Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Дж. Харнад, В. З. Энольский, Разложение по функциям Шура τ -функций КП, ассоциированных с алгебраическими кривыми, *УМН*, 2011, том 66, выпуск 4, 137–178

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9435>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 18:09:44

УДК 515.178.2+517.958+514

Разложение по функциям Шура τ -функций КП, ассоциированных с алгебраическими кривыми

Дж. Харнад, В. З. Энольский

В работе рассматривается разложение τ -функций КП Сато–Сигала–Вильсона по функциям Шура. Подробно разобран случай τ -функций, связанных с алгебраическими кривыми произвольного рода. Явные выражения для плюккерových координат, возникающих как коэффициенты в этом разложении, получены в терминах производных по направлению θ -функции Римана или σ -функции Клейна вдоль направления потока иерархии КП. С помощью фундаментального бидифференциала показано, что плюккерovy координаты могут быть выражены в виде полиномов от введенных Клейном аналогов для высших родов ζ - и $\wp$ -функций Вейерштрасса. В качестве иллюстрации к развитому в работе подходу детально изложены случаи гиперэллиптических кривых рода два и тригональных кривых рода три.

Библиография: 53 названия.

Ключевые слова: τ -функции, σ -функции, θ -функции, функции Шура, уравнение Кадомцева–Петвиашвили, алгебро-геометрические решения солитонных уравнений.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение.....	138
2. История вопроса. τ -функция Сато–Сигала–Вильсона.....	144
2.1. Грассманиан гильбертова пространства и плюккерovy координаты.....	145
2.2. Абелева группа потока Γ_+ и τ -функция КП.....	149
2.3. Разложение в ряд по функциям Шура.....	150
3. Алгебраические кривые.....	154
3.1. Функция Бейкера–Ахиезера и τ -функция для алгебраических кривых.....	154
3.2. Последовательности пробелов Вейерштрасса, базисы и фундаментальный бидифференциал.....	159
3.3. Модель плоской кривой.....	161
3.4. σ -функции и алгебро-геометрические формулы для $\pi_\lambda(w)$	163

Работа частично поддержана Natural Sciences and Engineering Research Council (NSERC), Канада, и фондом FQRNT, Квебек.

4. Примеры и приложения разложений по функциям Шура.....	167
4.1. τ -функция гиперэллиптической кривой.....	167
4.2. τ -функция тригональной кривой.....	173
Список литературы.....	175

1. Введение

В середине 1970-х годов С.П. Новиков и Б.А. Дубровин [1]–[3], А.Р. Итс и В.Б. Матвеев [4], [5] (см. также [6]–[9]) применили подход лаксовой пары (изоспектральной деформации) к оператору Хилла для периодических потенциалов с конечнозонным спектром и таким образом определили конечнозонные периодические решения уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ)

$$\mathcal{U}_t = 6\mathcal{U}\mathcal{U}_x - \mathcal{U}_{xx}. \quad (1.1)$$

Итс и Матвеев открыли замечательную формулу, явно задающую периодические и квазипериодические решения уравнения КдФ как вторую логарифмическую производную θ -функции Римана:

$$\mathcal{U}(x, t) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \theta(\mathbf{U}x + \mathbf{V}t + \mathbf{W}) + C, \quad (1.2)$$

где $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W} = \text{const} \in \mathbb{C}^g$ и $C \in \mathbb{C}$. Здесь θ -функция определена решеткой периодов гиперэллиптической кривой X произвольного рода g , а “обмоточные векторы” $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ – периоды абелевых дифференциалов второго рода. Этот результат следует из более общей формулы (3.7) для ассоциированной функции Бейкера–Ахиезера (см. (2.61)), которая применима для иерархии КП и впервые получена Итсом в случае КдФ (она появляется в приложении к [10]).

Вышеизложенное составило важную часть общей теории алгебро-геометрических решений уравнения КдФ (см., например, обзор [10]). И.М. Кричевер [11] распространил эти соображения в более общем случае на квазипериодические решения иерархии КП, что привело к общему методу решения таких уравнений в частных производных, определяемых заданием алгебраической кривой и некоторой дополнительной информации о ней. (Обзор этого подхода и дальнейшие приложения см. в [12].) Эти результаты оказали большое влияние на последующие разработки в теории интегрируемых нелинейных иерархий и их приложения в различных областях математики и физики.

Феномен алгебро-геометрической интегрируемости был рассмотрен с разных точек зрения. В этой работе мы обсуждаем теорию τ -функций такой, какой она сформулирована у М. и Я. Сато [13]–[15] и была развита в работах М. Сато, Э. Дейта, М. Джимбо, М. Касивара, Т. Мива и др. (см., например, [16]). Мы также используем геометрическую формулировку Г. Сигала и Дж. Вильсона [17]. В этом подходе τ -функция

$$\tau = \tau_w(\mathbf{t}), \quad \tau_w(\mathbf{0}) \neq 0, \quad (1.3)$$

считается зависящей от двух наборов переменных – бесконечномерного вектора $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots) \in \mathbb{C}^\infty$ и элемента $w \in \text{Gr}_{\mathcal{H}_+}(\mathcal{H})$ бесконечномерного грассманиана, состоящего из подпространств поляризованного гильбертова про-

странства (прямой суммы двух взаимно ортогональных линейно изоморфных подпространств)

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ + \mathcal{H}_-, \quad (1.4)$$

“соизмеримых” с фиксированным подпространством $\mathcal{H}_+$ (т.е. ортогональная проекция на $\mathcal{H}_+$ является “большой” – фредгольмовым оператором, в то время как проекция на $\mathcal{H}_-$, например, лежит в классе Гильберта–Шмидта). Плюккеровы соотношения, определяющие вложение $\text{Gr}_{\mathcal{H}_+}(\mathcal{H})$ как подмногообразия проективизации бесконечного внешнего пространства $\mathbf{P}(\Lambda\mathcal{H})$, эквивалентны бесконечному набору билинейных дифференциальных соотношений на переменные $\mathbf{t}$, а именно уравнениям Хироты, из которых, в свою очередь, следуют уравнения иерархии КП.

В частном случае, который мы рассматриваем в этой работе, w определяется некоторыми алгебро-геометрическими данными, а именно данными Дубровина–Кричевера–Новикова (далее ДКН), состоящими из алгебраической кривой X рода g , эффективного неспециального дивизора степени g :

$$\mathcal{D} = \sum_{i=1}^g p_i, \quad p_i \in X, \quad (1.5)$$

точки p_∞ на “бесконечности” и локального параметра $\xi = 1/z$ с $\xi(p_\infty) = 0$.

Затем мы выбираем базис гомологий $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_g; \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_g\}$ для X , состоящий из $\mathbf{a}$ - и $\mathbf{b}$ -циклов, удовлетворяющих условиям пересечения

$$\mathbf{a}_i \circ \mathbf{a}_j = 0, \quad \mathbf{b}_i \circ \mathbf{b}_j = 0, \quad \mathbf{a}_i \circ \mathbf{b}_j = \delta_{ij}, \quad (1.6)$$

а также нормированный базис $\{u_1, \dots, u_g\}$ голоморфных абелевых дифференциалов и каноническое разрезание (полигонизацию) кривой X , полученное разрезанием вдоль $\mathbf{a}$ - и $\mathbf{b}$ -циклов. После выбора произвольной базисной точки p_0 отображение Абеля

$$\mathcal{A}: \mathcal{S}^g X \rightarrow \mathcal{J}(X) = \mathbb{C}^g / \Gamma \quad (1.7)$$

из g -й симметрической степени кривой X в ее многообразие Якоби (фактор $\mathbb{C}^g$ по решетке периодов) определяется интегрированием этих дифференциалов от базисной точки до нужных точек. Данные ДКН определяют вектор $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_g)^T \in \mathbb{C}^g$ как образ дивизора $\mathcal{D}$ при отображении Абеля (с точностью до полигонизации)

$$\mathbf{e} = \mathcal{A}(\mathcal{D}) - \mathcal{A}(p_\infty) + \mathbf{K}, \quad (1.8)$$

сдвинутым на константу Римана $\mathbf{K}$, соответствующую полигонизации. Мы можем теперь кратко обозначить соответствующую τ -функцию как $\tau(\mathbf{e}, \mathbf{t})$.

τ -функция может быть представлена в виде ряда Тейлора от $\mathbf{t}$ и затем разложена по базису, состоящему из функций Шура $s_\lambda(\mathbf{t})$, параметризованных разбиениями $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\ell(\lambda)})$ (где λ_i образуют нестрого убывающую последовательность неотрицательных целых чисел $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$ с ненулевым последним членом $\lambda_{\ell(\lambda)}$, где $\ell(\lambda)$ – длина λ). Параметры тока $(t_1, t_2, \dots)$ могут быть отождествлены с мономиальными суммами

$$t_i = \frac{1}{i} \sum_{a=1}^N x_a^i \quad (1.9)$$

N вспомогательных переменных для любого $N \geq \ell(\lambda)$ посредством перехода к (устойчивому) пределу $N \rightarrow \infty$.

Тождество Коши–Литтлвуда [18] (эквивалентное свойству абелевой группы потока КП) позволяет нам записать это разложение по базису в виде

$$\tau(\mathbf{e}, \mathbf{t}) = \sum_{\lambda} \left[s_{\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial t_1}, \dots, \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial t_k}, \dots \right) \tau(\mathbf{e}, \mathbf{t}) \right] \Big|_{\mathbf{t}=\mathbf{0}} s_{\lambda}(\mathbf{t}), \quad (1.10)$$

где суммирование идет по всем разбиениям λ . Важно отметить, что коэффициенты в этом разложении,

$$\pi_{\lambda}(w) := \left[s_{\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial t_1}, \dots, \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial t_k}, \dots \right) \tau(\mathbf{e}, \mathbf{t}) \right] \Big|_{\mathbf{t}=\mathbf{0}}, \quad (1.11)$$

являются в точности плюккеровыми координатами элемента $w \in \text{Gr}_{\mathcal{H}_+}(\mathcal{H})$ при плюккеровом вложении

$$\mathfrak{P}: \text{Gr}_{\mathcal{H}_+}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathcal{F}) \quad (1.12)$$

в проективизацию внешнего пространства

$$\mathcal{F} = \Lambda \mathcal{H}, \quad (1.13)$$

которое является пополнением пространства сумм, над базисом, состоящим из полубесконечных внешних произведений базисных элементов из $\mathcal{H}$ (фермионного фоковского пространства). В этой постановке билинейные соотношения Хироты иерархии КП эквивалентны плюккеровым соотношениям, которым удовлетворяют коэффициенты $\{\pi_{\lambda}(w)\}$.

Каждому разбиению $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ мы ставим в соответствие, как обычно, диаграмму Юнга с λ_1 клетками в первом ряду, λ_2 клетками во втором и т. д. Например,

$$\lambda = (3, 3, 1) \Leftrightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \quad (1.14)$$

Разбиения вида $(k, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_j) \equiv (k, 1^j)$ называются *крюками*. Разбиения могут быть эквивалентным образом представлены в обозначениях Фробениуса как

$$\lambda \sim (a_1, \dots, a_k \mid b_1, \dots, b_k), \quad (1.15)$$

где k – число диагональных ячеек в диаграмме Юнга, называемое рангом разбиения, а числа a_i и числа b_i – количество ячеек соответственно справа и снизу от диагональных ячеек [19]. Формула Джамбелли

$$s_{(a_1, \dots, a_k \mid b_1, \dots, b_k)} = \det(s_{(a_i \mid b_j)}) \quad (1.16)$$

выражает функцию Шура, соответствующую произвольному разбиению, как детерминант матрицы, элементы которой суть функции Шура, соответствующие только диаграммам-крюкам. М. Сато также использовал формулу Джамбелли в разложении коэффициентов выражения (1.10), так как верны те же

самые детерминантные соотношения, записанные для плюккеровых координат образа любого элемента w грассманиана (т. е. для любого полностью разложимого элемента из $\Lambda\mathcal{H}$) в терминах координат разбиений-крюков (см. (2.23)). Это составляет явное решение плюккеровых соотношений, применимое на аффинной окрестности, соответствующей “большой клетке”. Согласно (1.11), результирующие соотношения возникают как уравнения в частных производных, для которых τ -функция играет роль производящей функции.

Такие разложения в ряд справедливы для любой τ -функции $\tau_w(\mathbf{t})$, но здесь мы в основном будем рассматривать τ -функции $\tau(\mathbf{e}, \mathbf{t})$, ассоциированные с данными ДКН на алгебраической кривой X рода g , и вычислим коэффициенты разложения по функциям Шура в этом случае.

Пусть кривая X снабжена каноническим базисом гомологий $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_g; \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_g)$ и соответствующей полигонизацией, выберем базис голоморфных дифференциалов $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_g)^T$, упорядоченных согласно степени их обращения в нуль в точке Вейерштрасса p_∞ в бесконечности, $n_g + 1, \dots, n_1 + 1$, где $\mathfrak{W} = (n_1, \dots, n_g)$ – последовательность пробелов Вейерштрасса в p_∞ (см. п. 3.2).

Обозначим через $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ матрицы периодов:

$$\mathfrak{A} = \left(\oint_{\mathbf{a}_j} u_i \right)_{i,j=1,\dots,g}, \quad \mathfrak{B} = \left(\oint_{\mathbf{b}_j} u_i \right)_{i,j=1,\dots,g}. \quad (1.17)$$

Тогда якобиан кривой $\text{Jac}(X)$ определяется как $\mathbb{C}^g / \mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$.

Будем говорить о $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ как о первых матрицах периодов или римановых матрицах периодов. Вторые матрицы периодов, $(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$, образованы подобным образом из периодов мероморфных дифференциалов $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_g)^T$ с полюсами только в точках Вейерштрасса p_∞ , порядков $n_g + 1, \dots, n_1 + 1$ соответственно. Матрицы

$$\mathfrak{S} = - \left(\oint_{\mathbf{a}_j} r_i \right)_{i,j=1,\dots,g}, \quad \mathfrak{T} = - \left(\oint_{\mathbf{b}_j} r_i \right)_{i,j=1,\dots,g} \quad (1.18)$$

нормированы условием (обобщенным уравнением Лежандра)

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{B} \\ \mathfrak{S} & \mathfrak{T} \end{pmatrix} \mathbf{J} \begin{pmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{B} \\ \mathfrak{S} & \mathfrak{T} \end{pmatrix}^T = -2i\pi \mathbf{J}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_g & -\mathbf{1}_g \\ \mathbf{1}_g & \mathbf{0}_g \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

Матрица

$$\varkappa := \mathfrak{S} \mathfrak{A}^{-1} \quad (1.20)$$

с необходимостью симметрична, $\varkappa^T = \varkappa$, и

$$\mathfrak{S} = \varkappa \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{T} = \varkappa \mathfrak{B} - \frac{i\pi}{2} (\mathfrak{A}^{-1})^T. \quad (1.21)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. В базисе $(\mathbf{u}, \mathbf{r})$ мероморфные дифференциалы $\mathbf{r}$ определены не однозначно, а только с точностью до прибавления голоморфного дифференциала. Поэтому матрица $\varkappa$ определена только с точностью до прибавления произвольной симметричной матрицы. Тем не менее, для наших целей достаточно выбрать конкретного представителя класса дифференциалов $\mathbf{r}$, и таковой будет указан в каждом случае, рассмотренном детально в примерах.

Следуя Г. Ф. Бейкеру [20], мы ассоциируем с кривой X фундаментальный бидифференциал $\Omega(p, q)$, который является единственной симметричной мероморфной 2-формой на $X \times X$ с полюсом второго порядка на диагонали $p = q$, а вне диагонали голоморфной по каждой переменной. Локально он принимает вид

$$\Omega(p, q) = \frac{d\xi(p) d\xi(q)}{(\xi(p) - \xi(q))^2} + \sum_{i,j=0}^{\infty} \mu_{ij}(p_0) \xi(p)^i \xi(q)^j d\xi(p) d\xi(q), \quad (1.22)$$

где $\xi(p)$ и $\xi(q)$ – локальные координаты в окрестности базисной точки p_0 , $\xi(p_0) = 0$, а коэффициенты $\mu_{ij}(p_0)$ являются симметричными по индексам i и j : $\mu_{ij}(p_0) = \mu_{ji}(p_0)$. 2-форма $\Omega(p, q)$ нормирована соотношениями

$$\oint_{a_j} \Omega(p, q) = 0, \quad j = 1, \dots, g. \quad (1.23)$$

Обычно $\Omega(p, q)$ реализуется как вторая логарифмическая производная прим-формы или θ -функции [21], [22]. Но в нашем подходе мы используем альтернативное представление $\Omega(p, q)$ в алгебраической форме, которая восходит к Вейерштрассу и Клейну, как описано Бейкером в [23]:

$$\Omega(p, q) = \frac{\mathcal{F}(p, q)}{P_y(p)P_w(q)(x - z)^2} dx dz + 2\mathbf{u}(p)^T \varkappa \mathbf{u}(q), \quad (1.24)$$

где $p = (x, y)$, $q = (z, w)$, функция $\mathcal{F}(p, q) = \mathcal{F}((x, y), (z, w))$ является полиномом от своих аргументов с коэффициентами, зависящими от параметров, явно определяющих кривую X как плоскую модель, заданную полиномиальным уравнением

$$P(x, y) = 0, \quad (1.25)$$

$\mathbf{u}$ является g -компонентным вектором, состоящим из голоморфных дифференциалов, а $\varkappa$ – симметричная матрица (1.20), задающая нормировку (1.23) бидифференциала $\Omega(p, q)$. Мы будем говорить о первом члене в правой части (1.24), который включает полином $\mathcal{F}(p, q)$, как об алгебраической части¹ и обозначать ее $\Omega^{\text{alg}}(p, q)$.² В окрестности базисной точки p_0 , $\xi(p_0) = 0$, форма $\Omega^{\text{alg}}(p, q)$ разлагается в степенной ряд:

$$\Omega^{\text{alg}}(p, q) = \frac{d\xi(p) d\xi(q)}{(\xi(p) - \xi(q))^2} + \sum_{i,j=0}^{\infty} \mu_{ij}^{\text{alg}}(p_0) \xi(p)^i \xi(q)^j d\xi(p) d\xi(q), \quad (1.26)$$

где величины $\mu_{ij}^{\text{alg}}(p_0)$ являются алгебраическими функциями от $\xi(p_0)$ и коэффициентов кривой. Трансцендентная часть $\Omega^{\text{trans}}(p, q)$ бидифференциала $\Omega(p, q)$ голоморфна, и ее разложение в ряд в окрестности базисной точки p_0 имеет вид

$$\Omega^{\text{trans}}(p, q) \equiv 2\mathbf{u}(p)^T \varkappa \mathbf{u}(q) = \sum_{i,j=0}^{\infty} \mu_{ij}^{\text{trans}}(p_0) \xi(p)^i \xi(q)^j d\xi(p) d\xi(q). \quad (1.27)$$

¹Множитель 2 в нормировке делает случай $g = 1$ согласованным с обычным случаем в теории эллиптических функций Вейерштрасса.

