Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Ю. Бунькова, Дифференциально-геометрическая структура универсального расслоения эллиптических кривых, *УМН*, 2011, том 66, выпуск 4, 185–186

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9436>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 16:14:53

Дифференциально-геометрическая структура универсального расслоения эллиптических кривых

Е. Ю. Бунькова

Слоем универсального расслоения $\mathcal{E}_1 \rightarrow \mathbb{C}^2$ эллиптических кривых является кривая V с аффинной частью $\{(x, y) \mid y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3\}$. Поля на базе $\mathbb{C}^2$ с координатами (g_2, g_3) (см. [1]) $L_0 = 4g_2 \partial_{g_2} + 6g_3 \partial_{g_3}$, $L_2 = 6g_3 \partial_{g_2} + (g_2^2/3) \partial_{g_3}$, где $\partial_{g_2} = \partial/\partial g_2$, $\partial_{g_3} = \partial/\partial g_3$, с коммутатором $[L_0, L_2] = 2L_2$ образуют базис в пространстве векторных полей, касающихся дискриминанта $\Delta = \{(g_2, g_3) \mid g_2^3 = 27g_3^2\}$. Им соответствует связность Гаусса–Манина ∇ на $\mathcal{E}_1$:

$$\nabla_{L_n} (d_1, d_2) = (d_1, d_2) \Gamma_n, \quad n = 0, 2,$$

$$\text{где } d_1 = \frac{x dx}{y}, d_2 = \frac{dx}{y}, \Gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \Gamma_2 = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ -g_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выбрав d_1 и d_2 в качестве базисных векторов в слое касательного расслоения к кривой, мы получаем действие ∇_{L_n} на координатах $A^\top = (A_1, A_2)$ голоморфного дифференциала общего вида $A_1 d_1 + A_2 d_2$ на проколотой в ∞ эллиптической кривой.

ЛЕММА. *Имеет место формула $\nabla_{[L_0, L_2]} A = [\nabla_{L_0}, \nabla_{L_2}] A$, т. е. связность Гаусса–Манина расслоения $\mathcal{E}_1$ является плоской.*

Связность ∇ согласована с симметричной кометрикой $G = (g^{i,j})$, если матрица G удовлетворяет совместной системе дифференциальных уравнений в неголономном репере $L_k G = \Gamma_k^\top G + G \Gamma_k$, $k = 0, 2$.

$$\text{Положим } z = g_2^3/(27g_3^2), t^{12} = g_2^3 - 27g_3^2, \xi(z) = -2\sqrt{3} z^{2/3} (z - 1)^{5/6}.$$

ТЕОРЕМА 1. *В координатах t, z поля L_0 и L_2 имеют вид $L_0 = t \partial_t$ и $L_2 = t^2 \xi(z) \partial_z$.*

$$\text{Положим } g^{1,1} = -\frac{t^2 \xi(z)}{2(z-1)} f_{1,1}(z), g^{1,2} = f_{1,2}(z), g^{2,2} = -\frac{2z(z-1)}{t^2 \xi(z)} f_{2,2}(z).$$

ТЕОРЕМА 2. *Связность ∇ согласована с G , если*

$$-2 \det M \frac{d}{dz} F = M F, \quad \text{где } F = \begin{pmatrix} f_{1,1}(z) \\ f_{1,2}(z) \\ f_{2,2}(z) \end{pmatrix}, M = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 12(4-3z) & 2 & 0 \\ -36z & 0 & z \\ 0 & -72 & 12(2-3z) \end{pmatrix}.$$

СЛЕДСТВИЕ. *Функция $\det G = z f_{1,1}(z) f_{2,2}(z) - f_{1,2}(z)^2$ локально постоянна.*

ТЕОРЕМА 3. 1) *В области $|z| < 1$ симметричные кометрики на $\mathbb{C}^2$, согласованные со связностью Гаусса–Манина на $\mathcal{E}_1$, задаются абсолютно сходящимися рядами*

$$f_{1,1}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{1,1} z^n, \quad f_{1,2}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{1,2} z^n, \quad f_{2,2}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{2,2} z^n,$$

где $c_{-1}^{i,j} = 0$, $c_0^{1,2}$ – свободный параметр, а $c_n^{i,j}$ задаются рекуррентно:

$$c_n^{1,1} = \frac{18(2n-1)c_{n-1}^{1,1} - c_n^{1,2}}{12(3n+2)}, \quad c_n^{1,2} = \frac{72(n-1)c_{n-1}^{1,2} + 36c_{n-1}^{1,1} - c_{n-1}^{2,2}}{72n},$$

$$c_n^{2,2} = \frac{3(2n-1)c_{n-1}^{2,2} + 6c_n^{1,2}}{2(3n+1)}.$$

2) *В области $|z| > 1$ симметричные кометрики на $\mathbb{C}^2$, согласованные со связностью Гаусса–Манина на $\mathcal{E}_1$, задаются абсолютно сходящимися рядами*

$$z f_{1,1}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{1,1} z^{-n}, \quad f_{1,2}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{1,2} z^{-n}, \quad z f_{2,2}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{2,2} z^{-n},$$

где $b_{-1}^{i,j} = 0$, $b_0^{1,2}$ – свободный параметр, а $b_n^{i,j}$ задаются рекуррентно:

$$b_n^{1,1} = \frac{12(3n-2)b_{n-1}^{1,1} - b_n^{1,2}}{18(2n+1)}, \quad b_n^{1,2} = \frac{72(n-1)b_{n-1}^{1,2} + 36b_{n-1}^{1,1} - b_n^{2,2}}{72n},$$

$$b_n^{2,2} = \frac{2(3n-1)b_{n-1}^{2,2} + 6b_n^{1,2}}{3(2n+1)}.$$

СЛЕДСТВИЕ. При $|z| < 1$ имеем $\det G = -(c_0^{1,2})^2$, а при $|z| > 1$ имеем $\det G = -(b_0^{1,2})^2$.

