесса, оно обладает рядом свойств переходной плотности. Так, соотношение

$$\int G_0(x, z, s) z G_0(z, y, t - s) dz = G_0(x, y, t) \left(x + \frac{(y - x)s}{t} \right)$$

представляет собой аналог формулы для математического ожидания положения броуновской частицы $b(s)$, если $b(0) = x$ и $b(t) = y$. Указанная формула играет важную роль в предложенной конструкции, включающей оценку погрешности борновского приближения функции Грина и нахождение асимптотики при $t \downarrow 0$ первой поправки теории возмущений $\int_0^t ds \int G_0(x, z, s) V(z) G_0(z, y, t - s) dz$.

ТЕОРЕМА 2. В предположении ограниченности потенциала $V \in L_1(\mathbb{R}^3)$ функция Грина $G_V(x, y, t)$ непрерывна и справедливо неравенство

$$|G_V(x, y, t)| \leq Ct^{-3/4} \exp\left(-\frac{1}{4} \frac{|x - y|^{4/3}}{t^{1/3}}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1/4)^n}{\Gamma(n/4)} \left(Ct^{1/4} \int |V(x)| dx \right)^{n-1},$$

оператор $U(t) - U_0(t)$ — ядерный в $L_2(\mathbb{R}^3)$ и

$$\mathrm{Tr}(U(t) - U_0(t)) = (2\pi)^{-3} t^{1/4} \int e^{-P(\xi)} d\xi \int V(x) dx + O(\sqrt{t}), \quad t \downarrow 0.$$

Отметим, что регуляризованный след в борновском приближении совпадает с главным членом выписанной асимптотики.

Список литературы

- [1] М. В. Федорюк, *Матем. сб.*, **62**:4 (1963), 397–468. [2] М. А. Евграфов, М. М. Постников, *Матем. сб.*, **82**:1 (1970), 3–29; англ. пер.: М. А. Evgrafov, М. М. Postnikov, *Sb. Math.*, **11**:1 (1970), 1–24. [3] С. Г. Гиндикин, М. В. Федорюк, *Матем. сб.*, **91**:4 (1973), 500–522; англ. пер.: S. G. Gindikin, M. V. Fedorjuk, *Sb. Math.*, **20**:4 (1973), 519–542. [4] М. А. Евграфов, *Матем. сб.*, **112**:3 (1980), 331–353; англ. пер.: М. А. Evgrafov, *Math. USSR-Sb.*, **40**:3 (1981), 305–324. [5] М. М. Постников, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Сборник статей. К 80-летию со дня рождения академика Евгения Фроловича Мищенко, Тр. МИАН, **236**, Наука, М., 2002, 272–284; англ. пер.: М. М. Postnikov, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **236** (2002), 260–272. [6] С. А. Степин, *Докл. АН*, **420**:4 (2008), 459–462; англ. пер.: S. A. Stepin, *Dokl. Math.*, **77**:3 (2008), 424–427. [7] С. А. Степин, *Дифференциальные уравнения и топология*. II, Сборник статей. К 100-летию со дня рождения академика Льва Семеновича Понтрягина, Тр. МИАН, **271**, МАИК, М., 2010, 241–258; англ. пер.: S. A. Stepin, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **271** (2010), 228–245.

С. А. Степин (S. A. Stepin)

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова;
Institute of Mathematics, University of Białystok

Представлено Р. А. Минлосом

Принято редколлегией
03.04.2011