²Представление (1.24) развито далее В. М. Бухштабером, Д. В. Лейкиным и одним из авторов [24] и в последнее время А. Накаяшики [25].

Поэтому

$$\Omega(p, q) = \Omega^{\text{alg}}(p, q) + \Omega^{\text{trans}}(p, q) \quad (1.28)$$

и

$$\mu_{ij}(p_0) = \mu_{ij}^{\text{alg}}(p_0) + \mu_{ij}^{\text{trans}}(p_0) \quad (1.29)$$

для всех p_0 и $i, j \in \mathbb{Z}$.

На описанном выше алгебраическом представлении фундаментального дифференциала основано определение многомерной σ -функции в терминах многомерной (римановой) θ -функции θ . Она отличается от θ экспоненциальным множителем и модулярным множителем C :

$$\sigma(\mathbf{v}) = C \exp\left\{\frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathfrak{K} \mathbf{v}\right\} \theta(\mathfrak{A}^{-1} \mathbf{v}; \tau), \quad (1.30)$$

где $\mathfrak{K}$ и $\mathfrak{A}$ определены в (1.20) и (1.17). Эти изменения делают $\sigma(\mathbf{v})$ инвариантной относительно действия симплектической группы, таким образом, для любого $\gamma \in \text{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ имеем:

$$\sigma(\mathbf{v}; \gamma \circ \mathfrak{M}) = \sigma(\mathbf{v}; \mathfrak{M}), \quad (1.31)$$

где $\mathfrak{M}$ – набор периодов кривой X . Многомерная σ -функция является естественным обобщением σ -функции Вейерштрасса на алгебраические кривые высших родов.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. В своих лекциях [26] Вейерштрасс определил σ -функцию как ряд, коэффициенты которого заданы рекуррентно, что явилось ключевым моментом теории эллиптических функций Вейерштрасса. Обобщение этого результата на кривые рода два было начато Бейкером [20] и недавно завершено Бухштабером и Лейкиным [27], получившими рекуррентные соотношения на коэффициенты ряда для σ -функции в виде замкнутой системы. Также Бухштабер и Лейкин недавно нашли операторную алгебру, аннулирующую σ -функцию (n, s) -кривых высших родов [28]. Нахождение соответствующего рекуррентного определения σ -функций высших родов в стиле работы [28] остается перспективной задачей.

В данной работе мы изучаем связи между многомерной σ -функцией и τ -функцией Сато [13]–[15] для случая квазипериодических решений, ассоциированных с данными ДКН на алгебраической кривой. Таким образом, в основном мы рассматриваем этот класс “алгебро-геометрических τ -функциональных” решений. Они по существу те же, что и решения исследованные Феём [29], [30] в терминах θ -функций. Такие τ -функции могут быть выражены через σ -функции следующим образом (см. предложение 3.1)³:

$$\frac{\tau(\mathbf{e}, \mathbf{t})}{\tau(\mathbf{e}, \mathbf{0})} = \frac{\sigma\left(\sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{A} \mathbf{U}_k(p_{\infty}) t_k + \mathfrak{A} \mathbf{e}\right)}{\sigma(\mathfrak{A} \mathbf{e})} \exp\left\{\frac{1}{2} \sum_{k, l=0}^{\infty} \mu_{kl}^{\text{alg}}(p_{\infty}) t_k t_l\right\}. \quad (1.32)$$

Здесь, как и выше, $\mathfrak{A}$ – матрица периодов голоморфных дифференциалов, $\mathbf{U}_k(p_{\infty})$, $k = 1, 2, \dots$, – “обмоточные векторы”, т. е. $\mathfrak{b}$ -периоды нормированных

³Недавно Накаяшики [31] независимо предложил подобное выражение для алгебро-геометрических τ -функций в терминах многомерной σ -функции и изучил свойства σ -ряда.

дифференциалов второго рода с полюсами порядка $k + 1$ в точке p_∞ , а e – произвольная точка многообразия Якоби $\text{Jac}(X)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. В серии работ [32]–[34] В.М. Бухштабер и С.Ю. Шорина также изучили связи между θ -функциональными и σ -функциональными решениями иерархии КдФ.

Работа упорядочена следующим образом. В разделе 2 мы рассматриваем геометрическую формулировку τ -функции Сато–Сигала–Вильсона в терминах грассманианов гильбертова пространства. Выводится интерпретация коэффициентов разложения по функциям Шура как плюккерových координат (предложение 2.2), а также их выражение в терминах аффинных координат на большой клетке и разбиений-крюков (следствие 2.3).

В разделе 3 мы ограничиваемся специальным случаем τ -функций, ассоциированных с данными ДКН на алгебраической кривой. Явная формула для таких τ -функций в терминах θ -функций Римана дана в (3.37). Аффинные координаты, задающие разложение по функциям Шура, явно вычисляются (см. (3.31)) в терминах производных по направлению θ -функции Римана вдоль направлений потока. В п. 3.2 мы рассматриваем теорему Вейерштрасса о пробелах и вводим нормированный симметричный бидифференциал $\Omega(p, q)$. Это позволяет нам сделать явным разделение на “алгебраическую” и “трансцендентную” части (следствие 3.1) бесконечной квадратичной формы Q , возникающей в экспоненциальном члене в (3.37) и в формуле (3.31), определяющей аффинные координаты. Эквивалентное выражение для τ -функции в терминах σ -функции, явно выражающее ее свойства при модулярном преобразовании, выводится в предложении 3.1, формула (3.77). Отсюда выводится метод явного вычисления матричных элементов матрицы аффинных координат как полиномов от функций Клейна $\{\zeta_i, \wp_{ij}\}$, которые обобщают ζ - и $\wp$ -функции Вейерштрасса на кривые произвольного рода.

В разделе 4 мы рассматриваем несколько примеров, для которых аффинные координаты вычисляются явно, и используем плюккерových соотношения для вывода тождеств, связывающих ζ - и $\wp$ -функции Клейна различных степеней. Случай гиперэллиптических кривых рассмотрен детально, явные формулы получены в случае рода $g = 2$. В предложении 4.1 мы выводим алгебраические соотношения между $\wp$ -функциями Клейна разных порядков для этого случая. Рассмотрен следующий пример, основанный на модели некоторого класса плоских тригональных кривых, и даны явные выражения для простейших матричных элементов матрицы аффинных координат, вычисленных в терминах ζ - и $\wp$ -функций Клейна для этого случая, а также тождества, связывающие $\wp$ -функции разных порядков, которые снова следуют из плюккерových соотношений.

2. История вопроса. τ -функция Сато–Сигала–Вильсона

Последующее является кратким изложением подходов Сато [15], а также Сигала и Вильсона [17] к τ -функциям КП. Первый является существенно алгебраическим по сути, второй – функционально-аналитическим, но мы комбинируем

элементы обоих подходов. За более точными определениями основных составляющих частей (грассманианы гильбертова пространства, бесконечные группы преобразований, линейные расслоения детерминантов, фермионное фоковское пространство, плюккерovo отображение и т. д.) читатель может обратиться к этим двум первоисточникам, которые согласованы в геометрической структуре, но не в аналитических деталях. Вводное изложение, данное ниже, мы старались сделать простым и самодостаточным – насколько это возможно, а также применимым к рассматриваемым случаям. Функционально-аналитические детали общей постановки задачи либо опускаются, либо опираются на [17], а составляющие части, по возможности, сделаны похожими на конечномерный случай.

2.1. Грассманиан гильбертова пространства и плюккерovy координаты. Следуя [17], мы начинаем с гильбертова пространства

$$\mathcal{H} := L^2(S^1) = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_- \quad (2.1)$$

комплекснозначных функций f на единичной окружности $\{z = e^{i\phi}\}$ в комплексной плоскости, квадраты которых интегрируемы и которые могут быть разложены в сумму

$$f = f_+ + f_-, \quad f_{\pm} \in \mathcal{H}_{\pm}, \quad (2.2)$$

где $f_{\pm} \in \mathcal{H}_{\pm}$ – положительная и отрицательная части ряда Фурье.

Иными словами, $\mathcal{H}_+$ можно интерпретировать как пространство голоморфных функций на внутренности единичного круга и $\mathcal{H}_-$ – как пространство голоморфных функций вне круга, обращающихся в нуль при $z = \infty$, с ортонормированными базисами из мономов по z :

$$\mathcal{H}_+ = \text{span}\{e_j := z^{-j-1}\}_{j=-1,-2,\dots}, \quad \mathcal{H}_- = \text{span}\{e_j := z^{-j-1}\}_{j=0,1,2,\dots}. \quad (2.3)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Соглашение обозначать базисные векторы e_j таким образом, что $\mathcal{H}_+$ является линейной оболочкой векторов с отрицательными индексами j , выбрано так, чтобы при плюккеровом отображении (см. ниже) $\mathcal{H}_+$ переводилось в $|0\rangle = e_{-1} \wedge e_{-2} \wedge \dots$, являющееся “дираковским морем”, в котором все состояния с отрицательной “энергией” заняты.

Мы обозначаем через $\text{Gr}_{\mathcal{H}_+}(\mathcal{H})$ грассманиан гильбертова пространства, точки которого – замкнутые подпространства $w \subset \mathcal{H}$, соизмеримые с $\mathcal{H}_+$ в том смысле, что ортогональная проекция $\pi^{\perp}: w \rightarrow \mathcal{H}_+$ на $\mathcal{H}_+$ вдоль $\mathcal{H}_-$ является фредгольмовым отображением индекса нуль и ортогональная проекция $\pi^{\perp}: w \rightarrow \mathcal{H}_-$ на $\mathcal{H}_-$ вдоль $\mathcal{H}_+$ принадлежит классу Гильберта–Шмидта. (В [17] он называется компонентой *виртуальной размерности нуль* полного грассманиана гильбертова пространства.)

Пусть

$$\begin{aligned} w &= \text{span}\{w_j\}_{j \in \mathbb{N}}, \\ w_j &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} w_{ij} e_i. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Относительно мономиального базиса $\{e_j\}$ репер $\{w_0, w_1, \dots\}$ может быть представлен как бесконечная матрица W с компонентами $\{w_{ij}\}_{i \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{N}}$, j -й столбец W_j которой имеет компоненты $\{w_{ij}\}_{i \in \mathbb{Z}}$:

$$W = (W_0, W_1, \dots) = \begin{pmatrix} W_+ \\ W_- \end{pmatrix} \begin{matrix} -\infty \\ \vdots \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ +\infty \end{matrix}, \quad (2.5)$$

где строки занумерованы целыми числами, возрастающими при движении вниз, с нулевой строкой наверху блока W_- , а столбцы занумерованы неотрицательными целыми числами, начинающимися с нуля слева и возрастающими при движении направо.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Отметим, что способ нумерации столбцов соответствует мономиальным степеням в $\mathcal{H}_+$, тогда как способ нумерации строк соответствует базисным элементам $\{e_j\}$.

Здесь W_- и W_+ могут рассматриваться как представители соответственно отображений $w_- : \mathcal{H}_+ \rightarrow \mathcal{H}_-$ и $w_+ : \mathcal{H}_+ \rightarrow \mathcal{H}_+$ таких, что w – образ их суммы:

$$w = (w_- + w_+)(\mathcal{H}_+). \quad (2.6)$$

Грассманиан $\text{Gr}_{\mathcal{H}_+}(\mathcal{H})$ можно интерпретировать как фактор расслоения $\text{Fr}_{\mathcal{H}_+}(\mathcal{H})$ допустимых реперов по правому действию группы $\mathfrak{Gl}(\mathcal{H}_+)$ линейных преобразований базиса. (См. в [17] точное определение, согласно которому у элементов $\mathfrak{Gl}(\mathcal{H}_+)$ должен быть ненулевой конечный детерминант.) Таким образом, $\text{Fr}_{\mathcal{H}_+}(\mathcal{H})$ можно рассматривать, подобно конечномерному случаю, как главное $\mathfrak{Gl}(\mathcal{H}_+)$ -расслоение над $\text{Gr}_{\mathcal{H}_+}(\mathcal{H})$, с которым мы можем ассоциировать посредством детерминантного представления линейное расслоение $\text{Det} \rightarrow \text{Gr}_{\mathcal{H}_+}(\mathcal{H})$ и двойственное к нему $\text{Det}^* \rightarrow \text{Gr}_{\mathcal{H}_+}(\mathcal{H})$. Голоморфное сечение последнего определяется разбиением $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{\ell(\lambda)} > 0)$, $\lambda_i \in \mathbb{N}$, где $\ell(\lambda)$ обозначает длину, подобно конечномерному случаю. Расширим множество частей $\{\lambda_j\}_{j=1, \dots, \ell(\lambda)}$ до бесконечной последовательности $\{\lambda_j\}_{j=1, \dots, \infty}$ обычным способом [18], полагая

$$\lambda_j = 0, \quad \text{если } j > \ell(\lambda). \quad (2.7)$$

Детерминант $\det(W_\lambda)$ подматрицы W_λ матрицы W , состоящей из строк $\{\lambda_i - i\}_{i \in \mathbb{N}}$, определяет голоморфные сечения $\sigma : \text{Gr}_{\mathcal{H}_+}(\mathcal{H}) \rightarrow \text{Det}^*$ расслоения $\text{Det}^* \rightarrow \text{Gr}_{\mathcal{H}_+}(\mathcal{H})$, которые порождают пространство допустимых сечений. (За аналитическими подробностями, необходимыми для определения класса допустимых сечений, мы снова отсылаем читателя к [17].)

Как и в конечномерном случае, пространство таких голоморфных сечений может быть отождествлено с некоторым подпространством $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ внешнего пространства $\mathcal{F} := \Lambda \mathcal{H}$, “сектором нулевого заряда” пространства $\mathcal{F}$, которое

можно интерпретировать как полное “фермионное фоковское пространство”. Пусть $\mathcal{F}_0$ – линейная оболочка внешних элементов

$$|\lambda\rangle := e_{l_1} \wedge e_{l_2} \wedge e_{l_3} \wedge \cdots, \quad (2.8)$$

где l_i -е для каждого разбиения $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ – это “координаты частиц”:

$$l_i = \lambda_i - i. \quad (2.9)$$

Внешние элементы образуют ортонормированный базис относительно внутреннего произведения, индуцированного на $\mathcal{F}_0 \subset \Lambda \mathcal{H}$ произведением на $\mathcal{H}$.

Для каждого разбиения λ мы можем также определить $\mathcal{H}_\lambda \in \text{Gr}_{\mathcal{H}_+}(\mathcal{H})$ формулой

$$\mathcal{H}_\lambda = \text{span}\{e_{l_i}\}_{i \in \mathbb{N}}. \quad (2.10)$$

В частности, элемент $\mathcal{H}_0$, соответствующий тривиальному разбиению $\lambda = 0$, есть $\mathcal{H}_+$. Определим плюккерovo отображение $\widehat{\mathfrak{P}}: \text{Gr}_{\mathcal{H}_+}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{F}_0$ естественным образом:

$$\widehat{\mathfrak{P}}: \text{Gr}_{\mathcal{H}_+}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{F}_0, \quad (2.11)$$

$$\widehat{\mathfrak{P}}: \{w_0, w_1, \dots\} \mapsto w_0 \wedge w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots. \quad (2.12)$$

При изменении репера $\{w_0, w_1, \dots\}$, порождающего подпространство $w \subset \mathcal{H}$ действием (справа) элемента $g \in \mathfrak{Gl}(\mathcal{H}_+)$, меняется только образ действия $\widehat{\mathfrak{P}}$ на ненулевой мультипликативный множитель $\det(g)$. Поэтому плюккерovo отображение (2.12) на расслоении решетки проецируется в отображение вложения $\text{Gr}_{\mathcal{H}_+}(\mathcal{H})$ в проективизацию $\mathbf{P}(\mathcal{F}_0)$ пространства $\mathcal{F}_0$

$$\mathfrak{P}: \text{Gr}_{\mathcal{H}_+}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathcal{F}_0),$$

$$\mathfrak{P}: \{w_0, w_1, \dots\} \mapsto [w_0 \wedge w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots], \quad (2.13)$$

где $[|v\rangle]$ обозначает класс проективной эквивалентности элемента $|v\rangle \in \mathcal{F}_0$. В частности,

$$\mathfrak{P}(\mathcal{H}_\lambda) = [|\lambda\rangle]. \quad (2.14)$$

Образ $\text{Gr}_{\mathcal{H}_+}(\mathcal{H})$ под действием $\mathfrak{P}$ является орбитой $\mathcal{H}_+$ под действием компоненты единицы общей линейной группы $\mathfrak{Gl}(\mathcal{H})$ (снова соответствующим образом определенной, как в [15] или [17]).

