Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Молев, М. Л. Назаров, Г. И. Олшанский, Янгианы и классические алгебры Ли, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 2, 27–104

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm944>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 16:21:58

УДК 512.5

ЯНГИАНЫ И КЛАССИЧЕСКИЕ АЛГЕБРЫ ЛИ

А. Молев, М. Назаров, Г. Ольшанский

СОДЕРЖАНИЕ

§ 0 . Введение	27
§ 1 . Янгиан $Y(N)$	33
§ 2 . Квантовый детерминант $qdet T(u)$ и центр алгебры $Y(N)$	47
§ 3 . Скрученный янгиан $Y^{\pm}(N)$	61
§ 4 . Детерминант Складина $qddet S(u)$ и центр алгебры $Y^{\pm}(N)$	71
§ 5 . Квантовая контракция и квантовый аналог формулы Лиувилля для янгиана ..	83
§ 6 . Квантовая контракция и квантовая формула Лиувилля для скрученного янгиана	91
§ 7 . Квантовый детерминант и детерминант Складина блочных матриц	98
Список литературы	102

§0. Введение

Термин “янгиан” обязан своим происхождением В. Г. Дринфельду, который предложил обозначать им квантовые группы, связанные с рациональными решениями классического уравнения Янга–Бакстера (описание этих решений содержится в работах Белавина–Дринфельда [4], [5]). В работе Дринфельда [14] по каждой простой конечномерной алгебре Ли $\mathfrak{a}$ была построена некоторая алгебра Хопфа $Y(\mathfrak{a})$, представляющая собой определенную деформацию универсальной обертывающей алгебры полиномиальной алгебры токов $\mathfrak{a}[x]$. Альтернативное описание алгебры $Y(\mathfrak{a})$ было дано в работе Дринфельда [16] (см. теорему 1).

Еще до введения в [14] алгебры Хопфа $Y(\mathfrak{a})$, алгебра, которую можно было бы называть янгианом редуктивной алгебры Ли $\mathfrak{gl}(N)$ и обозначить $Y(\mathfrak{gl}(N))$, рассматривалась в работах математиков из Санкт-Петербурга (см., например, Тахтаджян–Фаддеев [52]). Указанная алгебра является деформацией универсальной обертывающей $U(\mathfrak{gl}(N)[x])$. Представления $Y(\mathfrak{gl}(N))$ изучались в работах Кулиша, Решетихина, Складина [28] и Тарасова [50], [51].

Работа третьего автора выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 95-01-00814).

Для любой $\mathfrak{a}$ янгиан $Y(\mathfrak{a})$ содержит как подалгебру универсальную обертывающую алгебру $U(\mathfrak{a})$. Однако, случай $\mathfrak{a} = \mathfrak{sl}(N)$, по-видимому, является исключительным, поскольку только для $\mathfrak{a} = \mathfrak{sl}(N)$ существует гомоморфизм $Y(\mathfrak{a}) \rightarrow U(\mathfrak{a})$, тождественный на подалгебре $U(\mathfrak{a})$ (см. [14, теорема 9]). В настоящей статье мы концентрируем наше внимание на этом выделенном янгиане. Для остальных классических алгебр Ли $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}(2n+1)$, $\mathfrak{sp}(2n)$, $\mathfrak{o}(2n)$ мы вводим вместо янгиана $Y(\mathfrak{a})$ новую алгебру. Эта новая алгебра является деформацией универсальной обертывающей алгебры некоторой скрученной полиномиальной алгебры токов.

