Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Вьюгин, Р. Р. Гонцов, К вопросу о разрешимости в квадратурах фуксовых систем, *УМН*, 2012, том 67, выпуск 3, 183–184

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9438>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 15:28:12

К вопросу о разрешимости в квадратурах фуксовых систем

И. В. Вьюгин, Р. Р. Гонцов

Рассмотрим на сфере Римана $\bar{\mathbb{C}}$ фуксову систему линейных дифференциальных уравнений, т. е. систем вида

$$\frac{dy}{dz} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{B_i}{z - a_i} \right) y, \quad (1)$$

где $y(z)$ – вектор в $\mathbb{C}^p$, $B_1, \dots, B_n$ – комплексные $(p \times p)$ -матрицы (матрицы-вычеты системы в соответствующих особых точках $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$). Говорят, что она разрешима в квадратурах, если любое решение содержится в некотором расширении F поля $\mathbb{C}(z)$ рациональных функций, полученном при помощи присоединения экспонент и интегралов: $\mathbb{C}(z) = F_1 \subseteq \dots \subseteq F_m = F$, где поле $F_{i+1} = F_i \langle x_i \rangle$ получается присоединением к полю F_i элемента x_i , являющегося экспонентой или интегралом некоторого элемента поля F_i .

Необходимым и достаточным условием разрешимости в квадратурах фуксовой системы (1) является разрешимость ее группы монодромии, т. е. группы, порожденной матрицами монодромии $G_1, \dots, G_n$ в особых точках $a_1, \dots, a_n$ (см. [1; гл. 6, теорема 1.12]). В случае когда коэффициенты B_i фуксовой системы (1) малы, Ю. С. Ильяшенко и А. Г. Хованский [2] получили явный критерий разрешимости такой системы.

Существует $\varepsilon = \varepsilon(n, p) > 0$ такое, что условие разрешимости в квадратурах для фуксовой системы (1) с $\|B_i\| < \varepsilon$ принимает явный вид: система решается в квадратурах, если и только если все матрицы B_i (в некотором базисе) треугольны.

Заметим, что в доказательстве данного утверждения авторы использовали соображения И. А. Лапшо-Данилевского [3], относящиеся к проблеме Римана–Гильберта при близости матриц монодромии к единичной. В книге [1] (с. 221) А. Г. Хованский указывает на предположение А. А. Болибруха о том, что в условии критерия разрешимости требование малости матриц B_i можно ослабить. Достаточно лишь требовать, чтобы собственные числа этих матриц были малы. В следующей теореме мы уточняем формулировку этого предположения и приводим его доказательство.

ТЕОРЕМА 1. Пусть собственные значения β_i^j матриц B_i таковы, что

$$\operatorname{Re} \beta_i^j > -\frac{1}{n(p-1)}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, p, \quad (2)$$

и для каждой пары $\beta_i^j \neq \beta_i^k$ ($i = 1, \dots, n$) выполнено одно из двух условий:

$$1) \operatorname{Re} \beta_i^j - \operatorname{Re} \beta_i^k \notin \mathbb{Q}; \quad 2) \operatorname{Im} \beta_i^j \neq \operatorname{Im} \beta_i^k.$$

Тогда разрешимость фуксовой системы (1) в квадратурах эквивалентна треугольности (в некотором базисе) всех матриц B_i .

Доказательство начнем с двух вспомогательных лемм.

ЛЕММА 1. Пусть собственные значения β_i^j матриц-вычетов B_i удовлетворяют условию (2). Тогда представление монодромии такой системы верхнетреугольно, если и только если все матрицы B_i (в некотором базисе) верхнетреугольны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся геометрической интерпретацией (подробно изложенной в книге А. А. Болибруха [4]), согласно которой фуксовой системе (1) соответствует голоморфно тривиальное векторное расслоение E ранга p над сферой Римана с логарифмической связностью ∇ . Поскольку представление монодромии системы

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 11-01-00339), программы Президента РФ по поддержке молодых российских ученых (грант МК-4270.2011.1) и программы “Ведущие научные школы” (грант НШ-5998.2012.1).