Плюккерovy координаты $\{\pi_\lambda(|v\rangle)\}$ элемента $|v\rangle \in \mathcal{F}_0$ есть просто его компоненты относительно ортонормированного базиса $\{|\lambda\rangle\}$:

$$\begin{aligned} \pi_\lambda(|v\rangle) &= \langle \lambda | v \rangle, \\ |v\rangle &= \sum_{\lambda} \pi_\lambda | \lambda \rangle. \end{aligned} \quad (2.15)$$

При применении плюккерова отображения $\widehat{\mathfrak{P}}$ к элементу $\{w_0, w_1, \dots\} \in \text{Gr}_{\mathcal{H}_+}(\mathcal{H})$, порождающему $w \in \text{Gr}_{\mathcal{H}_+}(\mathcal{H})$, плюккерovy координаты его образа становятся однородными координатами образа $\mathfrak{P}(w)$ плюккерова отображения (2.13):

$$\pi_\lambda(w) := \pi_\lambda(\mathfrak{P}(w)). \quad (2.16)$$

Из сказанного выше следует, что

$$\pi_\lambda(w) = \det(W_\lambda), \quad (2.17)$$

и поэтому базисы голоморфных сечений $\mathbf{H}^0(\mathrm{Gr}_{\mathcal{H}_+}(\mathcal{H}), \mathrm{Det}^*)$ расслоения Det^* , определенные разбиениями λ , соответствуют в точности плюккеровым координатам.

Плюккеровы соотношения являются бесконечным набором квадратичных соотношений, определяющих образ $\mathrm{Gr}_{\mathcal{H}_+}(\mathcal{H})$ под действием плюккерова отображения. Они следуют из того факта, что для любого $w \in \mathrm{Gr}_{\mathcal{H}_+}(\mathcal{H})$ образ $\mathfrak{P}(w)$ является разложимым элементом из $\mathcal{F}_0$. Плюккеровы координаты $\pi_\lambda(w)$, таким образом, не независимы; их можно выразить на открытом плотном аффинном подмногообразии как конечные детерминанты, зависящие от намного меньшего подмножества, состоящего, например, из тех плюккеровых координат, которые соответствуют разбиениям-крюкам. Удобно использовать обозначения Фробениуса $(a_1, a_2, \dots, a_r \mid b_1, b_2, \dots, b_r)$ для разбиения, [18], где (a_i, b_i) – числа элементов справа и ниже i -го диагонального элемента диаграммы Юнга для $i = 1, \dots, r$. Разбиение-крюк $\lambda = (a + 1, 1^b)$ – это разбиение с $r = 1$, в обозначениях Фробениуса, следовательно, выражающееся как $(a \mid b)$.

Чтобы понять, как плюккеровы координаты $\pi_{(a_1, a_2, \dots, a_r \mid b_1, b_2, \dots, b_r)}(w)$, соответствующие произвольному разбиению, выражаются в терминах координат разбиений-крюков $\{(a_i \mid b_j)\}_{1 \leq i, j \leq r}$, проще всего предположить, что w входит в “большую клетку”, в которой отображение $w_+ : \mathcal{H}_+ \rightarrow \mathcal{H}_+$ обратимо. Тогда бесконечная матрица W_+ из (2.5) также обратима, и мы можем определить аффинные координаты как матричные элементы матрицы

$$A := W_- W_+^{-1}. \quad (2.18)$$

По соглашению, индексы (a, b) будут принимать неотрицательные целые значения, следовательно, покомпонентная интерпретация определения (2.18) есть

$$A_{ab} := (W_- W_+^{-1})_{ab}, \quad a, b \in \mathbb{N}. \quad (2.19)$$

Однородные координаты в этом базисе имеют вид

$$W W_+^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ A \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

где $\mathbf{I}$ есть полубесконечная единичная матрица, $I_{ij} = \delta_{-i-1, j}$, которая, ввиду соглашения по нумерации, имеет единичные (i, j) -е элементы для $i \leq -1$, $j \geq 0$, и соглашение по нумерации для матрицы A в нижнем блоке состоит в том, что пара индексов (a, b) начинается с $(0, 0)$ в верхнем левом углу и возрастает вниз и вправо. Это позволяет нам выразить все плюккеровы координаты как конечные детерминанты, зависящие от аффинных координат на большой клетке.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Плюккеровы координаты $\pi_{(a_1, a_2, \dots, a_r \mid b_1, b_2, \dots, b_r)}(w)$, соответствующие разбиению $(a_1, a_2, \dots, a_r \mid b_1, b_2, \dots, b_r)$, есть*

$$\begin{aligned} \pi_{(a_1, a_2, \dots, a_r \mid b_1, b_2, \dots, b_r)}(w) &= \det(W_{(a_1, a_2, \dots, a_r \mid b_1, b_2, \dots, b_r)}) \\ &= (-1)^{\sum_{k=1}^r b_k} \det(A_{a_i b_j})_{1 \leq i, j \leq r} \det(W_+). \end{aligned} \quad (2.21)$$

В частности, мы можем рассмотреть случай разбиений-крюков, которые, согласно (2.21), совпадают с точностью до знака с компонентами матрицы аффинных координат A , позволяя всем остальным плюккеровым координатам быть выраженными как конечные детерминанты от них.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *Плюккеровы координаты, соответствующие разбиению-крюку $(a | b)$, есть, с точностью до знака, (a, b) -аффинные координаты,*

$$\pi_{(a | b)}(w) = (-1)^b A_{ab}, \quad (2.22)$$

и, следовательно,

$$\pi_{(a_1, a_2, \dots, a_r | b_1, b_2, \dots, b_r)}(w) = \det \left(\pi_{(a_i | b_j)}(w) \Big|_{1 \leq i, j \leq r} \right). \quad (2.23)$$

2.2. Абелева группа потока Γ_+ и τ -функция КП. Теперь мы вводим абелеву подгруппу $\Gamma_+ \subset \mathfrak{Gl}(\mathcal{H})$, состоящую из ненулевых элементов $\mathcal{H}_+$, нормированных таким образом, чтобы равняться 1 в начале координат $z = 0$:

$$\Gamma_+ := \left\{ \gamma(\mathbf{t}) := \exp \left(\sum_{i=1}^{\infty} t_i z^i \right) \right\}, \quad \mathbf{t} := (t_1, t_2, \dots), \quad (2.24)$$

действующую на $\mathcal{H}$ умножением

$$\begin{aligned} \Gamma_+ \times \mathcal{H} &\rightarrow \mathcal{H}, \\ (\gamma, f) &\mapsto \gamma f. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Это индуцирует действие на грассманиане

$$\begin{aligned} \Gamma_+ \times \text{Gr}_{\mathcal{H}_+}(\mathcal{H}) &\rightarrow \text{Gr}_{\mathcal{H}_+}(\mathcal{H}), \\ (\gamma(\mathbf{t}), w) &\mapsto \gamma(\mathbf{t})w, \end{aligned} \quad (2.26)$$

которое поднимается до действия на расслоении $\text{Det}^* \rightarrow \text{Gr}_{\mathcal{H}_+}(\mathcal{H})$ и определяет действие на пространстве голоморфных сечений $H^0(\text{Det}^*, \text{Gr}_{\mathcal{H}_+}(\mathcal{H}))$

$$\begin{aligned} \Gamma_+ \times H^0(\text{Det}^*, \text{Gr}_{\mathcal{H}_+}(\mathcal{H})) &\rightarrow H^0(\text{Det}^*, \text{Gr}_{\mathcal{H}_+}(\mathcal{H})), \\ (\gamma(\mathbf{t}), \sigma) &\mapsto \tilde{\gamma}(\mathbf{t})\sigma := \sigma \circ \gamma^{-1}(\mathbf{t}), \\ \tilde{\gamma}(\mathbf{t})\sigma(w) &:= \tilde{\gamma}(\mathbf{t})\sigma(\gamma^{-1}(\mathbf{t})w). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Последнее совпадает, с точностью до нормировки, с индуцированным действием на $\mathcal{F}_0 \subset \Lambda\mathcal{H}$. Пусть

$$w(\mathbf{t}) = \gamma(\mathbf{t})(w) \quad (2.28)$$

– образ $w \in \text{Gr}_{\mathcal{H}_+}(\mathcal{H})$ под действием элемента $\gamma(\mathbf{t})$ группы, и пусть $W(\mathbf{t})$ – ее матрица однородных координат относительно стандартного базиса мономов $\{e_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$. Тогда

$$\pi_\lambda(w(\mathbf{t})) = \det(W_\lambda(\mathbf{t})) \quad (2.29)$$

– плюккеровы координаты элемента $w(\mathbf{t})$, соответствующие разбиению λ . τ -функция КП определяется как плюккерова координата, соответствующая тривиальному разбиению $\lambda = 0$:

$$\tau_w(\mathbf{t}) := \pi_0(w(\mathbf{t})) = \det(W_+(\mathbf{t})). \quad (2.30)$$

Поскольку, как будет показано в следующем п. 2.3, все остальные плюккеровы координаты образа $w(\mathbf{t})$ могут быть определены из $\tau_w(\mathbf{t})$ применением дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами по переменной $\mathbf{t}$, определенных в терминах функций Шура, то плюккеровы соотношения для $\mathfrak{P}(w(\mathbf{t}))$ могут быть выражены как бесконечная система билинейных дифференциальных соотношений, которым удовлетворяет $\tau_w(\mathbf{t})$ – соотношений Хироты [15], которые эквивалентны уравнениям потока иерархии КП.

2.3. Разложение в ряд по функциям Шура. Напомним, что если мы рассмотрим параметры потока $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots)$ как степенные суммы в терминах набора $\{x_1, \dots, x_N\}$ из N вспомогательных переменных

$$t_i = \frac{1}{i} \sum_{a=1}^N x_a^i, \quad (2.31)$$

то функция Шура s_λ , являющаяся неприводимым характером тензорного представления $\mathfrak{Sl}(N)$ с типом симметрий, соответствующим разбиению λ , задается формулой Якоби–Труди [18]

$$s_\lambda(\mathbf{t}) = \det(h_{\lambda_i - i + j})|_{1 \leq i, j \leq n} \quad (2.32)$$

для любого $n \geq \ell(\lambda)$, где $\{h_j(\mathbf{t})\}_{j=1, \dots, \infty}$ – полные симметричные функции, определенные формулой для порождающей функции

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} t_i z^i\right) = \sum_{j=0}^{\infty} h_j(\mathbf{t}) z^j. \quad (2.33)$$

Имеем $h_0(\mathbf{t}) = 1$, и по (2.32) понятно, что $h_j(\mathbf{t}) := 0$ для $j < 0$.

Пусть дана функция $f(\mathbf{t})$, допускающая разложение в ряд Тейлора по переменным потока в начале координат $\mathbf{0} := (0, 0, \dots)$,

$$f(\mathbf{t}) = \left(\exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} t_i \frac{\partial}{\partial \tilde{t}_i}\right) f(\tilde{\mathbf{t}}) \right) \Big|_{\tilde{\mathbf{t}}=\mathbf{0}}, \quad (2.34)$$

где $\tilde{\mathbf{t}} = (\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \dots)$. Тогда мы можем использовать функции Шура как базис и представить ряд в виде

$$f(\mathbf{t}) = \sum_{\lambda} f_{\lambda} s_{\lambda}(\mathbf{t}). \quad (2.35)$$

(Это определяет “эквивалентность Бозе–Ферми”, которая ассоциирует элемент $\sum_{\lambda} f_{\lambda} |\lambda\rangle$ фермионного фоковского пространства $\mathcal{F}$ элементу f пространства Бозе–Фока, рассматриваемого как симметричная функция стоящей за ней бесконечной последовательности параметров $\{x_a\}_{a=1, \dots, \infty}$, связанных с помощью (2.31), в индуктивном пределе, с параметрами потока $\mathbf{t}$.) Используя тождество Коши–Литтлвуда [18]

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} i t_i \tilde{t}_i\right) = \sum_{\lambda} s_{\lambda}(\mathbf{t}) s_{\lambda}(\tilde{\mathbf{t}}) \quad (2.36)$$

в виде

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} t_i \frac{\partial}{\partial t_i}\right) = \sum_{\lambda} s_{\lambda}(\mathbf{t}) s_{\lambda}(\partial_{\mathbf{t}}), \quad (2.37)$$

где

$$\partial_{\mathbf{t}} := \left\{ \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t_i} \right\}_{i=1,2,\dots}, \quad (2.38)$$

мы получаем

$$f_{\lambda} = s_{\lambda}(\partial_{\mathbf{t}})(f(\mathbf{t}))|_{\mathbf{t}=\mathbf{0}}. \quad (2.39)$$

Для τ -функции $\tau_w(\mathbf{t})$, коэффициенты этого разложения совпадают с плюккеровыми координатами $\pi_{\lambda}(w)$ исходной точки $w \in \text{Gr}_{\mathcal{H}_+}(\mathcal{H})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2 (М. и Я. Сато [15]). *Разложение по функциям Шура функции $\tau_w(\mathbf{t})$ имеет вид*

$$\tau_w(\mathbf{t}) = \sum_{\lambda} \pi_{\lambda}(w) s_{\lambda}(\mathbf{t}). \quad (2.40)$$

Следовательно, плюккеровы координаты задаются как

$$\pi_{\lambda}(w) = s_{\lambda}(\partial_{\mathbf{t}})(\tau_w(\mathbf{t}))|_{\mathbf{t}=\mathbf{0}}. \quad (2.41)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя формулу (2.33), легко показать, что матричное представление действия (2.25) имеет вид

$$W(\mathbf{t}) = \begin{pmatrix} H_{++}(\mathbf{t}) & H_{+-}(\mathbf{t}) \\ 0 & H_{--}^T(\mathbf{t}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_+ \\ W_- \end{pmatrix}, \quad (2.42)$$

где

$$H_{++}(\mathbf{t}) := \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \ddots & 1 & h_1 & h_2 \\ \dots & 0 & 1 & h_1 \\ \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.43)$$

$$H_{+-}(\mathbf{t}) := \begin{pmatrix} \vdots & & & & \\ h_3 & \vdots & & & \\ h_2 & h_3 & \vdots & & \\ h_1 & h_2 & h_3 & \dots & \end{pmatrix}, \quad H_{--}(\mathbf{t}) := \begin{pmatrix} 1 & h_1 & h_2 & h_3 & \dots \\ 0 & 1 & h_1 & h_2 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & h_1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (2.44)$$

Полагая

$$H(\mathbf{t}) := \begin{pmatrix} H_{++}(\mathbf{t}) & H_{+-}(\mathbf{t}) \end{pmatrix}, \quad (2.45)$$

имеем

$$\tau_w(\mathbf{t}) = \det(H(\mathbf{t})W) = \sum_{\lambda} \det(H_{\lambda}(\mathbf{t})) \det(W_{\lambda}) = \sum_{\lambda} \pi_{\lambda}(H^T(\mathbf{t})) \pi_{\lambda}(w), \quad (2.46)$$

где второе равенство есть тождество Бине–Коши, и

$$\pi_{\lambda}(H(\mathbf{t})) := \det(h_{\lambda_i - i + j}(\mathbf{t}))|_{1 \leq i, j \leq n} = s_{\lambda}(\mathbf{t}) \quad (2.47)$$

согласно (2.32). Мы, таким образом, получаем разложение по функциям Шура (2.40) τ -функции.

На “большой клетке” каждое $\pi_\lambda(w)$ определяется посредством (2.21) как конечный детерминант от аффинных координат $\{A_{ab}\}$ точки w , которые, по (2.22), совпадают с точностью до знака с плюккеровыми координатами разбиения-крюка. Следовательно, нам нужно только применить (2.41), чтобы получить

$$(-1)^b A_{ab} = \pi_{(a|b)}(w) = s_{(a|b)}(\partial_{\mathbf{t}})(\tau_w(\mathbf{t}))|_{\mathbf{t}=\mathbf{0}}. \quad (2.48)$$

Подставляя выражение (2.21) для плюккеровых координат $\pi_{(a_1, \dots, a_r | b_1, \dots, b_r)}$ в (2.40), мы получаем следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 2.2.

$$\frac{\tau_w(\mathbf{t})}{\tau_w(\mathbf{0})} = \sum_{\lambda} (-1)^{\sum_{k=1}^r b_k} \det(A_{a_i b_j})|_{1 \leq i, j \leq r} s_{\lambda}(\mathbf{t}). \quad (2.49)$$

Дальнейшее упрощение может быть получено с использованием следующего тождества, простое доказательство которого следует из изложенных выше определений.

