Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. А. Яськов, Необходимые условия в законе больших чисел для мартингалов и связанных с ними систем, *УМН*, 2011, том 66, выпуск 4, 181–182

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9439>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 07:10:24

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Необходимые условия в законе больших чисел
для мартингалов и связанных с ними систем

П. А. Яськов

1. Ряд необходимых и достаточных условий в классических предельных теоремах для независимых случайных величин имеют свои естественные аналоги для мартингалов. Однако в мартингальном случае эти условия часто уже не являются необходимыми. В настоящей заметке изучается вопрос о том, при каких минимальных дополнительных ограничениях условия стандартного закона больших чисел для мартингалов (в схеме серий) необходимы.

Заметим, что согласно [1] постановки такого рода отличны от хорошо известных необходимых и достаточных условий в принципе инвариантности (см., например, [2]). Так, в [1] исследуются условия, при которых из выполнимости центральной предельной теоремы для мартингалов в схеме серий следует, что максимум приращений мартингалов в каждой серии сходится по вероятности к нулю. Эта проблема была поставлена еще П. Леви.

2. Классический результат для семейств случайных величин $\{\xi_{in}\}$, п. н. ограниченных некоторой константой $M > 0$ и независимых по i при каждом фиксированном n , состоит в эквивалентности условий:

- 1) $\sum_i \xi_{in} \xrightarrow{P} 0$,
- 2) $\sum_i (\xi_{in} - E\xi_{in})^2 \xrightarrow{P} 0$ и $\sum_i E\xi_{in} \rightarrow 0$,
- 3) $\sum_i D\xi_{in} \rightarrow 0$ и $\sum_i E\xi_{in} \rightarrow 0$;

здесь и далее $n \in \mathbb{N}$, i изменяется от 1 до некоторого $k_n \in \mathbb{N}$, пределы берутся при $n \rightarrow \infty$, а $\sum_i = \sum_{i=1}^{k_n}$. Условия независимости и ограниченности ξ_{in} можно существенно ослабить, как показывает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\{\xi_{in}\}$ – массив случайных величин такой, что

$$\sup_n E \max_i |\xi_{in}|^4 \leq M^4 < \infty, \quad E \prod_{j=1}^k \xi_{i_j n} = \prod_{j=1}^k E \xi_{i_j n}, \quad \text{cov}(\xi_{i_1 n}^2, \xi_{i_2 n}^2) = 0$$

для всех различных i_j и $1 \leq j, k \leq 4$. Тогда условия 1), 2) и 3) равносильны.

Теорема 1 с учетом некоторых технических рассуждений есть прямое следствие неравенства Пэли–Зигмунда (ср. с теоремой 3 в [3]).

Работа частично поддержана грантом РФФИ № 10-01-00397.

3. Далее нам понадобятся несколько определений. Массив $\{(\xi_{in}, \mathcal{F}_{in})\}$ будем называть стохастическим массивом, если σ -алгебры $\mathcal{F}_{in}$ таковы, что $\mathcal{F}_{0n} = \{\emptyset, \Omega\} \subseteq \mathcal{F}_{1n} \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}_{k_n n}$, а величины ξ_{in} являются $\mathcal{F}_{in}$ -измеримыми для всех i, n . Пусть также $E_{(i-1)n}$, $D_{(i-1)n}$ и $\text{cov}_{(i-1)n}$ означают соответственно среднее, дисперсию и ковариацию, условные на $\mathcal{F}_{(i-1)n}$ ($i \geq 1$). Основной результат данной заметки содержит

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что $\{(\xi_{in}, \mathcal{F}_{in})\}$ – стохастический массив, семейства $\{\max_i \xi_{in}^2\}_{n \geq 1}$ и $\left\{ \left| \sum_i E_{(i-1)n} \xi_{in} \right|^2 \right\}_{n \geq 1}$ равномерно интегрируемы, причем*

$$\sum_{i < j} \text{cov}_{(i-1)n}(\xi_{in}, \xi_{jn}) \xrightarrow{P} 0. \quad (\circ)$$

Тогда следующие условия эквивалентны (при $n \rightarrow \infty$):

- 1°) $\sum_i \xi_{in} \xrightarrow{P} 0$ и $\sqrt{a} \lim_n P\left(\sum_i D_{(i-1)n} \xi_{in}^2 > a\right) = o(1)$ при $a \rightarrow \infty$;
- 2°) $\sum_i (\xi_{in} - E_{(i-1)n} \xi_{in})^2 \xrightarrow{P} 0$ и $\sum_i E_{(i-1)n} \xi_{in} \xrightarrow{P} 0$;
- 3°) $\sum_i D_{(i-1)n} \xi_{in} \xrightarrow{P} 0$ и $\sum_i E_{(i-1)n} \xi_{in} \xrightarrow{P} 0$.

Импlications 2°) $\Leftrightarrow$ 3°) $\Rightarrow$ 1°) хорошо известны в мартингальной литературе (см., например, [4; теоремы 1 и 2]) и вытекают из неравенства Ленгляра–Реболledo [5; гл. 1, § 9, теорема 3]. Доказательство импликации 1°) $\Rightarrow$ 3°) основано как на стандартной мартингальной технике, так и на некоторых каплинг-леммах для мартингал-разностей (см. [6; лемма 2.3.3 и оценка (6.2.12)]).

4. Для ограниченных мартингал-разностей условия теоремы 2 оптимальны, как показывает следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Для любых констант $\delta_n > 0$, стремящихся к нулю, существует стохастический массив $\{(\xi_{in}, \mathcal{F}_{in})\}$ такой, что $|\xi_{in}| \leq \delta_n$ и $E_{(i-1)n} \xi_{in} = 0$ п. н. при всех i, n , $\sum_i \xi_{in} \xrightarrow{P} 0$ и*

$$\sqrt{a} \lim_n P\left(\sum_i E_{(i-1)n} \xi_{in}^2 > a\right) = O(1), \quad a \rightarrow \infty,$$

однако $\sum_i E_{(i-1)n} \xi_{in}^2$ не стремится к нулю по вероятности.

Приведем также предложение, демонстрирующее оптимальность условия (о).

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Для справедливости импликации 1°) $\Rightarrow$ 3°) в теореме 2 условие (о) не может быть ослаблено до $\sum_{i < j} \text{cov}_{(i-1)n}(\xi_{in}, \xi_{jn}) = O_p(1)$.*

Список литературы

- [1] P. Jeganathan, L. Le Cam, *Sankhyā, Ser. A*, **47:2** (1985), 141–155. [2] J. Jacod, A. N. Shiryaev, *Limit theorems for stochastic processes*, Springer, Berlin, 2003. [3] N. Etemadi, *Sankhyā, Ser. A*, **47:2** (1985), 215–221. [4] Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев, *ТВП*, **26:1** (1981), 132–137. [5] Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев, *Теория мартингалов*, Наука, М., 1986. [6] V. de la Peña, E. Giné, *Decoupling: from dependence to independence. Randomly stopped processes, U-statistics and processes, martingales and beyond*, Springer, New York, 1999.

П. А. Яськов (P. A. Yas'kov)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: yaskov_pavel@mail.ru

Представлено Д. В. Трещёвым
Принято редколлегией
18.07.2011