верхнетреугольно, то существует $E^1 \subset E^2 \subset \dots \subset E^p = E$ – полный флаг подрасслоений рангов $1, 2, \dots, p$ соответственно, которые стабилизируются связностью ∇ (всякому подпредставлению монодромии размерности k соответствует подрасслоение ранга k , стабилизирующееся связностью).

Степень голоморфного векторного расслоения с логарифмической связностью определяется как сумма всех собственных значений матриц-вычетов связности по всем особым точкам. Для того чтобы найти степень подрасслоения ранга k , которое стабилизируется связностью, нужно в каждой особой точке просуммировать некоторые k собственных значений матрицы-вычета. Из условия леммы следует, что степени всех подрасслоений E^k равны нулю. Действительно, $\deg E^p = 0$, а для $k \leq p-1$ имеем:

$$\deg E^k = \sum_{i=1}^n \sum_{j \in J_i, |J_i|=k} \beta_i^j = \sum_{i=1}^n \sum_{j \in J_i, |J_i|=k} \operatorname{Re} \beta_i^j > -\frac{k}{p-1} \geq -1 \implies \deg E^k = 0$$

(степень подрасслоения голоморфно тривиального векторного расслоения не положительна). Таким образом, все подрасслоения E^k голоморфно тривиальны (подрасслоение голоморфно тривиального векторного расслоения голоморфно тривиально, если его степень равна нулю), и, следовательно, матрицы B_i одновременно приводятся к верхнетреугольному виду (см. [4; замечание 11.2]). Лемма доказана.

Матрицу G назовем N -резонансной, если найдутся два ее собственных значения $\lambda_1 \neq \lambda_2$ такие, что $\lambda_1^N = \lambda_2^N$, т. е. $|\lambda_1| = |\lambda_2|$, $\arg \lambda_1 - \arg \lambda_2 = \frac{2\pi}{N} j$, $j \in \{1, 2, \dots, N-1\}$. Согласно замечанию после теоремы 2.7 в [1; гл. 6], справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 2. Пусть группа $H \subset \operatorname{GL}(p, \mathbb{C})$ порождена матрицами $G_1, \dots, G_n$. Существует число $N = N(p)$ такое, что если матрицы $G_1, \dots, G_n$ не являются N -резонансными, то из разрешимости группы H следует треугольность этих матриц.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Собственные значения λ_i^j матрицы монодромии G_i связаны с собственными значениями β_i^j матрицы-вычета B_i фуксовой системы соотношением $\lambda_i^j = \exp(2\pi i \beta_i^j)$, $i = \sqrt{-1}$ (см. [4; лекция 6]). Таким образом,

$$\lambda_i^j = \exp(2\pi i (\operatorname{Re} \beta_i^j + i \operatorname{Im} \beta_i^j)) = e^{-2\pi \operatorname{Im} \beta_i^j} (\cos(2\pi \operatorname{Re} \beta_i^j) + i \sin(2\pi \operatorname{Re} \beta_i^j)),$$

и в силу условий на числа β_i^j матрицы G_i не могут быть N -резонансными ни при каком N . Теперь утверждение теоремы следует из лемм 1, 2.

Список литературы

- [1] А. Г. Хованский, *Топологическая теория Галуа. Разрешимость и неразрешимость уравнений в конечном виде*, МЦНМО, М., 2008, 296 с. [2] Ю. С. Ильяшенко, А. Г. Хованский, *Теория Галуа систем дифференциальных уравнений типа Фукса с малыми коэффициентами*, Препринт ИПМ АН СССР № 117, 1974. [3] И. А. Лаппо-Данилевский, *Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений*, ТехТеорЛит, М., 1957, 456 с. [4] А. А. Болибрух, *Обратные задачи монодромии в аналитической теории дифференциальных уравнений*, МЦНМО, М., 2009, 200 с.

И. В. Вьюгин (I. V. Vyugin)
Институт проблем передачи информации
им. А. А. Харкевича РАН
E-mail: vyugin@gmail.com

Представлено Д. В. Аносовым
Принято редколлегией
01.09.2011

Р. Р. Гонцов (R. R. Gontsov)
Институт проблем передачи информации
им. А. А. Харкевича РАН
E-mail: gontsovr@mppei.ru