ЛЕММА 2.1. *Справедливо тождество*

$$s_{(a|b)}(\mathbf{t}) = (-1)^b \sum_{j=1}^{b+1} h_{b-j+1}(-\mathbf{t}) h_{a+j}(\mathbf{t}). \quad (2.50)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно формуле Якоби–Труди (2.32),

$$s_{(a|b)}(\mathbf{t}) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{h}^T & h \\ \mathbf{H} & \mathbf{k} \end{pmatrix}, \quad (2.51)$$

где

$$\mathbf{h}^T = (h_{a+1}(\mathbf{t}), h_{a+2}(\mathbf{t}), \dots, h_{a+b}(\mathbf{t})), \quad h := h_{a+b+1}(\mathbf{t}), \quad (2.52)$$

$$\mathbf{k} := \begin{pmatrix} h_b(\mathbf{t}) \\ h_{b-1}(\mathbf{t}) \\ \vdots \\ h_1(\mathbf{t}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} := \begin{pmatrix} 1 & h_1(\mathbf{t}) & h_2(\mathbf{t}) & \cdots & \cdots & h_{b-1}(\mathbf{t}) \\ 0 & 1 & h_1(\mathbf{t}) & h_2(\mathbf{t}) & \cdots & h_{b-2}(\mathbf{t}) \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.53)$$

Из формулы для производящей функции (2.33) следует, что обратная матрица $\mathbf{H}^{-1}$ задана как

$$\mathbf{H}^{-1} := \begin{pmatrix} 1 & h_1(-\mathbf{t}) & h_2(-\mathbf{t}) & \cdots & \cdots & h_{b-1}(-\mathbf{t}) \\ 0 & 1 & h_1(-\mathbf{t}) & h_2(-\mathbf{t}) & \cdots & h_{b-2}(-\mathbf{t}) \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad (2.54)$$

и

$$\sum_{j=-a}^b h_{a+j}(-\mathbf{t}) h_{b-j}(\mathbf{t}) = \delta_{ab}. \quad (2.55)$$

Детерминант матрицы

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0}^T & \mathbf{H}^{-1} \\ 1 & -h^{-1} \mathbf{h}^T \mathbf{H}^{-1} \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

равен $(-1)^b$, а ее произведение на матрицу из (2.51) есть

$$\begin{pmatrix} \mathbf{h}^T & h \\ \mathbf{H} & \mathbf{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0}^T & \mathbf{H}^{-1} \\ 1 & -h^{-1} \mathbf{h}^T \mathbf{H}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{k} & \mathbf{I} - h^{-1} \mathbf{k} \mathbf{h}^T \mathbf{H}^{-1} \end{pmatrix}. \quad (2.57)$$

Поэтому

$$s_{(a|b)}(\mathbf{t}) = (-1)^b h \det(\mathbf{I} - h^{-1} \mathbf{k} \mathbf{h}^T \mathbf{H}^{-1}) = (-1)^b (h - \mathbf{H}^{-1} \mathbf{k} \mathbf{h}^T). \quad (2.58)$$

Но из (2.54) и (2.55) следует, что

$$\mathbf{H}^{-1} \mathbf{k} = - \begin{pmatrix} h_b(-\mathbf{t}) \\ h_{b-1}(-\mathbf{t}) \\ \vdots \\ h_1(-\mathbf{t}) \end{pmatrix}, \quad (2.59)$$

откуда, ввиду определения (2.52) для h , следует (2.50), что и требовалось доказать.

Подстановка равенства (2.50) в (2.48), таким образом, дает следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 2.3.

$$A_{ab} = - \sum_{j=0}^b h_{a+j-1}(-\partial_{\mathbf{t}}) h_{b-j}(\partial_{\mathbf{t}}) (\tau_w(\mathbf{t})) \big|_{\mathbf{t}=\mathbf{0}}. \quad (2.60)$$

Соотношения (2.21), (2.41), (2.48), определяющие плюккеровы координаты элемента $w \in \text{Gr}_{\mathcal{H}_+}(\mathcal{H})$ на “большой клетке”, эквивалентны результату, что формальная функция Бейкера–Ахиезера [13], [14], [17], определенная формулой Сато [15]

$$\psi_w(z, \mathbf{t}) = \exp \left(\sum_{i=1}^{\infty} t_i z^i \right) \frac{\tau_w(\mathbf{t} - [z^{-1}])}{\tau_w(\mathbf{t})}, \quad (2.61)$$

где

$$[z^{-1}] := \left(\frac{1}{z}, \frac{1}{2z^2}, \frac{1}{3z^3}, \dots \right), \quad (2.62)$$

принимает значения в $w \in \text{Gr}_{\mathcal{H}_+}(\mathcal{H})$ для всех значений $\mathbf{t}$.

Следуя Сато, мы можем также ввести дуальную функцию Бейкера:

$$\Psi_w^*(z, \mathbf{t}) = - \frac{\tau_w(\mathbf{t} + [z^{-1}])}{\tau(\mathbf{t})} \exp \left\{ - \sum_{i=1}^{\infty} t_i z^i \right\}. \quad (2.63)$$

Тогда, как показано в [13]–[15], уравнения иерархии КП могут все быть выражены в виде билинейных уравнений Хироты на τ -функцию.

ТЕОРЕМА 2.1 (билинейное соотношение Хироты [13]–[15]).

$$\operatorname{Res}_{z=0} \Psi_z^*(z, \mathbf{t}) \Psi_z^*(z, \tilde{\mathbf{t}}) \equiv 0, \quad (2.64)$$

где $\operatorname{Res}_{z=0}$ обозначает коэффициент при z^{-1} в формальном разложении Лорана в $z = 0$, и соотношение удовлетворяется тождественно на бесконечном наборе переменных потока КП $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots)$, $\tilde{\mathbf{t}} = (\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \dots)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Ввиду (2.63), соотношение (2.64) записывается эквивалентным образом как

$$\operatorname{Res}_{z=0} \exp \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} t_i z^i \right\} \exp \left\{ - \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{t}_i z^i \right\} \tau(\mathbf{t} - [z^{-1}]) \tau(\tilde{\mathbf{t}} + [z^{-1}]) \equiv 0 \quad (2.65)$$

тождественно по $\mathbf{t}$ и $\tilde{\mathbf{t}}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. В [13]–[15] показано также, что (2.61) есть просто выражение от бесконечного набора плюккерových соотношений, которым удовлетворяют коэффициенты $\pi_\lambda(w)$, возникающие в разложении по функциям Шура (2.40).

3. Алгебраические кривые

3.1. Функция Бейкера–Ахиезера и τ -функция для алгебраических кривых. Особенно важный класс τ -функций состоит из функций, ассоциированных с алгебраическими кривыми [12], [11], [16]. Для их определения необходимы следующие данные: алгебраическая кривая X рода g , положительный неспециальный дивизор степени g

$$\mathcal{D} := \sum_{i=1}^g p_i, \quad p_i \in X, \quad (3.1)$$

(или, что эквивалентно, положительное линейное расслоение $\mathcal{L} \rightarrow X$ степени g в общем положении, удовлетворяющее подходящим общим условиям стабильности), точка “на бесконечности” $p_\infty \in X$ и локальный параметр $\xi = 1/z$, определенный на диске

$$D_\infty := \{p(\zeta), |\zeta| \leq 1, p(0) = p_\infty\} \quad (3.2)$$

с центром в p_∞ . Точки p_i предполагаются лежащими в дополнении $D_0 := X - D_\infty$. Отождествляя S^1 с ∂D_∞ , получаем, что ассоциированный элемент $w := w(X, \mathcal{D}, p_\infty, \zeta) \in \operatorname{Gr}_{\mathcal{H}_+}(\mathcal{H})$ есть замыкание пространства функций $f \in L^2(S^1)$, допускающих мероморфное продолжение на $\overline{D}_0$ с дивизором полюсов, подчиненным $\mathcal{D}$.

Для реализации построения мы используем каноническую θ -функцию от g переменных, $g \geq 1$:

$$\theta(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^g} \exp\{\imath \pi \mathbf{m}^T \mathbf{T} \mathbf{m} + 2\imath \pi \mathbf{m}^T \mathbf{z}\}, \quad \mathbf{z} \in \mathbb{C}^g, \quad (3.3)$$

где $\mathbf{T}$ есть комплексная симметричная $(g \times g)$ -матрица с положительно определенной мнимой частью. Пространство таких матриц (верхняя полуплоскость Зигеля) будет обозначаться $\mathcal{S}^g$. θ -функция голоморфна на $\mathbb{C}^g \times \mathcal{S}^g$ и удовлетворяет

$$\theta(\mathbf{z} + \mathbf{n}) = \theta(\mathbf{z}), \quad \theta(\mathbf{z} + \mathbf{T}\mathbf{n}) = \exp\{-i\pi(\mathbf{n}^T \mathbf{T} \mathbf{n} + 2\mathbf{z}^T \mathbf{n})\} \theta(\mathbf{z}). \quad (3.4)$$

В рассмотренном случае θ -функций, ассоциированных с алгебраической кривой, имеем

$$\mathbf{T} := \mathfrak{A}^{-1} \mathfrak{B}, \quad (3.5)$$

где $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ – матрицы периодов базиса голоморфных дифференциалов.

В [11], [12], [16] показано, что соответствующая функция Бейкера–Ахиезера может быть выбрана как ограничение на ∂D_+ мероморфной функции на $X - p_\infty$ с дивизором полюсов $\mathcal{D}$, имеющей существенную особенность в p_∞ , вида

$$\psi_w(p(\zeta), \mathbf{t}) \sim \exp\left\{\sum_{i=1}^{\infty} t_i z^i\right\} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right)\right). \quad (3.6)$$

Из теоремы Римана–Роха следует, что такие функции образуют только одномерное пространство. Они могут быть выражены, с точностью до нормировки, зависящей от $\mathbf{t}$, как

$$\tilde{\psi}_w(p, \mathbf{t}) = \exp\left\{\int_{p_0}^p \Omega(\mathbf{t})\right\} \frac{\theta(\mathcal{A}(p) - \mathcal{A}(\mathcal{D}) + \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{U}_i t_i - \mathbf{K})}{\theta(\mathcal{A}(p) - \mathcal{A}(\mathcal{D}) - \mathbf{K})}, \quad (3.7)$$

где риманова матрица периодов $\mathbf{T}$ θ -функции определяется относительно полигонизации, полученной разрезанием вдоль канонического базиса гомологий $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_g; \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_g)$ с матрицей пересечений

$$\mathbf{a}_i \circ \mathbf{a}_j = \mathbf{b}_i \circ \mathbf{b}_j = 0, \quad \mathbf{a}_i \circ \mathbf{b}_j = \delta_{ij}, \quad (3.8)$$

p_0 есть произвольно выбранная базисная точка,

$$\mathcal{A} : \mathcal{S}^g(X) \rightarrow \mathbb{C}^g,$$

$$\mathcal{A} : \sum_{j=1}^g p_j \mapsto \sum_{j=1}^g \int_{p_0}^{p_j} \omega, \quad \omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_g \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

есть отображение Абеля с i -й компонентой

$$\mathcal{A}_i := \sum_{j=1}^g \int_{p_0}^{p_j} \omega_i, \quad i = 1, \dots, g, \quad (3.10)$$

где $(\omega_1, \dots, \omega_g)$ есть канонически нормированный базис пространства $H^0(K)$ голоморфных абелевых дифференциалов

$$\oint_{\mathbf{a}_i} \omega_j = \delta_{ij}, \quad \oint_{\mathbf{b}_i} \omega_j = T_{ij}, \quad (3.11)$$

и $\mathbf{K} \in \mathbb{C}^g$ – риманова константа, выбранная таким образом, что $\theta(\mathcal{A}(p) - \mathcal{A}(\mathcal{D}) - \mathbf{K})$ обращается в нуль в g точках $p = p_i$ дивизора $\mathcal{D}$.

Определим линейное семейство абелевых дифференциалов второго рода

$$\Omega(\mathbf{t}) = \sum_{j=1}^{\infty} \Omega_j t_j, \quad (3.12)$$

где Ω_i есть единственный нормированный абелев дифференциал второго рода с дивизором полюсов степени $j+1$ в p_{∞} , имеющий локальный вид

$$\Omega_j \sim d(z^j) + (\text{голоморфный}) \quad (3.13)$$

вблизи p_{∞} , с нулевыми $\mathbf{a}$ -циклами:

$$\oint_{\mathbf{a}_i} \Omega_j = 0, \quad i = 1, \dots, g. \quad (3.14)$$

Тогда $2\pi i \mathbf{U}_j \in \mathbb{C}^g$ определяется как его вектор $\mathbf{b}$ -циклов с компонентами

$$\oint_{\mathbf{b}_k} \Omega_j =: 2\pi i (\mathbf{U}_j)_k, \quad k = 1, \dots, g. \quad (3.15)$$

Для сравнения с формальной функцией Бейкера $\psi_a(z, \mathbf{t})$, возникающей в формуле Сато (2.61), нужно интерпретировать функцию $p = p(z)$ внутри проколотого диска $D_{\infty} - p_{\infty}$ и на его границе и нормировать $\tilde{\psi}(p, \mathbf{t})$ в формуле (3.7) таким образом, чтобы получить правильное локальное разложение (3.6) вблизи $\xi = 0$:

$$\psi_w(p(\xi), \mathbf{t}) = \frac{\tilde{\psi}_w(p(\xi), \mathbf{t})}{a_0(\mathbf{t})}, \quad (3.16)$$

где

$$\tilde{\psi}_w(p(\xi), \mathbf{t}) \sim \exp \left\{ \int_{p_0}^{p(\xi)} \Omega(\mathbf{t}) \right\} (a_0(\mathbf{t}) + a_1(\mathbf{t})\xi + \dots). \quad (3.17)$$

Так как $\int_{p_0}^p \Omega_i$ имеет локально разложение

$$\int_{p_0}^p \Omega_i = \xi^{-i} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} Q_{ij} \xi^j + q_j, \quad (3.18)$$

где

$$Q_{ij} = Q_{ji}, \quad 1 \leq i, j \leq \infty, \quad (3.19)$$

и $\mathcal{A}(p(z))$ имеет разложение (см. [12], [35])

$$\mathcal{A}(p(z)) = \mathcal{A}(p_{\infty}) - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \mathbf{U}_j z^{-j}, \quad (3.20)$$

то получаем формулу

$$\begin{aligned} \psi_w(p(z), \mathbf{t}) = \exp \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} t_i \left(z^i + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} Q_{ji} z^{-j} \right) \right\} \\ \times \frac{\theta(\mathbf{e} + \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{U}_i (t_i - z^{-i}/i)) \theta(\mathbf{e})}{\theta(\mathbf{e} - \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{U}_i z^{-i}/i) \theta(\mathbf{e} + \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{U}_i t_i)} \end{aligned} \quad (3.21)$$

вблизи $z = \infty$, где

$$\mathbf{e} := \mathcal{A}(p_\infty) - \mathcal{A}(\mathcal{D}) - \mathbf{K}. \quad (3.22)$$

(Заметим, что из предположений, сделанных при выводе формулы (3.7), следует, что $\mathbf{e}$ не лежит в θ -дивизоре; $\theta(\mathbf{e}) \neq 0$.) Заметим, что отношение θ -функциональных множителей в (3.21),

$$\frac{\theta(\mathbf{e})}{\theta(\mathbf{e} + \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{U}_i t_i)},$$

не зависит от z , и, следовательно, пространство, порожденное значениями $\psi_w(p(z), \mathbf{t})$, совпадает с порожденным значениями

$$\check{\psi}_w(p(z), \mathbf{t}) := \exp \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} t_i \left(z^i + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} Q_{ji} z^{-j} \right) \right\} \frac{\theta(\mathbf{e} + \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{U}_i (t_i - z^{-i}/i))}{\theta(\mathbf{e} - \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{U}_i z^{-i}/i)}. \quad (3.23)$$

Мы можем разложить оставшееся отношение θ -функциональных выражений в степенные ряды по z^{-1} :

$$\begin{aligned} & \theta \left(\mathbf{e} + \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{U}_i \left(t_i - \frac{1}{i} z^{-i} \right) \right) \exp \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} -\frac{1}{i z^i} \frac{\partial}{\partial t_i} \right\} \left(\theta \left(\mathbf{e} + \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{U}_i t_i \right) \right) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} z^{-j} h_j(-\nabla_{\mathbf{U}}) \theta \left(\mathbf{e} + \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{U}_i t_i \right) \end{aligned} \quad (3.24)$$

и

$$\theta \left(\mathbf{e} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \mathbf{U}_i z^{-i} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} z^{-j} h_j(-\nabla_{\mathbf{U}}) \theta(\mathbf{e}), \quad (3.25)$$

где

$$\nabla_{\mathbf{U}} := \left(\nabla_{\mathbf{U}_1}, \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{U}_2}, \frac{1}{3} \nabla_{\mathbf{U}_3}, \dots \right) \quad (3.26)$$

и $\nabla_{\mathbf{U}_i}$ есть производная по направлению в $\mathbb{C}^g$ вдоль $\mathbf{U}_i$.

Теперь определим базис $\{w_0, w_1, \dots\}$ для w формулами

$$w_0(z) := \check{\psi}(z, \mathbf{t})|_{\mathbf{t}=\mathbf{0}} = 1, \quad w_j(z) := \frac{\partial \check{\psi}(z, \mathbf{t})}{\partial t_j} \Big|_{\mathbf{t}=\mathbf{0}}, \quad j \geq 1. \quad (3.27)$$

Тогда

$$w_j(z) = z^j + P_{0j} + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{i} Q_{ij} + P_{ij} \right) z^{-i}, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (3.28)$$

где

$$\sum_{i=0}^{\infty} P_{ij} z^{-i} := \frac{\sum_{i=0}^{\infty} M_{ij} z^{-i}}{\sum_{i=0}^{\infty} N_i z^{-i}} \quad (3.29)$$

и

$$M_{ij} := \nabla_{\mathbf{U}_j} h_i(-\nabla_{\mathbf{U}}) \theta(\mathbf{e}), \quad N_i := h_i(-\nabla_{\mathbf{U}}) \theta(\mathbf{e}). \quad (3.30)$$

Следовательно, аффинные координаты A_{ij} элемента w есть

$$\begin{aligned} A_{ij} &:= \frac{1}{i+1} Q_{i+1,j} + P_{i+1,j}, & i = 0, 1, 2, \dots, \quad j = 1, 2, \dots, \\ A_{i0} &= 0, & i = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.31)$$

По следствию 2.1, это определяет плюккеровы координаты для всех разбиений-крюков и, значит, согласно (2.23), для всех разбиений.