Пусть $\mathfrak{a}$ есть одна из трех классических алгебр Ли. Рассмотрим $\mathfrak{a}$ как инволютивную подалгебру в $\mathfrak{gl}(N)$, где $N = 2n+1, 2n, 2n$, соответственно. Обозначим через σ соответствующую инволюцию $\mathfrak{gl}(N)$. Подалгебра

$$\mathfrak{gl}(N)[x]^\sigma = \{A(x) \in \mathfrak{gl}(N)[x] : \sigma(A(x)) = A(-x)\}$$

в алгебре Ли $\mathfrak{gl}(N)[x]$ называется скрученной полиномиальной алгеброй токов, связанной с симметрической алгеброй Ли $(\mathfrak{gl}(N), \sigma)$; она также является инволютивной подалгеброй в $\mathfrak{gl}(N)[x]$. В настоящей статье мы вводим алгебру $Y(\mathfrak{gl}(N), \sigma)$, которая представляет собой деформацию универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{gl}(N)[x]^\sigma)$. Алгебра $Y(\mathfrak{gl}(N), \sigma)$ является подалгеброй в $Y(\mathfrak{gl}(N))$ и в дальнейшем будет называться “скрученным янгианом”.

Так же как и янгиан $Y(\mathfrak{gl}(N))$, скрученный янгиан $Y(\mathfrak{gl}(N), \sigma)$ содержит универсальную обертывающую алгебру $U(\mathfrak{a})$ как подалгебру и допускает гомоморфизм $Y(\mathfrak{gl}(N), \sigma) \rightarrow U(\mathfrak{a})$, тождественный на $U(\mathfrak{a})$. В противоположность янгиану $Y(\mathfrak{a})$, определенному в [14], скрученный янгиан $Y(\mathfrak{gl}(N), \sigma)$ не имеет естественной структуры алгебры Хопфа. Тем не менее, он является односторонним коидеалом в алгебре Хопфа $Y(\mathfrak{gl}(N))$. Опишем более подробно алгебры $Y(\mathfrak{gl}(N))$ и $Y(\mathfrak{gl}(N), \sigma)$.

Пусть индексы i, j пробегает множество $\{-n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n\}$, если $N = 2n+1$, или $\{-n, \dots, -1, 1, \dots, n\}$, если $N = 2n$. Обозначим через $E_{ij} \in \text{End}(\mathbb{C}^N)$ стандартные матричные единицы. Мы также будем рассматривать их как образующие алгебры $U(\mathfrak{gl}(N))$. Алгебра $Y(\mathfrak{gl}(N))$ порождается элементами $t_{ij}^{(k)}$, где $k = 1, 2, \dots$, и следующими соотношениями. Введем формальный степенной ряд по u^{-1} с коэффициентами в $Y(\mathfrak{gl}(N)) \otimes \text{End}(\mathbb{C}^N)$

$$T(u) = \sum_{i,j} t_{ij}(u) \otimes E_{ij}, \quad t_{ij}(u) = \delta_{ij} + \sum_k t_{ij}^{(k)} u^{-k}.$$

Введем также формальные степенные ряды по u^{-1}, v^{-1} с коэффициентами в $Y(\mathfrak{gl}(N)) \otimes \text{End}(\mathbb{C}^N) \otimes \text{End}(\mathbb{C}^N)$

$$T_1 = \sum_{i,j} t_{ij}(u) \otimes E_{ij} \otimes 1, \quad T_2 = \sum_{i,j} t_{ij}(v) \otimes 1 \otimes E_{ij}$$

и положим

$$R_{12} = 1 \otimes R(u, v), \quad R(u, v) = 1 - (u - v)^{-1} \cdot \sum_{i,j} E_{ij} \otimes E_{ji}.$$

Тогда определяющие соотношения в $Y(\mathfrak{gl}(N))$ могут быть записаны как “тройное соотношение”

$$(1) \quad R_{12} T_1 T_2 = T_2 T_1 R_{12}.$$

Точный смысл соотношения (1) будет детально объяснен в §1.

Вложение $U(\mathfrak{gl}(N)) \hookrightarrow Y(\mathfrak{gl}(N))$ и гомоморфизм $Y(\mathfrak{gl}(N)) \rightarrow U(\mathfrak{gl}(N))$, тождественный на $U(\mathfrak{gl}(N))$, определяются, соответственно, как $E_{ij} \mapsto t_{ij}^{(1)}$ и

$$(2) \quad T(u) \mapsto E(u) = 1 + u^{-1} \cdot \sum_{i,j} E_{ij} \otimes E_{ij}.$$

