Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Попов, А. Л. Скубачевский, Гладкость обобщенных решений эллиптических дифференциально-разностных уравнений с вырождением вблизи границ подобластей, *УМН*, 2011, том 66, выпуск 6, 195–196

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9437>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 12:35:24

Гладкость обобщенных решений эллиптических дифференциально-разностных уравнений с вырождением вблизи границ подобластей

В. А. Попов, А. Л. Скубачевский

Эллиптические дифференциальные уравнения с вырождением изучались многими авторами (см. [1]–[3] и имеющуюся там библиографию). В работах [4], [5] рассматривались эллиптические дифференциально-разностные операторы L_R порядка $2m$ с вырождением вида $L_R u = L R u$, где L – сильно эллиптический дифференциальный оператор, а R – разностный оператор, эрмитова часть которого является неотрицательным вырожденным оператором. Интерес к таким операторам вызван приложениями полученных результатов к некоторым нелокальным эллиптическим задачам, возникающим в теории плазмы [6], а также появлением ряда принципиально новых свойств даже по сравнению с сильно эллиптическими дифференциально-разностными операторами.

Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial Q \in C^\infty$. Пусть $\mathcal{M} \subset \mathbb{Z}^n$ – конечное множество. Обозначим через M аддитивную абелеву группу, порожденную множеством $\mathcal{M}$. Обозначим через Q_r открытые связные компоненты множества $Q \setminus \bigcup_{h \in M} (\partial Q + h)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем называть множества Q_r подобластями, а совокупность $\mathcal{R}$ всевозможных подобластей Q_r ($r = 1, 2, \dots$) назовем разбиением области Q .

Легко видеть, что множество $\mathcal{R}$ не более чем счетно. Разбиение $\mathcal{R}$ естественным образом распадается на классы. Будем считать, что подобласти $Q_{r_1}, Q_{r_2} \in \mathcal{R}$ принадлежат одному и тому же классу, если существует вектор $h \in M$, для которого $Q_{r_2} = Q_{r_1} + h$. Обозначим подобласти Q_r через Q_{sl} , где s – номер класса ($s = 1, 2, \dots$), а l – порядковый номер данной подобласти в s -м классе. Очевидно, что каждый класс состоит из конечного числа $N = N(s)$ подобластей Q_{sl} . Введем множество

$$\mathcal{K} = \bigcup_{h_1, h_2 \in M} \{ \bar{Q} \cap (\partial Q + h_1) \cap \overline{[(\partial Q + h_2) \setminus (\partial Q + h_1)]} \}. \quad (1)$$

Рассмотрим дифференциально-разностный оператор $L_R: D(L_R) \subset L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$, действующий по формуле

$$L_R u = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} R_{ij} u \quad (u \in D(L_R)), \quad (2)$$

с областью определения $D(L_R) = \dot{C}^\infty(Q)$, где $R_{ij} u = \sum_{h \in \mathcal{M}} a_{ijh} u(x+h)$ ($i, j = 1, \dots, n$),

$\dot{C}^\infty(Q)$ – множество финитных бесконечно дифференцируемых функций в Q , $a_{ijh} \in \mathbb{C}$. Будем полагать $u(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus Q$.

Пусть $x \in \bar{Q}_{s1}$ – произвольная точка. Рассмотрим все точки $x^i \in \bar{Q}$ такие, что $x^i - x \in M$. Поскольку область Q ограниченная, множество $\{x^i\}$ состоит из конечного числа точек $I = I(s, x)$ ($I \geq N(s)$). Занумеруем точки x^i так, что $x^i = x + h_{si}$ для $i = 1, \dots, N = N(s)$, $x^1 = x$, где $Q_{si} = Q_{s1} + h_{si}$. Введем матрицы R_{ijs} порядка $N \times N$

и матрицы $\tilde{R}_{ijs}(x)$ порядка $I \times I$ с элементами

$$r_{kl}^{ijs} = \begin{cases} a_{ijh}, & \text{если } h = h_{sl} - h_{sk} \in \mathcal{M}, \\ 0, & \text{если } h = h_{sl} - h_{sk} \notin \mathcal{M}, \end{cases} \quad \tilde{r}_{kl}^{ijs}(x) = \begin{cases} a_{ijh}, & \text{если } h = x^l - x^k \in \mathcal{M}, \\ 0, & \text{если } h = x^l - x^k \notin \mathcal{M}. \end{cases} \quad (3)$$

Обозначим через $\mathcal{N}(\cdot)$ и $\mathcal{R}(\cdot)$ соответственно ядро и образ некоторого оператора, $A_{ijs} = (R_{ijs} + R_{jis}^*)/2$, $B_{ijs} = (R_{ijs} - R_{jis}^*)/(2i)$, $\tilde{A}_{ijs}(x) = (\tilde{R}_{ijs}(x) + \tilde{R}_{jis}^*(x))/2$, $\tilde{B}_{ijs}(x) = (\tilde{R}_{ijs}(x) - \tilde{R}_{jis}^*(x))/(2i)$.