Сравнивая формулу (3.21) для функции Бейкера с формулой Сато (2.61), мы видим что τ -функция для $w = w(X, \mathcal{D}, p_\infty, \zeta)$ задается формулой (ср. [35])

$$\tau_w(\mathbf{t}) = \exp \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i t_i \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{\infty} Q_{ij} t_i t_j \right\} \theta \left(\mathbf{e} + \sum_{i=1}^{\infty} t_i \mathbf{U}_i \right), \quad (3.32)$$

где

$$\lambda_i := \mu_i + i \sum_{k=0}^{i-1} \frac{Q_{k,i-k}}{2k(i-k)} \quad (3.33)$$

с μ_i , определенными по формуле

$$\theta(\mathbf{e}) \exp \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_i}{i z^i} \right\} := \theta \left(\mathbf{e} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathbf{U}_i}{i z^i} \right) = \sum_{i=0}^{\infty} N_i z^{-i}. \quad (3.34)$$

С точки зрения иерархии КП, тем не менее, линейный экспоненциальный множитель $\exp \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i t_i \right\}$ в (3.32) может быть опущен, поскольку это в точности соответствует калибровочному преобразованию функции Бейкера–Ахизера, которое постоянно по переменным $\mathbf{t}$:

$$\psi_w(z, \mathbf{t}) \rightarrow k(z) \psi_w(z, \mathbf{t}), \quad k(z) := \exp \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i}{i z^i} \right\}, \quad (3.35)$$

и оставляет решения уравнений потока КП инвариантными. Это равносильно замене $w \in \text{Gr}_{\mathcal{H}_+}(\mathcal{H})$ на

$$w_k := \text{span}\{kv, v \in w\}. \quad (3.36)$$

Поэтому τ -функция может быть задана в более простом калибровочно эквивалентном виде (ср. [16], [29], [35])

$$\tau_w(\mathbf{t}) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{\infty} Q_{ij} t_i t_j \right\} \theta \left(\mathbf{e} + \sum_{i=1}^{\infty} t_i \mathbf{U}_i \right). \quad (3.37)$$

Впредь мы используем для этой τ -функции обозначение $\tau(\mathbf{e}, \mathbf{t}) = \tau_w(\mathbf{t})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Несмотря на то что этот калибровочный множитель не воздействует на решения иерархии КП, он играет важную роль в более общей постановке неизоспектральных деформаций. Он связан с тензорным весом τ -функции, рассмотренным как сечение линейного расслоения на пространстве модулей. (См. [36]–[38].)

Применение формулы (2.60) напрямую к $\tau_w(\mathbf{t})$, определенной в (3.37), дает альтернативный способ вычисления аффинных координат A_{ab} , который эквивалентен (3.31) с точностью до калибровочного преобразования.

Билинейные соотношения Хироты (2.65), определяющие иерархию КП, могут быть в этом случае эквивалентным образом записаны как

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{\xi=0} \frac{1}{\xi^2} \left[\exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n \xi^{-n} \right\} \exp \left\{ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n} \frac{\partial}{\partial t_n} \right\} \tau(\mathbf{e}; \mathbf{t}) \right. \\ \left. \times \exp \left\{ - \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{t}_n \xi^{-n} \right\} \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}_n} \right\} \tau(\mathbf{e}; \tilde{\mathbf{t}}) \right] = 0, \end{aligned} \quad (3.38)$$

где $\xi = \xi(q)$ – локальные координаты точки q около p , $\xi(p) = 0$.

3.2. Последовательности пробелов Вейерштрасса, базисы и фундаментальный бидифференциал. Теорема Вейерштрасса о пробелах гласит (см. [39]):

ТЕОРЕМА 3.1 (Lückensatz). *Для любой точки $p \in X$ на несингулярной алгебраической кривой X рода g существует в точности g различных неотрицательных целых чисел $n_1, \dots, n_g$, удовлетворяющих неравенствам*

$$n_1 = 1 < n_2 < \dots < n_g < 2g, \quad (3.39)$$

таких, что никакая мероморфная функция на X не может иметь дивизора полюсов исключительно в p степеней $(n_1, \dots, n_g)$.

Набор целых чисел $(n_1, \dots, n_g)$ называется последовательностью пробелов Вейерштрасса и будет обозначаться $\mathfrak{W}(p)$. Для точки в “общем положении” пробелы есть $1, \dots, g$. Точка $p \in X$, для которой существует мероморфная функция, имеющая в этой точке полюс порядка меньше $g + 1$, называется точкой Вейерштрасса.

Для заданной точки p_∞ и локального параметра $\xi(p)$ $2g$ -мерное пространство $H_1^*(X, \mathbb{Z})$, двойственное к группе гомологий $H_1(X, \mathbb{Z})$, может быть отождествлено с пространством мероморфных дифференциалов с полюсами только в p_∞ с нулевыми вычетами, а отождествление задается интегрированием по циклам. Базис $\{u_1, \dots, u_g, \Omega_{n_1}, \dots, \Omega_{n_g}\}$ этого пространства состоит из g элементов $\{u_1, \dots, u_g\}$, задающих базис подпространства $H^0(X, K)$ голоморфных дифференциалов, определенных так, что u_j равен нулю с точностью до $(n_j - 1)$ -го порядка в точке p_∞ :

$$u_k = -(\xi(p)^{n_k-1} + (\text{члены высшего порядка})) d\xi(p), \quad k = 1, \dots, g, \quad n_k \in \mathfrak{W}(p), \quad (3.40)$$

где члены высшего порядка $\xi(p)^k$ состоят только из степеней k , для которых $k + 1 \notin \mathfrak{W}(p)$.

Остальные базисные элементы $\{\Omega_{n_1}, \dots, \Omega_{n_g}\}$ являются нормированными дифференциалами второго рода, где Ω_k совпадают с определенными в (3.13), (3.14). Они взаимно дуальны при спаривании:

$$\frac{1}{2\pi i} \iint_X u_j \wedge \Omega_{n_k} = \operatorname{Res}_{p=p_\infty} \left(\left(\int_{p_0}^p u_j \right) \Omega_{n_k}(p) \right) = \delta_{jk}. \quad (3.41)$$

Ненулевые матрицы периодов по $\mathfrak{a}$ - и $\mathfrak{b}$ -циклам обозначим

$$\oint_{\mathfrak{a}_j} u_i =: \mathfrak{A}_{ij}, \quad \oint_{\mathfrak{b}_j} u_i =: \mathfrak{B}_{ij}, \quad (3.42)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathfrak{b}_j} \Omega_{n_i} =: C_{ij} = (\mathbf{U}_{n_i})_j, \quad i, j = 1, \dots, g. \quad (3.43)$$

Столбцы $(g \times g)$ -матрицы $\mathbb{C}$ заданы векторами $\mathbf{U}_{n_i}$, соответствующими пробелам Вейерштрасса:

$$\mathbb{C} = (\mathbf{U}_{n_1}, \dots, \mathbf{U}_{n_g}), \quad n_j \in \mathfrak{W}(p_\infty). \quad (3.44)$$

Билинейные соотношения Римана, полученные применением теоремы Стокса к 2-формам $u_j \wedge u_k$ и $u_j \wedge \Omega_k$ на канонической полигонизации кривой, влекут за собой равенства

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}^T = \mathfrak{B}\mathfrak{A}^T, \quad \mathfrak{A}\mathbb{C}^T = \mathbf{1}_g. \quad (3.45)$$

Связь с базисом $\{\omega_1, \dots, \omega_1, \Omega_{n_1}, \dots, \Omega_{n_g}\}$ нормированных дифференциалов, таким образом, описывается формулами

$$\omega_i = \sum_{j=1}^g \mathfrak{A}_{ij}^{-1} u_j = \sum_{j=1}^g C_{ji} u_j, \quad (3.46)$$

а нормированная матрица римановых периодов $\mathbf{T}$ есть

$$\mathbf{T} := \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{B} = \mathbb{C}^T\mathfrak{B}. \quad (3.47)$$

Определим векторы

$$\mathbf{R}_j = \mathfrak{A}\mathbf{U}_j, \quad j = 1, 2, \dots. \quad (3.48)$$

Из (3.20) следует, что дифференциалы u_i допускают локальное разложение

$$u_i(p(\xi)) = - \sum_{j=n_i}^{\infty} (\mathbf{R}_j)_i \xi(p)^{j-1} d\xi(p). \quad (3.49)$$

Удобно также ввести нормированный симметричный бидифференциал $\Omega(p, q)$ на $X \times X$ (см. [40], [41], [21]), определенный следующими условиями:

– $\Omega(p, q)$ имеет полюс второго порядка на диагонали $p = q$, где его локальная форма, выраженная в терминах параметров $\xi(p)$, $\xi(q)$, есть

$$\Omega(p, q) = \left(\frac{1}{(\xi(q) - \xi(p))^2} + \sum_{i,j=0}^{\infty} \mu_{ij} \xi(p)^i \xi(q)^j \right) d\xi(p) d\xi(q), \quad (3.50)$$

где

$$\mu_{ij} = \mu_{ji}; \quad (3.51)$$

– $\Omega(p, q)$ голоморфен вне диагонали по p и по q ;

– все $\mathfrak{a}$ -циклы обнуляются:

$$\oint_{p \in \mathfrak{a}_j} \Omega(p, q) = \oint_{q \in \mathfrak{a}_j} \Omega(p, q) = 0. \quad (3.52)$$

Эти условия однозначно определяют бидифференциал $\Omega(q, p)$, явное представление которого есть

$$\Omega(p, q) = d_p d_q \ln \theta(\mathcal{A}(p) - \mathcal{A}(q) + \delta), \quad (3.53)$$

где δ – несингулярный нечетный полупериод.

Из определений вытекают также следующие свойства:

– $\mathfrak{b}$ -циклы заданы нормированными голоморфными дифференциалами ω_j , $j = 1, \dots, g$:

$$\oint_{p \in \mathfrak{b}_j} \Omega(p, q) = 2\pi i \omega_j(q), \quad \oint_{q \in \mathfrak{b}_j} \Omega(p, q) = 2\pi i \omega_j(p); \quad (3.54)$$

– вычеты в p_∞ локально определенных бидифференциалов $\xi(p)^{-j} \Omega(p, q)$ и $\xi(q)^{-j} \Omega(p, q)$ заданы нормированным дифференциалом второго рода Ω_j :

$$\operatorname{Res}_{p=p_\infty} \xi(p)^{-j} \Omega(p, q) = -\Omega_j(q), \quad \operatorname{Res}_{q=p_\infty} \xi(q)^{-j} \Omega(p, q) = -\Omega_j(p); \quad (3.55)$$

– коэффициенты μ_{ij} в разложении (3.50) связаны с коэффициентами в разложении (3.18) следующим образом:

$$\mu_{ij} = -Q_{i+1, j+1}. \quad (3.56)$$

3.3. Модель плоской кривой. Рассмотрим алгебраическую кривую X геометрического рода $g \geq 1$, заданную уравнением

$$X: \quad P(x, y) = 0, \quad x, y \in \mathbb{C}, \quad (3.57)$$

где P – полиномом от x и y ,

$$P(x, y) = y^n + a_1(x)y^{n-1} + \dots + a_n(x), \quad (3.58)$$

$a_k(x)$, $k = 0, \dots, n$, – полиномы от x и $n > 1$. Предположим, что кривая X имеет точку Вейерштрасса в бесконечности p_∞ , где координаты x, y локально выражаются как

$$x = \frac{1}{\xi^n} + \dots, \quad y = \frac{1}{\xi^s} + \dots, \quad (3.59)$$

а порядок каждого мономиального члена полинома $P(x, y)$ есть порядок его полюса в p_∞ . Предположим также, что кривая X может быть представлена в виде

$$y^n - x^s + (\text{члены низшего порядка}) = 0, \quad (3.60)$$

где $n, s > 2$ – положительные целые числа.

Далее плоские координаты точки p обозначаются $(x(p), y(p))$. При рассмотрении локального разложения вблизи базисной точки p_∞ с локальным параметром $\xi(p)$ мы также используем $p(\xi)$ для обозначения точки, и $p(0) = p_\infty$. Тогда становится возможным включить главную часть Ω в явное алгебраическое выражение в терминах коэффициентов кривой X .

ТЕОРЕМА 3.2 [23]. Фундаментальный бидифференциал может быть выражен в виде

$$\Omega(p, q) = \frac{\mathcal{F}(p, q)}{(x(p) - x(q))^2} \frac{dx(p) dx(q)}{P_y(x(p), y(p)) P_y(x(q), y(q))} + \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^g \omega_i(p) \gamma_{ij} \omega_j(q) \quad (3.61)$$

$$= \frac{\mathcal{F}(p, q)}{(x(p) - x(q))^2} \frac{dx(p) dx(q)}{P_y(x(p), y(p)) P_y(x(q), y(q))} + \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^g u_i(p) \varkappa_{ij} u_j(q), \quad (3.62)$$

где $\mathcal{F}(p, q)$ – полиномиальная функция координат $(x(p), y(p), x(q), y(q))$, являющаяся линейной формой по коэффициентам полиномов $\{a_0(x), \dots, a_n(x)\}$, определяющих модель плоской кривой (3.58), а симметричные $(g \times g)$ -матрицы $\varkappa, \gamma$ состоят из элементов $\varkappa_{ij}, \gamma_{ij}$, заданных как

$$\gamma_{ij} = (\mathfrak{A}^T \varkappa \mathfrak{A})_{ij} = - \oint_{p \in \mathfrak{a}_i} \oint_{q \in \mathfrak{a}_j} \frac{\mathcal{F}(p, q)}{(x(p) - x(q))^2} \frac{dx(p) dx(q)}{P_y(x(p), y(p)) P_y(x(q), y(q))}. \quad (3.63)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Представление (3.62) фундаментального бидифференциала $\Omega(p, q)$ в гиперэллиптическом случае является классическим и может быть найдено в книгах [23] и [20]. Оно подытожено в [24] и распространено на негиперэллиптические кривые в [42], [43].

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Как уже упоминалось в замечании 1.1, матрица $\varkappa$, возникающая в определении многомерной σ -функции, определена с точностью до прибавления произвольной симметричной матрицы, скажем, χ . Замена $\varkappa \rightarrow \varkappa + \chi$, тем не менее, не изменяет ни высшую формулу Клейна, ни следующие из этой формулы алгебраические и дифференциальные соотношения между $\wp$ -функциями. В последующих примерах будут даны явные выражения для полинома $\mathcal{F}(p, q)$, определяющего фундаментальный бидифференциал $\Omega(p, q)$.

Из (3.62) вытекает следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Коэффициенты μ_{ij} в разложении в ряд (3.50) могут быть представлены в виде суммы

$$\mu_{ij} = -Q_{i+1, j+1} = \mu_{ij}^{\text{alg}} + \mu_{ij}^{\text{trans}}, \quad (3.64)$$

где μ_{ij}^{alg} определяется разложением

$$\begin{aligned} \Omega^{\text{alg}}(p, q) &= \frac{\mathcal{F}(p, q)}{(x(p) - x(q))^2} \frac{dx(p) dx(q)}{P_y(x(p), y(p)) P_y(x(q), y(q))} \\ &= \left(\frac{1}{(\xi(q) - \xi(p))^2} + \sum_{i, j=0}^{\infty} \mu_{ij}^{\text{alg}} \xi(p)^i \xi(q)^j \right) d\xi(q) d\xi(p), \end{aligned} \quad (3.65)$$

$\xi(p)$ и $\xi(q)$ суть локальные координаты точек p и q , а μ_{ij}^{trans} задается формулой

$$\mu_{ij}^{\text{trans}} = \mathbf{R}_{i+1}^T \varkappa \mathbf{R}_{j+1}. \quad (3.66)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Коэффициенты μ_{ij} в разложении (3.50) нормированного симметричного бидифференциала $\Omega(p, q)$ (проективная связность) около диагонали $p = q$ могут быть выражены как суммы $\mu_{ij} = \mu_{ij}^{\text{alg}} + \mu_{ij}^{\text{trans}}$. Первый член получен разложением первого из равенств (3.65) как рациональной 2-формы на $X \times X$. Второй член следует из локального разложения по степеням ξ голоморфных дифференциалов u_i во втором члене правой части (3.62). Он трансцендентен и задан равенством (3.66). Член μ_{ij}^{alg} определяет голоморфную часть разложения рациональной 2-формы, возникающей в первом члене в (3.61), (3.62).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Отметим, что двойной интеграл в (3.63) может быть разложен по периодам базисных голоморфных и мероморфных дифференциалов второго рода. Следуя построению Бейкера [23], [44], мы представляем подынтегральное выражение $\Omega^{\text{alg}}(p, q)$ в виде

$$\begin{aligned}\Omega^{\text{alg}}(p, q) &= \frac{\mathcal{F}((x, y); (z, w))}{(x - z)^2} \frac{dx dz}{P_y(x, y)P_z(z, w)} \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \Pi_{(z, w)}^{(z', w')}(x, y) dz + \mathbf{u}^T(x, y)\mathbf{r}(z, w).\end{aligned}\quad (3.67)$$

Здесь $\Pi_{(z, w)}^{(z', w')}(x, y)$ – дифференциал третьего рода с полюсами первого порядка в точках (z, w) и (z', w') и соответствующими вычетами ± 1 , $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_g)^T$ – вектор голоморфных дифференциалов, нормированных как в (3.40), $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_g)^T$ – вектор мероморфных дифференциалов с полюсами порядков $n_1 + 1, \dots, n_g + 1$ в p_∞ . (Положение полюса (z', w') может быть выбрано произвольно и не влияет на построение.) Дифференциалы $\mathbf{r}$ выбраны таким образом, чтобы они удовлетворяли условию симметрии

$$\Omega^{\text{alg}}(p, q) = \Omega^{\text{alg}}(q, p). \quad (3.68)$$

Явное алгебраическое построение дифференциалов $\mathbf{r}$ описано в [23] и развито далее в [24]. В частности, в случае гиперэллиптической кривой

$$P(x, y) = y^2 - \mathcal{P}_{2g+1}(x), \quad (3.69)$$

где $\mathcal{P}_{2g+1}(x)$ – полином от x степени $2g + 1$, и

$$\Pi_{(z, w)}^{(z', w')}(x, y) = \frac{1}{2y} \left\{ \frac{y + w}{x - z} - \frac{y + w'}{x - z'} \right\} dx. \quad (3.70)$$

Второй член в (3.70) может быть выбран как произвольная конечная точка кривой.