Приведем результаты, которые были получены при распространении описанных выше результатов на случай рода 2. Слоем универсального расслоения $\mathcal{E}_2 \rightarrow \mathbb{C}^4$ кривых рода 2 является кривая V с аффинной частью $\{(x, y) \mid y^2 = 4x^5 + \lambda_4 x^3 + \lambda_6 x^2 + \lambda_8 x + \lambda_{10}\}$. В [2] описаны векторные поля, касающиеся дискриминанта соответствующего семейства кривых, и построена градуированная полиномиальная алгебра Ли $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ (см. [3]) с образующими размерностей 0, 2, 4, 6 над $\mathcal{A} = \mathbb{C}[\lambda_4, \lambda_6, \lambda_8, \lambda_{10}]$, $\deg \lambda_k = k$.

ТЕОРЕМА 4. В $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ существует базис $L = (L_0, L_2, L_4, L_6)^\top$, $\deg L_k = k$, с коммутационными соотношениями $[L_0, L_k] = kL_k$, $k = 2, 4, 6$, и

$$[L_2, L_4] = -\frac{1}{4} \lambda_4 L_2 + 2L_6, \quad [L_2, L_6] = \frac{1}{20} \lambda_6 L_2 - \frac{1}{5} \lambda_4 L_4,$$

$$[L_4, L_6] = \frac{3}{10} \lambda_8 L_2 - \frac{1}{5} \lambda_6 L_4 + \frac{1}{20} \lambda_4 L_6 \quad (1)$$

и действием на $\mathcal{A}$: $L = T(\partial_{\lambda_4}, \partial_{\lambda_6}, \partial_{\lambda_8}, \partial_{\lambda_{10}})^\top$, где

$$T = \begin{pmatrix} 4\lambda_4 & 6\lambda_6 & 8\lambda_8 & 10\lambda_{10} \\ 6\lambda_6 & 8\lambda_8 - \frac{3}{5} \lambda_4^2 & 10\lambda_{10} - \frac{2}{5} \lambda_4 \lambda_6 & -\frac{1}{5} \lambda_4 \lambda_8 \\ 8\lambda_8 - \frac{3}{10} \lambda_4^2 & 10\lambda_{10} - \frac{17}{20} \lambda_4 \lambda_6 & \frac{2}{5} \lambda_4 \lambda_8 - \frac{3}{5} \lambda_6^2 & \frac{3}{4} \lambda_4 \lambda_{10} - \frac{3}{10} \lambda_6 \lambda_8 \\ 10\lambda_{10} - \frac{1}{10} \lambda_4 \lambda_6 & -\frac{1}{5} \lambda_4 \lambda_8 - \frac{3}{20} \lambda_6^2 & \frac{3}{2} \lambda_4 \lambda_{10} - \frac{1}{2} \lambda_6 \lambda_8 & \frac{3}{4} \lambda_6 \lambda_{10} - \frac{2}{5} \lambda_8^2 \end{pmatrix}.$$

СЛЕДСТВИЕ. Операторы L_2, L_4, L_6 порождают подалгебру $\hat{\mathcal{L}}_{\mathcal{A}}$ в $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ с коммутационными соотношениями над кольцом $\hat{\mathcal{A}} = \mathbb{C}[\lambda_4, \lambda_6, \lambda_8]$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Не существует градуированной полиномиальной алгебры Ли $\hat{\mathcal{L}}_{\hat{\mathcal{A}}}$ с образующими $\hat{L}_2, \hat{L}_4, \hat{L}_6$ над $\hat{\mathcal{A}}$ и коммутационными соотношениями (1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = \sum c_{i,j}^k \hat{L}_k$ и $\hat{L}_i \lambda_q = v_{i,q}$. Обобщенные соотношения Якоби (см. [3]) в нашем случае эквивалентны следующим:

$$v_{2,4} = 6\lambda_6, \quad v_{4,4} = v_{2,6} + \frac{3}{10} \lambda_4^2, \quad v_{4,6} = 6v_{2,8} - 5v_{6,4} + \frac{21}{20} \lambda_4 \lambda_6,$$

$$\sum_{q=2,4,6} c_{i,j}^q v_{q,k} = \sum_{q=4,6,8} \left(v_{i,q} \frac{\partial v_{j,k}}{\partial \lambda_q} - v_{j,q} \frac{\partial v_{i,k}}{\partial \lambda_q} \right).$$

Подставляя выражения для $v_{i,k}$, где $\deg v_{i,k} = i + k$, как полиномы от λ_q , приходим к несовместной системе уравнений.

Список литературы

- [1] G. Frobenius, L. Stickelberger, *Kronecker J.*, **92** (1882), 311–337. [2] В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин, *Функц. анализ и его прил.*, **42:4** (2008), 24–36. [3] В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин, *Функц. анализ и его прил.*, **36:4** (2002), 18–34.

Е. Ю. Бунькова (Е. Yu. Bun'kova)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: bunkova@mi.ras.ru

Представлено В. М. Бухштабером
Принято редколлегией
07.07.2011