Таким образом, если обозначить

$$E_1 = 1 + u^{-1} \cdot \sum_{i,j} E_{ij} \otimes E_{ij} \otimes 1, \quad E_2 = 1 + v^{-1} \cdot \sum_{i,j} E_{ij} \otimes 1 \otimes E_{ij},$$

то определяющие соотношения в $U(\mathfrak{gl}(N))$ можно записать в виде:

$$R_{12} E_1 E_2 = E_2 E_1 R_{12}.$$

Оказывается, что определяющие соотношения для образующих $F_{ij} = E_{ij} + \sigma(E_{ij})$ подалгебры $U(\mathfrak{a}) \subset U(\mathfrak{gl}(N))$ записываются аналогичным образом.

Обозначим через t транспонирование в $\text{End}(\mathbb{C}^N)$, соответствующее (симметрической или кососимметрической) форме, которая сохраняется подалгеброй $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{gl}(N)$; тогда $F_{ij} = E_{ij} - E_{ij}^t$ в $\text{End}(\mathbb{C}^N)$. Алгебра $Y(\mathfrak{gl}(N), \sigma)$ порождается элементами $s_{ij}^{(k)}$, где $k = 1, 2, \dots$, и следующими соотношениями. Как и в случае $Y(\mathfrak{gl}(N))$, введем формальный ряд по u^{-1} с коэффициентами в $Y(\mathfrak{gl}(N), \sigma) \otimes \text{End}(\mathbb{C}^N)$

$$S(u) = \sum_{i,j} s_{ij}(u) \otimes E_{ij}, \quad s_{ij}(u) = \delta_{ij} + \sum_k s_{ij}^{(k)} u^{-k}.$$

Введем также формальные степенные ряды по u^{-1} , v^{-1} с коэффициентами в $Y(\mathfrak{gl}(N), \sigma) \otimes \text{End}(\mathbb{C}^N) \otimes \text{End}(\mathbb{C}^N)$

$$S_1 = \sum_{i,j} s_{ij}(u) \otimes E_{ij} \otimes 1, \quad S_2 = \sum_{i,j} s_{ij}(v) \otimes 1 \otimes E_{ij}$$

и положим

$$R'_{12} = 1 \otimes R'(-u, v), \quad R'(u, v) = 1 - (u - v)^{-1} \cdot \sum_{i,j} E_{ij}^t \otimes E_{ji}.$$

Тогда определяющие соотношения в $Y(\mathfrak{gl}(N), \sigma)$ можно записать как “четверное соотношение”

$$(3) \quad R_{12} S_1 R'_{12} S_2 = S_2 R'_{12} S_1 R_{12}$$

вместе с “соотношением симметрии”

$$(4) \quad S(u) - S^t(-u) = \mp \frac{1}{2u} (S(u) - S(-u)),$$

где

$$S^t(u) = \sum_{i,j} s_{ij}(u) \otimes E_{ij}^t.$$

Всякий раз, когда встречаются обозначения $\pm$ или $\mp$, верхний знак отвечает случаю $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}(N)$, в то время как нижний знак соответствует $\mathfrak{a} = \mathfrak{sp}(N)$.

Вложение $U(\mathfrak{a}) \hookrightarrow Y(\mathfrak{gl}(N), \sigma)$ и гомоморфизм $Y(\mathfrak{gl}(N), \sigma) \rightarrow U(\mathfrak{a})$, тождественный на $U(\mathfrak{a})$, определяются, соответственно, как $F_{ij} \mapsto s_{ij}^{(1)}$ и

$$(5) \quad S(u) \mapsto F(u) = 1 + \left(u \pm \frac{1}{2}\right)^{-1} \cdot \sum_{i,j} F_{ij} \otimes E_{ij}.$$

Таким образом, если обозначить

$$F_1 = 1 + \left(u \pm \frac{1}{2}\right)^{-1} \cdot \sum_{i,j} F_{ij} \otimes E_{ij} \otimes 1, \quad F_2 = 1 + \left(v \pm \frac{1}{2}\right)^{-1} \cdot \sum_{i,j} F_{ij} \otimes 1 \otimes E_{ij},$$