Матрицы $\mathbf{a}$ - и $\mathbf{b}$ -периодов дифференциалов $\mathbf{r}$, заданные во введении уравнениями (1.21) и (1.20), входят в определение многомерной σ -функции (3.72) ниже.

3.4. σ -функции и алгебро-геометрические формулы для $\pi_\lambda(w)$. Допустим, что $\mathcal{D} = p_1 + \dots + p_g$ – положительный неспециальный дивизор степени g и

$$\mathbf{v} := \sum_{i=1}^g \int_{p_\infty}^{q_i} \mathbf{u} + \mathfrak{A}\mathbf{K} = -\mathfrak{A}\mathbf{e}, \quad (3.71)$$

где $\mathfrak{A}$ определено в (3.42), $\mathbf{K}$ – вектор римановых констант с базисной точкой в p_∞ и $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_g)^T$.

Многомерная σ -функция $\sigma(\mathbf{v})$ определяется формулой

$$\sigma(\mathbf{v}) = C\theta(\mathbf{e}) \exp\left\{\frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathcal{K} \mathbf{v}\right\}, \quad \mathbf{e} = -\mathfrak{A}^{-1} \mathbf{v}, \quad (3.72)$$

где C – константа (зависящая от модулей кривой), явный вид которой нам не потребуется. Это определение естественным образом обобщает на высшие рода σ -функцию Вейерштрасса из теории эллиптических функций.

Многомерные ζ -функции $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_g)$ определяются как

$$\zeta_k(\mathbf{v}) = \frac{\partial}{\partial v_k} \ln \sigma(\mathbf{v}), \quad k = 1, \dots, g. \quad (3.73)$$

Многомерные $\wp$ -функции Клейна определяются как вторые логарифмические производные от σ -функции:

$$\wp_{ik}(\mathbf{v}) = -\frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_k} \ln \sigma(\mathbf{v}), \quad i, k = 1, \dots, g. \quad (3.74)$$

Более общим образом, для логарифмических производных высшего порядка мы используем обозначение

$$\wp_{\underbrace{i_1, \dots, i_1}_{m_1}, \dots, \underbrace{i_k, \dots, i_k}_{m_k}}(\mathbf{v}) = -\frac{\partial^{m_1 i_1 + \dots + m_k i_k}}{\partial v_{i_1}^{m_1} \dots \partial v_{i_k}^{m_k}} \ln \sigma(\mathbf{v}), \quad i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, g\}.$$

В классической теории следующая теорема дает базовый метод вывода алгебраических и дифференциальных соотношений между многомерными $\wp$ -функциями. (См., например, [23] и более современное изложение [24].)

ТЕОРЕМА 3.3 (формула Клейна). Пусть плоская кривая X рода g определена полиномиальным уравнением $P(x, y) = 0$. Выберем независимые голоморфные дифференциалы в виде

$$u_k = \frac{\phi_k(x, y)}{f_y(x, y)} dx, \quad k = 1, \dots, g, \quad (3.75)$$

где $\phi_k(x, y)$ – полиномы по x и y . Пусть $p = (x, y)$ – произвольная точка на X и $\mathcal{D} = p_1 + p_2 + \dots + p_g$ – положительный неспециальный дивизор на X , $p_k = (x_k, y_k)$. Пусть $\mathbf{v}$ – образ $\mathcal{D}$ при отображении Абеля, сдвинутый как в (3.71). Тогда

$$\sum_{j,k=1}^g \wp_{jk} \left(\int_{p_0}^p \mathbf{u} - \mathbf{v} \right) \phi_k(x, y) \phi_j(x_r, y_r) = \frac{\mathcal{F}(p, p_r)}{(x - x_r)^2}, \quad r = 1, \dots, g, \quad (3.76)$$

где полином $\mathcal{F}(p, p_r) = \mathcal{F}((x, y); (x_r, y_r))$ определяет фундаментальный би-дифференциал $\Omega(p, p_r)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.5. Эта формула была впервые получена для гиперэллиптических кривых в [40], [41]. Но доказательство, основанное на теореме Римана об обращении в нуль и представлении фундаментального бидифференциала в виде (3.62), может быть легко распространено на общий случай.

Теорема Вейерштрасса–Пуанкаре (см., например, [45]) утверждает, что любые $g + 1$ абелевы функции на якобиане алгебраической кривой рода g являются алгебраически зависимыми. В частности, отсюда следует, что в случае гиперэллиптической кривой рода g среди $(g + 1)g/2$ функций $\wp_{ij}$ существует только g алгебраически независимых, поэтому эти функции должны удовлетворять $g(g - 1)/2$ соотношениям. (С использованием формулы Клейна (3.76) в [24] было показано, что эти соотношения являются поверхностями четвертого порядка, представляющими многообразие Куммера, см. пример кривой рода 2 в п. 4.1 ниже.)

Другой набор соотношений, который следует из формулы Клейна, описывает многообразие Якоби кривой X и интегрируемые потоки типа КП, используя $\wp$ -функции в качестве координат. В частности, в случае гиперэллиптических кривых все произведения $\wp_{ijk}\wp_{pqr}$ являются кубическими полиномами от $\wp_{ij}$. (См. детали в [24].) Здесь мы покажем, что эти результаты могут также быть получены в рамках теории τ -функций на базе формулы Сато или, что равносильно, из билинейного тождества. Для этого мы представим τ -функцию Сато в терминах многомерной σ -функции Клейна. Эти методы вывода интегрируемых иерархий типа КП многообразий Якоби и Куммера сравниваются в [46].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Нормированная алгебро-геометрическая τ -функция выражается в терминах многомерной σ -функции как

$$\frac{\tau(\mathbf{e}, \mathbf{t})}{\tau(\mathbf{e}, \mathbf{0})} = \frac{\sigma(\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{R}_k t_k + \mathbf{v})}{\sigma(\mathbf{v})} \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k(\mathbf{v}) t_k\right\} \exp\left\{\frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{\infty} \mu_{kl}^{\text{alg}} t_k t_l\right\}. \quad (3.77)$$

Здесь $\mathbf{v} = \mathfrak{A}\mathbf{e}$ – сдвинутый абелев образ (3.71) положительного неспециального дивизора $\mathcal{D}$ и μ_{ik}^{alg} – коэффициенты в разложении алгебраической части бидифференциала $\Omega(p, q)$ вблизи точки p_{∞} . Коэффициенты $\Lambda_k(\mathbf{v})$ заданы равенствами

$$\Lambda_k(\mathbf{v}) = \mathbf{R}_k^T \varkappa \mathbf{v}, \quad k = 1, 2, \dots. \quad (3.78)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Алгебро-геометрическая τ -функция в калибровочно эквивалентном виде (3.37) приводит к соотношению

$$\frac{\tau(\mathbf{e}, \mathbf{t})}{\tau(\mathbf{e}, \mathbf{0})} = \exp\left\{\frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^{\infty} \mu_{ij}^{\text{alg}} t_i t_j + \frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^{\infty} \mu_{ij}^{\text{trans}} t_i t_j\right\} \frac{\theta(\mathbf{e} + \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{U}_i t_i)}{\theta(\mathbf{e})}, \quad (3.79)$$

где λ_i заданы в (3.33) и использовано соотношение (3.56).

Действуя иначе, из определения σ -функции получаем

$$\begin{aligned} \sigma\left(\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{R}_k t_k + \mathbf{v}\right) &= C \theta\left(\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{U}_k t_k + \mathfrak{A}^{-1} \mathbf{v}\right) \exp\left\{\frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{\infty} \mathbf{R}_k^T \varkappa \mathbf{R}_l t_k t_l\right\} \\ &\times \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{R}_k^T \varkappa \mathbf{v} t_k\right\} \exp\left\{\frac{1}{2} \mathbf{v}^T \varkappa \mathbf{v}\right\}. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Здесь C – константа из определения σ -функции (3.72). Учитывая (3.66), мы получаем представление (3.77) с коэффициентами Λ_k , заданными в (3.78).

Так как τ -функция определена только с точностью до линейного по $\mathbf{t}$ экспоненциального множителя, мы опускаем линейный член в экспоненте (3.77), с тем чтобы получить более простую формулу

$$\frac{\tau(\mathbf{e}, \mathbf{t})}{\tau(\mathbf{e}, \mathbf{0})} = \frac{\sigma(\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{R}_k t_k + \mathbf{v})}{\sigma(\mathbf{v})} \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{\infty} \mu_{kl}^{\text{alg}} t_k t_l \right\}, \quad \mathbf{v} = -2\mathbf{e}. \quad (3.81)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.6. Похожая формула для алгебро-геометрических τ -функций в терминах σ -функции была дана А. Накаяшики в [31], где также учитываются члены в экспоненте, линейные по t_k .

На первый взгляд, использование многомерной σ -функции вместо θ -функции Римана в выражении для алгебро-геометрической τ -функции кажется тривиальной заменой. Но результатом является то, что квадратичная форма в аргументе экспоненты имеет коэффициенты, выражающиеся алгебраически в терминах коэффициентов кривой. Более того, эти коэффициенты μ_{kl}^{alg} являются полиномами от коэффициентов кривой (см. детали в [47]). Как показано ниже, такое представление τ -функции в качестве результата дает решения интегрируемой иерархии КП, выраженные как дифференциальные полиномы от $\wp$ -функций с полиномиальными коэффициентами, определенными непосредственно в терминах коэффициентов полиномов $P(x, y)$, задающих кривую.

Согласно предложениям 2.1 и 2.2, для любой кривой X рода g ассоциированная алгебро-геометрическая τ -функция допускает следующее разложение:

$$\frac{\tau(\mathbf{e}, \mathbf{t})}{\tau(\mathbf{e}, \mathbf{0})} = \sum_{\lambda} \pi_{\lambda}(w) s_{\lambda}(\mathbf{t}), \quad (3.82)$$

где

$$\pi_{\lambda}(w) = (-1)^{\sum_{k=1}^r b_k} \det(A_{a_i b_j})|_{1 \leq i, j \leq r}, \quad (3.83)$$

сумма берется по всем разбиениям λ , в обозначениях Фробениуса имеющих вид $(a_1, \dots, a_r | b_1, \dots, b_r)$. Здесь A_{ij} , $i, j = 0, \dots, \infty$, – элементы матрицы аффинных координат A , представляющей элемент грассманиана $w(X, \mathcal{D}, p_{\infty}, \zeta) \in \text{Gr}_{\mathcal{H}_+}(\mathcal{H})$.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Элементы A_{ij} могут быть представлены как полиномы от символов Клейна

$$\zeta_i(\mathbf{v}), \wp_{ij}(\mathbf{v}), \dots, \quad i, j \in \{1, \dots, g\}, \quad (3.84)$$

и коэффициентов полинома $P(x, y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Величины $\pi_{\lambda}(w)$ в τ -разложении (3.82) можно выразить в терминах отношений $\sigma_i(\mathbf{v})/\sigma(\mathbf{v})$, $\sigma_{ij}(\mathbf{v})/\sigma(\mathbf{v})$ и т. д. Но для $i, j, k, \dots = 1, \dots, g$

мы получаем

$$\frac{\sigma_i(\mathbf{v})}{\sigma(\mathbf{v})} = \zeta_i(\mathbf{v}), \quad \frac{\sigma_{ij}(\mathbf{v})}{\sigma(\mathbf{v})} = \zeta_i(\mathbf{v})\zeta_j(\mathbf{v}) - \wp_{ij}(\mathbf{v}), \quad (3.85)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{ijk}(\mathbf{v})}{\sigma(\mathbf{v})} &= \zeta_i(\mathbf{v})(\mathbf{v})\wp_{jk}(\mathbf{v}) + \zeta_j(\mathbf{v})(\mathbf{v})\wp_{ik}(\mathbf{v}) + \zeta_k(\mathbf{v})(\mathbf{v})\wp_{ij}(\mathbf{v}) \\ &\quad - \zeta_i(\mathbf{v})\zeta_j(\mathbf{v})\zeta_k(\mathbf{v}) + \wp_{ijk}(\mathbf{v}), \end{aligned} \quad (3.86)$$

.....

Каждому символу $\wp_{k_1 \dots k_g}$ мы приписываем вес:

$$\underbrace{\wp_{1, \dots, 1}}_{k_1}, \underbrace{\wp_{2, \dots, 2}}_{k_2}, \dots, \underbrace{\wp_{g, \dots, g}}_{k_g} \Leftrightarrow \mathcal{W}_{k_1 \dots k_g} = \sum_{j=1}^g k_j n_j, \quad (3.87)$$

где $\{n_i\}_{i=1, \dots, g}$ – последовательность пробелов Вейерштрасса в бесконечности.

Каждому коэффициенту a_{kl} мономиального члена $a_{kl}x^k y^l$, $k < s$, $l < n$, полинома $P(x, y)$, определяющего кривую (3.57), мы приписываем вес $\widehat{\mathcal{W}}_{kl}$:

$$a_{kl} \Leftrightarrow \widehat{\mathcal{W}}_{kl} = ns - (nk + ls). \quad (3.88)$$

Наконец, припишем моному, являющемуся произведением $\wp$ -символов с коэффициентами $a_{k,j}$, вес $\mathcal{W}$, который является суммой весов множителей:

$$a_{ij} \cdots a_{kl} \wp_{i_1 \dots i_g} \cdots \wp_{k_1 \dots k_g} \Leftrightarrow \mathcal{W} = \widehat{\mathcal{W}}_{i_j} + \cdots + \widehat{\mathcal{W}}_{kl} + \mathcal{W}_{i_1 \dots i_g} + \cdots + \mathcal{W}_{k_1 \dots k_g}. \quad (3.89)$$

Рассмотрим набор соотношений (типа Джембелли)

$$\pi_{(a_1, \dots, a_r | b_1, \dots, b_r)} = (-1)^{\sum_{i=1}^r b_i} \det(A_{a_i b_j}), \quad (3.90)$$

соответствующих разбиению $\lambda = (a_1, \dots, a_r | b_1, \dots, b_r)$ веса $\mathcal{W}$. Процедура, описанная выше, сводит соотношения (3.90) к соответствующим однородным полиномиальным соотношениям веса $\mathcal{W}$ между $\wp$ -функциями $\wp_{i_1 \dots i_k}$, коэффициенты которых полиномиально зависят от коэффициентов полинома $P(x, y)$, задающего кривую. Такие соотношения описывают иерархии типа КП в терминах $\wp$ -координат.

4. Примеры и приложения разложений по функциям Шура

4.1. τ -функция гиперэллиптической кривой. Пусть X – гиперэллиптическая кривая рода g , заданная уравнением

$$X: \quad P(x, y) = 0, \quad (4.1)$$

где полином $P(x, y)$ имеет вид

$$P(x, y) = y^2 - 4x^{2g+1} - \cdots - \alpha_0 = y^2 - 4 \prod_{j=1}^{2g+1} (x - a_j). \quad (4.2)$$

Как и выше, $p = (x, y)$ будет обозначать произвольную точку кривой X и $p_\infty = (\infty, \infty)$. Выберем канонический базис циклов $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_g; \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_g) \in H_1(X, \mathbb{Z})$ и зафиксируем базисные голоморфные дифференциалы $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_g)^T$ как

$$u_i(p) = \frac{x^{i-1} dx}{y}, \quad i = 1, \dots, g. \quad (4.3)$$

Как и выше, обозначим матрицы периодов через $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ и положим $\mathbf{T} = \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{B}$.

Пусть $\mathcal{D} = q_1 + \dots + q_g$ – неспециальный дивизор степени g , и пусть $\mathbf{v}$ – сдвинутое отображение Абеля, заданное в (3.71). В этом случае вектор римановых констант $\mathbf{K}$ может быть задан как образ отображения Абеля дивизора $\mathcal{D} = (p_1, \dots, p_g)$, где $p_k = (a_k, 0)$ – точки ветвления, абелевы образы которых являются нечетными полупериодами [39; разд. VII.1.2]:

$$\mathbf{K} = - \sum_{k=1}^g \int_{p_\infty}^{p_k} \omega = -\mathfrak{A}^{-1} \sum_{k=1}^g \int_{p_\infty}^{p_k} \mathbf{u}. \quad (4.4)$$

Поэтому мы можем записать

$$\mathbf{v} = \sum_{k=1}^g \int_{(a_k, 0)}^{q_k} \mathbf{u}. \quad (4.5)$$

В классической теории (см., например, [23], [44]) было показано, что квадратичный бидифференциал $\Omega(p, q)$ может быть выбран в виде

$$\Omega(p, q) = \frac{F(x, z) + 2yw}{4(x - z)^2 yw} dx dz + 2\mathbf{v}^T(p) \varkappa \mathbf{v}(q), \quad (4.6)$$

где полином $F(x, z)$ является 2-полярой Клейна:

$$F(x, z) = \sum_{m=0}^g x^m z^m (2\alpha_{2m} + (x + z)\alpha_{2m+1}), \quad (4.7)$$

и симметричная $(g \times g)$ -матрица $\varkappa$ задана формулой $\varkappa = \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{S}$, где $\mathfrak{S}$ – матрица $\mathfrak{a}$ -периодов мероморфных дифференциалов

$$r_j = \sum_{k=j}^{2g+1-j} (k+1-j)\alpha_{k+1+j} \frac{x^k dx}{4y}, \quad j = 1, \dots, g. \quad (4.8)$$

ТЕОРЕМА 4.1 (формула Клейна для гиперэллиптической кривой). Пусть плоская кривая X задана полиномиальным уравнением (4.2). Пусть $p = (x, y)$ – произвольная точка кривой X и $\mathcal{D} = p_1 + \dots + p_g$ – неспециальный дивизор на X , $p_k = (x_k, y_k)$. Пусть $\mathbf{v}$ – сдвинутое отображение Абеля дивизора $\mathcal{D}$, заданное в (4.5). Тогда

$$\sum_{i,k=1}^g \wp_{ik}(\mathcal{A}(p) - \mathcal{A}(p_\infty) + \mathbf{v}) x^{k-1} x_r^{i-1} = \frac{F(x, x_r) - 2yy_r}{4(x - x_r)^2}, \quad r = 1, \dots, g, \quad (4.9)$$

где полином

$$\mathcal{F}(p, p_r) = \mathcal{F}((x, y); (x_r, y_r)) = F(x, x_r) - 2yy_r$$

определяет фундаментальный бидифференциал $\Omega(p, p_r)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Дифференциальные соотношения на $\wp_{ij}$ описывают все возможные интегрируемые уравнения, ассоциированные с заданной кривой. Более того, можно показать, что для произвольного рода g любая четная производная $\wp_{i_1 \dots i_{2k}}$, $k > 1$, может быть записана как полином от $\wp_{ik}$ с коэффициентами, выраженными в терминах инвариантов кривой [24]. Полный набор дифференциальных соотношений в частных случаях $g = 2$ и $g = 3$ можно найти в [48], [20], а недавно эти соотношения в ковариантной форме были получены в работе [49].