Будем предполагать, что выполнены следующие условия.

УСЛОВИЕ 1. Существуют самосопряженные неотрицательные разностные операторы R_{iQ} такие, что справедливо неравенство

$$\sum_{i,j=1}^n \tilde{A}_{ijs}(x) \xi_i \xi_j \geq \sum_{i=1}^n \tilde{R}_{is}(x) \xi_i^2 \geq 0$$

для любых $\xi \in \mathbb{R}^n$ и для любых $x \in \overline{Q}_{s1}$, где $\tilde{R}_{is}(x) \geq 0$ – матрицы, соответствующие операторам R_{iQ} .

УСЛОВИЕ 2. Множество $S = \{s : \det A_{iis} = 0, i = 1, \dots, n\}$ непусто.

УСЛОВИЕ 3. $\mathcal{N}(A_{ijs}) \subset \mathcal{N}(B_{ijs})$, $\mathcal{N}(A_{11s}) = \mathcal{N}(A_{iis}) = \mathcal{N}(R_{is})$, $\mathcal{N}(A_{iis}) \subset (\mathcal{N}(A_{ijs}) \cap \mathcal{N}(A_{jis}))$, $i, j = 1, \dots, n$, где $\mathcal{N}(\cdot)$ – ядро матрицы.

В работе [7] показано, что при выполнении условий 1–3 существует фридрихсово расширение $\mathcal{L}_R: D(\mathcal{L}_R) \subset L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ оператора L_R . Известно, что решение уравнения $\mathcal{L}_R u = f$ может не принадлежать даже пространству Соболева $W_2^1(Q)$ при $f \in C^\infty(\overline{Q})$. Однако имеет место следующий результат о гладкости решений.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия 1–3. Пусть $u \in D(\mathcal{L}_R)$ является решением уравнения $\mathcal{L}_R u = f$, и пусть $f \in L_2(Q)$. Тогда $P^{R_{11}} u \in W_2^2(Q_{sl} \setminus \mathcal{K}^\varepsilon)$ для любого $\varepsilon > 0$ ($s = 1, 2, \dots$; $l = 1, \dots, N(s)$), где $P^{R_{11}} u$ – ортогональная проекция на образ разностного оператора R_{11} , $\mathcal{K}^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R} : \text{dist}(x, \mathcal{K}) < \varepsilon\}$.

Теорема 1 обобщает результаты из [4], [5] о гладкости обобщенных решений эллиптических дифференциально-разностных уравнений с вырождением на случай, когда уравнение содержит несколько разностных операторов. С другой стороны, теория эллиптических дифференциально-разностных уравнений с вырождением позволяет исследовать достаточно широкий класс эллиптических задач с нелокальными условиями на компактных множествах, возникающих в теории плазмы [6].

Список литературы

- [1] М. В. Келдыш, Докл. АН СССР, **77** (1951), 181–183. [2] Г. Фикера, Математика, **7:6** (1963), 99–121. [3] О. А. Олейник, Е. В. Радкевич, Итоги науки. Сер. Матем. Мат. анализ. 1969, ВИНТИ, М., 1971, 7–252. [4] А. Л. Скубачевский, Тр. ММО, **59**, 1998, 240–285. [5] A. L. Skubachevskii, *Elliptic functional differential equations and applications*, Birkhäuser, Basel, 1997. [6] А. В. Бицадзе, А. А. Самарский, Докл. АН СССР, **185:4** (1969), 739–740. [7] В. А. Попов, А. Л. Скубачевский, Докл. РАН, **428:4** (2009), 450–453.

В. А. Попов (V. A. Popov)

Российский университет дружбы народов, Москва
E-mail: volodimir.a@gmail.com

Представлено В. М. Бухштабером

Принято редколлегией
13.07.2011

А. Л. Скубачевский (A. L. Skubachevskii)

Российский университет дружбы народов, Москва
E-mail: skub@lector.ru