Теперь ограничимся случаем кривой рода два, уравнение которой может быть записано в виде

$$y^2 = 4x^5 + \alpha_4 x^4 + \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0 \quad (4.10)$$

$$= 4(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)(x - a_4)(x - a_5), \quad a_i \neq a_j. \quad (4.11)$$

Голоморфные дифференциалы $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T$ связаны с $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^T$, где

$$v_1 = \frac{x dx}{y}, \quad v_2 = \frac{dx}{y}, \quad (4.12)$$

преобразованием

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha_4/8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

Согласно определению (3.65), первые несколько коэффициентов μ_{ij}^{alg} имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \mu_{ij}^{\text{alg}} &= 0, \quad \text{если } i \text{ или } j \text{ или они оба четные,} \\ \mu_{11}^{\text{alg}} &= -\frac{1}{16} \alpha_4, \\ \mu_{13}^{\text{alg}} &= \mu_{31} = -\frac{1}{16} \alpha_3 + \frac{3}{256} \alpha_4^2, \\ \mu_{15}^{\text{alg}} &= \mu_{51} = -\frac{1}{16} \alpha_2 + \frac{3}{128} \alpha_3 \alpha_4 - \frac{5}{2048} \alpha_4^3, \\ \mu_{33}^{\text{alg}} &= -\frac{3}{16} \alpha_2 + \frac{1}{32} \alpha_3 \alpha_4 - \frac{3}{1024} \alpha_4^3, \\ &\dots \end{aligned} \quad (4.14)$$

Введем набор векторов вычетов

$$\mathbf{R}_{2k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

и

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_3 = \begin{pmatrix} -\alpha_4/8 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_5 = \begin{pmatrix} -\alpha_3/8 + 3\alpha_4^2/128 \\ -\alpha_4/8 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad (4.15)$$

Из формул (2.48) и (2.60) следует, что первые несколько компонент аффинной матрицы имеют вид

$$\begin{aligned}
 A_{00}(\mathbf{v}) &= \zeta_1, \\
 A_{01}(\mathbf{v}) &= \frac{1}{2} \zeta_1^2 - \frac{1}{2} \wp_{11} - \frac{1}{16} \alpha_4, \\
 A_{02}(\mathbf{v}) &= \frac{1}{6} \zeta_1^3 + \frac{1}{3} \zeta_2 - \left(\frac{1}{2} \wp_{11} + \frac{5}{48} \alpha_4 \right) \zeta_1 - \frac{1}{6} \wp_{111}, \\
 A_{03}(\mathbf{v}) &= \frac{1}{24} \zeta_1^4 + \frac{1}{3} \zeta_1 \zeta_2 - \left(\frac{7}{96} \alpha_4 + \frac{1}{4} \wp_{11} \right) - \frac{1}{6} \wp_{111} \zeta_1 \\
 &\quad - \frac{1}{24} \wp_{1111} - \frac{1}{3} \wp_{12} + \frac{1}{8} \wp_{11}^2 + \frac{7}{96} \alpha_4 \wp_{11} - \frac{1}{24} \alpha_3 + \frac{5}{512} \alpha_4^2, \\
 &\dots\dots\dots \\
 A_{10}(\mathbf{v}) &= A_{01}(\mathbf{v}), \\
 A_{11}(\mathbf{v}) &= \frac{1}{3} \zeta_1^3 - \frac{1}{3} \zeta_2 - \left(\wp_{11} + \frac{1}{12} \alpha_4 \right) \zeta_1 - \frac{1}{3} \wp_{111}, \\
 A_{12}(\mathbf{v}) &= \frac{1}{8} \zeta_1^4 - \frac{1}{2} \zeta_1 \wp_{111} + \frac{3}{8} \wp_{11}^2 - \frac{1}{8} \wp_{1111} - \left(\frac{3}{4} \wp_{11} + \frac{3}{32} \alpha_4 \right) \zeta_1^2 \\
 &\quad + \frac{3}{32} \alpha_4 \wp_{11} + \frac{3}{512} \alpha_4^2, \\
 A_{13}(\mathbf{v}) &= \frac{1}{30} \zeta_1^5 + \frac{1}{6} \zeta_1^2 \zeta_2 - \frac{1}{3} \wp_{111} \zeta_1^2 \\
 &\quad - \left(\frac{1}{3} \wp_{11} + \frac{1}{16} \alpha_4 \right) \zeta_1^3 - \left(\frac{1}{6} \wp_{11} + \frac{1}{48} \alpha_4 \right) \zeta_2 \\
 &\quad + \left(-\frac{1}{6} \wp_{1111} - \frac{1}{3} \wp_{12} + \frac{1}{2} \wp_{11}^2 + \frac{3}{16} \alpha_4 \wp_{11} - \frac{1}{24} \alpha_3 + \frac{7}{384} \alpha_4^2 \right) \zeta_1 \\
 &\quad + \frac{1}{3} \wp_{11} \wp_{111} - \frac{1}{6} \wp_{1112} - \frac{1}{30} \wp_{11111} + \frac{1}{16} \alpha_4 \wp_{111}, \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Все символы Клейна, ζ_k , $\wp_{kl}$ и т. д., в этих формулах вычисляются в точке $\mathbf{v}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Плюккерovy соотношения, записанные для разбиения $\lambda = (2, 2)$ веса 4 и разбиений $\lambda = (3, 2)$, $\lambda = (2, 2, 1)$ веса 5, эквивалентны уравнению*

$$\wp_{1111}(\mathbf{v}) = 6\wp_{11}^2(\mathbf{v}) + 4\wp_{12}(\mathbf{v}) + \alpha_4 \wp_{11}(\mathbf{v}) + \frac{1}{2} \alpha_3. \tag{4.17}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое нетривиальное плюккерovo соотношение для разбиения $\lambda = (2, 2)$,

$$\pi_{(1,0|1,0)} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{10} \\ A_{01} & A_{00} \end{vmatrix}, \tag{4.18}$$

записывается в развернутом виде как

$$\begin{aligned} & \tau(\mathbf{0}, \mathbf{v}) \left[\frac{1}{12} \frac{\partial^4}{\partial t_1^4} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial t_2^2} - \frac{1}{3} \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_3} \right] \tau(\mathbf{t}, \mathbf{v}) \Big|_{\mathbf{t}=\mathbf{0}} \\ &= \begin{vmatrix} \left[\frac{1}{3} \frac{\partial^3}{\partial t_1^3} - \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial t_3} \right] \tau(\mathbf{t}, \mathbf{v}) \Big|_{\mathbf{t}=\mathbf{0}} & \left[\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t_2} + \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \right] \tau(\mathbf{t}, \mathbf{v}) \Big|_{\mathbf{t}=\mathbf{0}} \\ \left[-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t_2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \right] \tau(\mathbf{t}, \mathbf{v}) \Big|_{\mathbf{t}=\mathbf{0}} & \frac{\partial}{\partial t_1} \tau(\mathbf{t}, \mathbf{v}) \Big|_{\mathbf{t}=\mathbf{0}} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Подставляя в это соотношение выражение (3.81) для $\tau(\mathbf{t}, \mathbf{e})$ и выражения (4.14) для μ_{ij} и вычисляя производные по направлению, получаем уравнение (4.17). Выражения для коэффициентов диаграмм-крюков, входящие в детерминант, заданы выше и

$$\begin{aligned} \pi_{(1,0|1,0)} &= -\frac{1}{12} \wp_{1111} + \frac{1}{12} \zeta_1^4 - \left(\frac{1}{2} \wp_{11} + \frac{1}{48} \alpha_4 \right) \zeta_1^2 - \frac{1}{3} \zeta_2 \zeta_1 - \frac{1}{3} \wp_{111} \zeta_1 \\ &\quad + \frac{1}{3} \wp_{12} + \frac{1}{4} \wp_{11}^2 + \frac{1}{48} \alpha_4 \wp_{11} - \frac{1}{256} \alpha_4^2 + \frac{1}{24} \alpha_3. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Разбиения $\lambda = (3, 2)$ и $\lambda = (2, 2, 1)$ веса 5 дают плюккеровы соотношения, из которых следует действие выражения $\zeta_1(\mathbf{v}) + \partial/\partial v_1$ на уравнение, приведенное выше. Все это приводит к единственному уравнению:

$$\left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \wp_{1111}(\mathbf{v}) = 6\wp_{11}^2(\mathbf{v}) + 4\wp_{12}(\mathbf{v}) + \alpha_4 \wp_{11}(\mathbf{v}) + \frac{1}{2} \alpha_3.$$

Аналогичные соображения, касающиеся разбиений весов 6 и 7, ведут к соответствию

$$\left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \square \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & & & \\ \hline \end{array} \quad \dots \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \end{array} \right\} \Updownarrow$$

$$\wp_{1112}(\mathbf{v}) = 6\wp_{11}\wp_{12}(\mathbf{v}) - 2\wp_{22}(\mathbf{v}) + \alpha_4 \wp_{12}(\mathbf{v}) \quad (4.21)$$

$$\wp_{111}^2(\mathbf{v}) = 4\wp_{11}^3(\mathbf{v}) + \wp_{22}(\mathbf{v}) + 4\wp_{12}(\mathbf{v})\wp_{11}(\mathbf{v}) + \alpha_4 \wp_{11}^2(\mathbf{v}) + \alpha_3 \wp_{11}(\mathbf{v}) \quad (4.22)$$

Используя определение веса $\mathscr{W}$ для функций, возникающих в (4.21) и (4.22), мы видим, что все эти уравнения однородны.

Описанный здесь процесс может быть продолжен. Кажется разумным предположение, что весь набор дифференциальных соотношений между символами Клейна с мультииндексами может быть сопоставлен с диаграммами Юнга для разбиений $\lambda = (2, 2, i_1, \dots, i_n)$ таким образом, что разбиения веса $2k$ и $2k + 1$ соответствуют набору уравнений веса $\mathscr{W} = 2k$.

Чтобы завершить перечисление основных уравнений, описывающих абелевы функции в терминах плюккеровых соотношений, заметим, что уравнение поверхности Куммера выводится из плюккерова соотношения, соответствующего диаграмме для разбиения $\lambda = (4, 4, 4, 4)$ веса 16:

$$\pi_{(3,2,1,0 | 3,2,1,0)} = \begin{vmatrix} A_{33} & A_{32} & A_{31} & A_{30} \\ A_{23} & A_{22} & A_{21} & A_{20} \\ A_{13} & A_{12} & A_{11} & A_{10} \\ A_{03} & A_{02} & A_{01} & A_{00} \end{vmatrix}. \quad (4.23)$$

Уравнение

$$\pi_{(3,2,1,0 | 3,2,1,0)} = 0 \quad (4.24)$$

может быть записано в виде

$$\begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1/2 & -2\wp_{22} & -2\wp_{12} \\ \alpha_1/2 & \alpha_2 + 4\wp_{22} & \alpha_3/2 + 2\wp_{12} & -2\wp_{11} \\ -2\wp_{22} & \alpha_3/2 + 2\wp_{12} & \alpha_4 + 4\wp_{11} & 2 \\ -2\wp_{12} & -2\wp_{11} & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.25)$$

Таким образом получается замечательная поверхность четвертого порядка, а именно поверхность Куммера, $\text{Kum}(X)$, определенная как поверхность в $\mathbb{C}^3$ с координатами $x = \wp_{11}$, $y = \wp_{12}$, $z = \wp_{22}$. Она является факторпространством многообразия Якоби: $\text{Kum}(X) = \text{Jac}(X)/(\mathbf{u} \rightarrow -\mathbf{u})$.

Отсюда мы заключаем, что

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \iff \text{Kum}(X).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Уравнение на поверхность Куммера в этом виде было получено Бейкером [20], а обобщение на высшие рода дано в [24]. Заметим также, что уравнения, записанные для всех (2×2) -миноров матрицы $(A_{ij})_{i,j=0,\dots,3}$ в (4.23),

$$\pi_{(i,k | j,l)} = \begin{vmatrix} A_{ij} & A_{il} \\ A_{kj} & A_{kl} \end{vmatrix}, \quad i \geq j, \quad k \geq l, \quad i, j, k, l \in \{0, 1, 2, 3\}, \quad (4.26)$$

задают полный набор алгебраических уравнений, описывающих многообразие Якоби $\text{Jac}(X)$ как алгебраическое многообразие, а также потоки типа КдФ на $\text{Jac}(X)$. Таким образом, матричное представление многообразий Якоби и Куммера, найденное Бейкером [20] в роде 2 и обобщенное на высшие рода в [24], может быть реализовано в плюккеровых координатах.

Приведенные выше рассуждения приводят к следующему результату.

ТЕОРЕМА 4.2. *Каждый вектор-столбец $\mathbf{A}_k(\mathbf{v})$, $k = 0, 1, \dots$, в матрице аффинных координат элемента грассманиана, чьи компоненты A_{kl} , $l = 1, 2, \dots$, соответствуют разбиениям-крюкам $(k + 1, 1^l)$, есть полином от конечного набора символов Клейна $\zeta_i(\mathbf{v})$, $\wp_{ij}(\mathbf{v})$, $\wp_{ijk}(\mathbf{v})$.*

4.2. τ -функция тригональной кривой. В этом пункте мы демонстрируем, как вышеизложенные результаты возникают в случае тригональной кривой. Теория σ -функций тригональных абелевых функций была развита в [43]. Различные результаты в этой области были получены в [27], [42], [50]–[53]. Чтобы выделить основную идею и избежать громоздких формул, мы ограничимся первым нетривиальным случаем циклического семейства тригональных кривых X рода 3, определенных уравнением

$$P(x, y) = y^3 - (x^4 + \beta_3 x^3 + \beta_6 x^2 + \beta_9 x + \beta_{12}) = 0, \quad (4.27)$$

и зафиксируем канонический базис циклов $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3; \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) \in H_1(X, \mathbb{Z})$ на X .

Явное вычисление канонических голоморфных дифференциалов, а также мероморфных дифференциалов, им сопряженных, дано в [50]. В частности, для $p = (x, y)$ имеем

$$\begin{aligned} u_1(p) &= \frac{dx}{3y}, & u_2(p) &= \frac{x dx}{3y^2}, & u_3(p) &= \frac{dx}{3y^2}, \\ r_1(p) &= \frac{x^2 dx}{3y^2}, & r_2(p) &= -\frac{2x dx}{3y}, & r_3(p) &= -\frac{(5x^2 + 3\beta_3 x + \beta_6) dx}{3y}. \end{aligned}$$

Обозначим, как и выше, матрицы периодов через $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ и положим $\mathbf{T} = \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{B}$, $\varkappa = \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{C}$.

Пусть $\mathscr{D} = p_1 + p_2 + p_3$ – неспециальный дивизор степени 3 и

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 \int_{p_\infty}^{p_i} \mathbf{u} + \mathfrak{A}\mathbf{K}, \quad (4.28)$$

где $\mathbf{K}$ – вектор римановых констант с базисной точкой в p_∞ .

Полином $\mathcal{F}((x, y); (z, w))$, возникающий в фундаментальном бидифференциале $\Omega(p, q)$, задается формулой

$$\mathcal{F}((x, y), (z, w)) = 3w^2 y^2 + wT(x, z) + yT(z, x), \quad (4.29)$$

где

$$T(x, z) = 3\beta_{12} + (z + 2x)\beta_9 + x(x + 2z)\beta_6 + 3\beta_3 x^2 z + x^2 z^2 + 2x^3 z. \quad (4.30)$$

Разложение около p_∞ дает следующие выражения для μ_{ij}^{alg} :

$$\begin{aligned} \mu_{00}^{\text{alg}} &= 0, \\ \mu_{01}^{\text{alg}} &= \mu_{10}^{\text{alg}} = -\frac{2}{3}\beta_3, \\ \mu_{04}^{\text{alg}} &= \mu_{40}^{\text{alg}} = -\frac{2}{3}\beta_6 + \frac{5}{9}\beta_3^2, \\ \mu_{13}^{\text{alg}} &= \mu_{31}^{\text{alg}} = -\frac{2}{3}\beta_6 + \frac{4}{9}\beta_3^2, \\ \mu_{22}^{\text{alg}} &= 0, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (4.31)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. $\mu_{ij}^{\text{alg}} = 0$ для всех i, j кроме тех, для которых $(i+j)+2 \equiv 0 \pmod 3$. Это является следствием циклической симметрии кривой.

В этом случае формула Клейна гласит

$$\sum_{i,k=1}^3 \wp \left(\int_{p_\infty}^p \mathbf{u} - \mathbf{v} \right) \phi_i(x, y) \phi_k(x_r, y_r) = \frac{\mathcal{F}(p, p_r)}{(x - x_r)^2}, \quad r = 1, 2, 3,$$

где $p = (x, y)$, $p_k = (x_k, y_k)$, а также $\phi_1(x, y) = y$, $\phi_2(x, y) = x$, $\phi_3(x, y) = 1$.

Разложим это соотношение в окрестности p_∞ , где локальная координата $x = 1/\xi^3$ определена. Приравнявая главные части в полюсах, мы получаем набор уравнений на переменные x_k , y_k и $\wp$ -символы. Теперь мы покажем, что эти соотношения могут быть получены как следствия плюккерových соотношений с помощью формулы типа Джембелли.

Первая диаграмма Юнга, приводящая к нетривиальному плюккерovому соотношению, как в случае гиперэллиптики рода 2, соответствует разбиению $\lambda = (2, 2)$. В рассматриваемом случае после упрощения мы получаем уравнение

$$\wp_{1111} = 6\wp_{11}^2 - 3\wp_{22}. \quad (4.32)$$

Дифференцирование по координате v_1 дает уравнение Буссинеска.

Дифференцирование уравнения (4.32) основывается на формуле (4.18) для треугольной кривой (4.27). А именно, мы имеем

$$\pi_{(1,0|1,0)} = \frac{1}{4} \wp_{22} + \frac{1}{4} \zeta_2^2 - \frac{1}{12} \wp_{1111} - \frac{1}{3} \wp_{111} \zeta_1 + \frac{1}{4} \wp_{11}^2 - \frac{1}{2} \wp_{11} \zeta_1^2 + \frac{1}{12} \zeta_1^4 \quad (4.33)$$

и

$$\begin{aligned} A_{00}(\mathbf{v}) &= \zeta_1(\mathbf{v}), \\ A_{01}(\mathbf{v}) &= -\frac{1}{2} \wp_{11}(\mathbf{v}) + \frac{1}{2} \zeta_1^2(\mathbf{v}) - \frac{1}{2} \zeta_2(\mathbf{v}), \\ A_{10}(\mathbf{v}) &= \frac{1}{2} \zeta_2(\mathbf{v}) - \frac{1}{2} \wp_{11}(\mathbf{v}) + \frac{1}{2} \zeta_1^2(\mathbf{v}), \\ A_{11}(\mathbf{v}) &= -\frac{1}{3} \wp_{111}(\mathbf{v}) - \wp_{11}(\mathbf{v}) \zeta_1(\mathbf{v}) + \frac{1}{3} \zeta_1^3(\mathbf{v}). \end{aligned} \quad (4.34)$$

В треугольном случае, в отличие от случая рода 2, уже нет симметрии относительно диагонали диаграммы Юнга, но мы можем ограничиться уравнениями четной степени, взяв симметрические комбинации двух диаграмм, связанных транспонированием. В случае веса 5 мы имеем симметрическую комбинацию

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array},$$

которая дает треугольное дифференциальное уравнение в частных производных веса 5

$$\wp_{1112} = 6\wp_{11}\wp_{12} + 3\beta_3\wp_{11}.$$

Для веса 6 мы имеем три набора диаграмм

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array},$$

которые приводят к переопределенному набору уравнений с единственным решением

$$\begin{aligned}\wp_{111}^2 &= 4\wp_{11}^3 + 4\wp_{12}^2 + 4\wp_{13} - 4\wp_{11}\wp_{22}, \\ \wp_{1122} &= 4\wp_{13} + 4\wp_{12}^2 + 2\wp_{11}\wp_{22} + 3\beta_3\wp_{12} + 2\beta_6.\end{aligned}$$

Продолжая в том же духе, можно получить полный набор уравнений для мультииндексных функций $\wp$ циклической тригональной кривой, приведенный в работе [50].

Эта работа выполнена при поддержке European Science Foundation Programme MISGAM (Methods of Integrable System, Geometry and Applied Mathematics). Авторы благодарны HWK, Hanse-Wissenschaftskolleg (Institute of Advanced Study), Delmenhorst за грант, позволивший им работать вместе в мае 2010 г. в HWK над завершением итоговой версии данной работы. Работа первого автора была частично поддержана Natural Science and Engineering Research Council, Canada (NSERC) и Fonds Québécois de la recherche sur la nature et les technologies (FQRNT). Авторы также благодарны Luc Haine за полезные обсуждения и за привлечение внимания к неопубликованному манускрипту Дж. Фея [29].

Список литературы

- [1] С. П. Новиков, “Периодическая задача для уравнения Кортевега–де Фриза. I”, *Функц. анализ и его прил.*, **8:3** (1974), 54–66; англ. пер.: S. P. Novikov, “The periodic problem for the Korteweg–de Vries equation”, *Funct. Anal. Appl.*, **8:3** (1974), 236–246.
- [2] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, “Периодический и условно периодический аналог многосолитонных решений уравнения Кортевега–де Фриза”, *ЖЭТФ*, **67:6** (1974), 2131–2144; англ. пер.: B. A. Dubrovin, S. P. Novikov, “Periodic and conditionally periodic analogs of the many-soliton solutions of the Korteweg–de Vries equation”, *Soviet Physics JETP*, **40:6** (1974), 1058–1063.
- [3] Б. А. Дубровин, “Обратная задача теории рассеяния для периодических конечнозонных потенциалов”, *Функц. анализ и его прил.*, **9:1** (1975), 65–66; B. A. Dubrovin, “Inverse problem for periodic finite-zoned potentials in the theory of scattering”, *Funct. Anal. Appl.*, **9:1** (1975), 61–62.
- [4] А. Р. Итс, В. Б. Матвеев, “Операторы Шредингера с конечнозонным спектром и N -солитонные решения уравнения Кортевега–де Фриза”, *ТМФ*, **23:1** (1975), 51–68; англ. пер.: A. R. Its, V. B. Matveev, “Schrödinger operators with finite-gap spectrum and N -soliton solutions of the Korteweg–de Vries equation”, *Theoret. Math. Phys.*, **23:1** (1975), 343–355.
- [5] А. Р. Итс, В. Б. Матвеев, “On a class of solutions of the Korteweg–de Vries equation”, *Problems in mathematical physics*, Изд-во Ленингр. ун-та, Л., 1976, 70–92.
- [6] В. А. Марченко, “Периодические решения уравнения Кортевега–де Фриза”, *Докл. АН СССР*, **217** (1974), 276–279; англ. пер.: V. A. Marchenko, “Periodic solutions of the KdV equation”, *Soviet Math. Dokl.*, **15** (1974), 1052–1056.
- [7] P. D. Lax, “Periodic solutions of the KdV equation”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **28:1** (1975), 141–188.
- [8] H. P. McKean, P. Moerbeke, “The spectrum of Hill’s equation”, *Invent. Math.*, **30:3** (1975), 217–274.
- [9] E. Date, S. Tanaka, “Periodic multi-soliton solutions of Korteweg–de Vries equation and Toda lattice”, *Progr. Theoret. Phys. Suppl.*, 1976, № 59, 107–125.

- [10] Б. А. Дубровин, В. Б. Матвеев, С. П. Новиков, “Нелинейные уравнения типа Кортевега–де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия”, *УМН*, **31:1** (1976), 55–136; англ. пер.: B. A. Dubrovin, V. B. Matveev, S. P. Novikov, “Non-linear equations of Korteweg–de Vries type, finite-zone linear operators, and Abelian varieties”, *Russian Math. Surveys*, **31:1** (1976), 59–146.
- [11] И. М. Кричевер, “Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений”, *УМН*, **32:6** (1977), 183–208; англ. пер.: I. M. Krichever, “Methods of algebraic geometry in the theory of non-linear equations”, *Russian Math. Surveys*, **32:6** (1977), 185–213.
- [12] Б. А. Дубровин, “Тэта-функции и нелинейные уравнения”, *УМН*, **36:2** (1981), 11–80; англ. пер.: B. A. Dubrovin, “Theta functions and non-linear equations”, *Russian Math. Surveys*, **36:2** (1981), 11–92.
- [13] M. Sato, Y. Mori, “On Hirota’s bilinear equations. I”, *RIMS Kôkyûroku*, **388** (1980), 183.
- [14] M. Sato, Y. Sato, “On Hirota’s bilinear equations. II”, *RIMS Kôkyûroku*, **414** (1981), 181.
- [15] M. Sato, Y. Sato, “Soliton equations as dynamical systems on infinite-dimensional Grassmann manifold”, *Nonlinear partial differential equations in applied science* (Tokyo, 1982), North-Holland Math. Stud., **81**, North-Holland, Amsterdam, 1983, 259–271.
- [16] E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara, T. Miwa, “Transformation groups for soliton equations”, *Nonlinear integrable systems – classical theory and quantum theory* (Kyoto, 1981), eds. M. Jimbo and T. Miwa, World Sci. Publ., Singapore, 1983, 39–119.
- [17] G. Segal, G. Wilson, “Loop groups and equations of KdV type”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 1985, № 61, 5–65.
- [18] I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, Oxford Math. Monogr., The Clarendon Press, New York, 1995, ISBN: 0-19-853489-2, x+475 pp.
- [19] B. E. Sagan, *The symmetric group. Representations, combinatorial algorithms, and symmetric functions*, 2nd ed., Grad. Texts in Math., **203**, Springer, New York, 2001, ISBN: 0-387-95067-2, xvi+238 pp.
- [20] H. F. Baker, *An introduction to the theory of multiply-periodic functions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1907, 336 pp.
- [21] J. D. Fay, *Theta functions on Riemann surfaces*, Lecture Notes in Math., **352**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1973, iv+137 pp.
- [22] D. Mumford, *Tata lectures on theta. I: Introduction and motivation: Theta functions in one variable. Basic results on theta functions in several variables*, Progr. Math., **28**, Birkhäuser, Boston, MA, 1983, ISBN: 3-7643-3109-7, xiii+235 pp.; II: *Jacobian theta functions and differential equations*, Progr. Math., **43**, Birkhäuser, Boston, 1984, ISBN: 0-8176-3110-0, xiv+272 pp.
- [23] H. F. Baker, *Abelian functions. Abel’s theorem and the allied theory of theta functions*, 1897; Reprinted in 1995: Cambridge Math. Lib., Cambridge Univ. Press, Cambridge, ISBN: 0-521-49877-5, xxxvi+684 pp.
- [24] V. M. Buchstaber, V. Z. Enolskii, D. V. Leykin, “Kleinian functions, hyperelliptic Jacobians and applications”, *Rev. Math. Math. Phys.*, **10:2** (1997), 3–120.
- [25] A. Nakayashiki, “On hyperelliptic Abelian functions of genus 3”, *J. Geom. Phys.*, **61:6** (2011), 961–985, arXiv: 0809.3303.
- [26] K. Weierstrass, *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen*, Springer, Berlin, 1893.
- [27] В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин, “Законы сложения на якобианах плоских алгебраических кривых”, Тр. МИАН, **251**, Наука, М., 2005, 54–126; англ. пер.: V. M. Buchstaber, D. V. Leykin, “Addition laws on Jacobians of plane algebraic curves”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **251** (2005), 49–120.

- [28] В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин, “Решение задачи дифференцирования абелевых функций по параметрам для семейств (n, s) -кривых”, *Функц. анализ и его прил.*, **42:4** (2008), 24–36; англ. пер.: V. M. Buchstaber, D. V. Leykin, “Solution of the problem of the differentiation of Abelian functions with respect to parameters for families of (n, s) -curves”, *Funct. Anal. Appl.*, **42:4** (2008), 268–278.
- [29] J. D. Fay, *Bilinear identities for theta functions*, Mathematics Report № 83-168, University of Minnesota, 1983.
- [30] J. Fay, “Schottky relations on $\frac{1}{2}(C - C)$ ”, *Theta functions – Bowdoin 1987, Part 1* (Brunswick, ME, 1987), Proc. Sympos. Pure Math., **49**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989, 485–501.
- [31] A. Nakayashiki, “Sigma function as a tau function”, *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 2010, № 3, 373–394, 22 pp.; arXiv:0904.0846.
- [32] В. М. Бухштабер, С. Ю. Шорина, “Коммутирующие дифференциальные многомерные операторы третьего порядка, задающие КдФ-иерархию”, *УМН*, **58:3** (2003), 187–188; англ. пер.: V. M. Bukhshtaber, S. Y. Shorina, “Commuting multidimensional third-order differential operators defining a KdV hierarchy”, *Russian Math. Surveys*, **58:3** (2003), 610–612.
- [33] В. М. Бухштабер, С. Ю. Шорина, “ w -функция решения g -го стационарного уравнения КдФ”, *УМН*, **58:4** (2003), 145–146; англ. пер.: V. M. Bukhshtaber, S. Y. Shorina, “The w -function of a solution the g th stationary KdV equation”, *Russian Math. Surveys*, **58:4** (2003), 780–781.
- [34] V. M. Buchstaber, S. Yu. Shorina, “The w -function of the KdV hierarchy”, *Geometry, topology, and mathematical physics*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **212**, eds. V. M. Buchstaber, I. M. Krichever, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004, 41–46.
- [35] L. A. Dickey, *Soliton equations and Hamiltonian systems*, Adv. Ser. Math. Phys., **26**, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2003, ISBN: 981-238-173-2, xii+408 pp.
- [36] И. М. Кривевер, “Метод Лапласа, алгебраические кривые и нелинейные уравнения”, *Функц. анализ и его прил.*, **18:3** (1984), 43–56; англ. пер.: I. M. Krichever, “The Laplace method, algebraic curves, and nonlinear equations”, *Funct. Anal. Appl.*, **18:3** (1984), 210–223.
- [37] И. М. Кривевер, С. П. Новиков, “Алгебры типа Вирасоро, римановы поверхности и структуры теории солитонов”, *Функц. анализ и его прил.*, **21:2** (1987), 46–63; англ. пер.: I. M. Krichever, S. P. Novikov, “Algebras of Virasoro type, Riemann surfaces and structures of the theory of solitons”, *Funct. Anal. Appl.*, **21:2** (1987), 126–142.
- [38] P. G. Grinevich, A. Yu. Orlov, “Virasoro action on Riemann surfaces, Grassmannians, $\det \bar{\partial}_J$ and Segal–Wilson τ -function”, *Problems of modern quantum field theory* (Alushta, 1989), Res. Rep. Phys., Springer, Berlin, 1989, 86–106.
- [39] H. M. Farkas, I. Kra, *Riemann surfaces*, Grad. Texts in Math., **71**, Springer, New York–Berlin, 1980, ISBN: 0-387-90465-4, xi+337 pp.
- [40] F. Klein, “Über hyperelliptische Sigmafunctionen”, *Math. Ann.*, **27:3** (1886), 431–464.
- [41] F. Klein, “Über hyperelliptische Sigmafunctionen (Zweite Abhandlung)”, *Math. Ann.*, **32:3** (1888), 351–380.
- [42] J. C. Eilbeck, V. Z. Enolskii, D. V. Leykin, “On the Kleinian construction of Abelian functions of canonical algebraic curves”, *SIDE III-symmetries and integrability of difference equations* (Sabaudia, 1998), CRM Proc. Lecture Notes, **25**, 2000, 121–138.
- [43] В. М. Бухштабер, В. З. Энольский, Д. В. Лейкин, “Униформизация многообразий Якоби тригональных кривых и нелинейные дифференциальные уравнения”, *Функц. анализ и его прил.*, **34:3** (2000), 1–16; англ. пер.: V. M. Buchstaber, V. Z. Enolskii, D. V. Leykin, “Uniformization of Jacobi varieties of trigonal curves and nonlinear differential equations”, *Funct. Anal. Appl.*, **34:3** (2000), 159–171.

- [44] H. F. Baker, “On the hyperelliptic sigma functions”, *Amer. J. Math.*, **20**:4 (1898), 301–384.
- [45] J. Igusa, “Problems on Abelian functions at the time of Poincaré and some at present”, *Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.)*, **6**:2 (1982), 161–174.
- [46] J. C. Eilbeck, V. Z. Enolski, J. Gibbons, “Sigma, tau and Abelian functions of algebraic curves”, *J. Phys. A*, **43**:45 (2010), 455216, 20 pp.; arXiv:1006.5219.
- [47] A. Nakayashiki, “On algebraic expression of sigma functions of (n, s) curves”, *Asian J. Math.*, **14**:2 (2010), 175–211; arXiv:0803.2083.
- [48] H. F. Baker, “On a system of differential equations leading to periodic functions”, *Acta Math.*, **27**:1 (1903), 135–156.
- [49] Ch. Athorne, “Identities for hyperelliptic $\wp$ -functions of genus one, two and three in covariant form”, *J. Phys. A*, **41**:41 (2008), 415202, 20 pp.
- [50] J. C. Eilbeck, V. Z. Enolski, S. Matsutani, Y. Ônishi, E. Previato, “Abelian functions for trigonal curve of genus three”, *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 2007, № 1, rnm 140, 38 pp.
- [51] S. Matsutani, E. Previato, “Jacobi inversion on strata of the Jacobian of the C_{rs} curve $y^r = f(x)$ ”, *J. Math. Soc. Japan*, **60**:4 (2008), 1009–1044; <http://www.mittag-leffler.se/preprints/0607/files/IML-0607-41.pdf>.
- [52] M. England, J. C. Eilbeck, “Abelian functions associated with a cyclic tetragonal curve of genus six”, *J. Phys. A*, **42**:9 (2009), 095210, 27 pp.
- [53] S. Matsutani, E. Previato, *Jacobi inversion on strata of the Jacobian of the C_{rs} curve $y^r = f(x)$* , arXiv:1006.1090.

Дж. Харнад (J. Harnad)

Université de Montréal,
Centre de recherches mathématiques;
Concordia University
E-mail: harnad@crm.umontreal.ca

Поступила в редакцию
07.12.2010

В.З. Энольский (V. Z. Enolski)

Институт магнетизма НАН Украины, Киев
E-mail: V.Z.Enolskii@ma.hw.ac.uk