тогда определяющие соотношения $U(\mathfrak{a})$ можно записать как

$$\begin{aligned} R_{12} F_1 R'_{12} F_2 &= F_2 R'_{12} F_1 R_{12}, \\ F(u) - F^t(-u) &= \mp \frac{1}{2u} (F(u) - F(-u)), \end{aligned}$$

где

$$F^t(u) = 1 + \left(u \pm \frac{1}{2}\right)^{-1} \sum_{i,j} F_{ij} \otimes E_{ij}^t.$$

Вложение $Y(\mathfrak{gl}(N), \sigma) \hookrightarrow Y(\mathfrak{gl}(N))$ определяется формулой

$$(6) \quad S(u) \mapsto T(u) T^t(-u), \quad \text{где} \quad T^t(u) = \sum_{i,j} t_{ij}(u) \otimes E_{ij}^t.$$

Тройное соотношение (1) имеет богатую историю (см., например, работы Тахтаджяна–Фаддеева [52] и Дринфельда [17]). Оно происходит из квантового уравнения Янга–Бакстера (см. Кулиш–Склянин [29]), а сами янгианы рассматривались первоначально как аппарат для построения новых решений этого уравнения (см. [14]). И наоборот, тройное соотношение (1) использовалось в работе Решетихина–Тахтаджяна–Фаддеева [47] как орудие для изучения квантовых групп.

Четверное соотношение (3) имеет свою собственную историю. Соотношения типа (3) впервые появились в работах Чередника [6] и Склянина [49], связанных с изучением интегрируемых систем с граничными условиями. Различные варианты (3) использовались в работе Решетихина и Семенова–Тян–Шанского [46], посвященной обобщению подхода Решетихина, Тахтаджяна и Фаддеева [47] на случай аффинных алгебр Ли, а также в работе Ноуми [40] по q -аналогам сферических функций на классических симметрических пространствах. Алгебраические структуры, связанные с (3), обсуждались в [31] и в [32]. В этих работах соотношение четверного типа называлось “уравнением отражений”. Связь между соотношениями типа (3) и обобщенными гипергеометрическими функциями была установлена Коорнвиндером и Кузнецовым [25].

С другой стороны, было показано, что янгиан $Y(\mathfrak{gl}(N))$ оказывается полезным орудием в теории конечномерных представлений алгебры Ли $\mathfrak{gl}(N)$. Он порождает канонические образующие центра универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{gl}(N))$, а также множество коммутативных подалгебр в $U(\mathfrak{gl}(N))$ (см. работы Чередника [7]

и Кириллова–Решетихина [24]). Применения алгебры $Y(\mathfrak{gl}(N))$ к построению базиса Гельфанда–Цетлина для неприводимых конечномерных представлений $\mathfrak{gl}(N)$ были рассмотрены в [7] и в работе Назарова–Тарасова [41]. Все эти применения основаны на факте существования гомоморфизма $Y(\mathfrak{gl}(N)) \rightarrow U(\mathfrak{gl}(N))$, тождественного на $U(\mathfrak{gl}(N))$. Мы полагаем, что скрученный янгиан будет играть ту же роль, что и $Y(\mathfrak{gl}(N))$ для других классических алгебр Ли $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}(2n+1)$, $\mathfrak{sp}(2n)$, $\mathfrak{o}(2n)$. Результаты работ Молева [35]–[37], а также результаты Назарова и Ольшанского подтверждают это предположение. В последующих публикациях мы рассмотрим дальнейшее применение скрученных янгианов в теории конечномерных представлений классических алгебр Ли.

Наше определение скрученного янгиана $Y(\mathfrak{gl}(N), \sigma)$ мотивировано работой Ольшанского [42], в которой было построено естественное расширение универсальной оберывающей алгебры $U(\mathfrak{gl}(\infty))$. В этой работе янгиан $Y(\mathfrak{gl}(N))$ возникает следующим образом. Рассмотрим для каждого $m = N + 1, N + 2, \dots$ подалгебру

$$\mathfrak{gl}(N) \oplus \mathfrak{gl}(m - N) \subset \mathfrak{gl}(m)$$

и обозначим через $A_N(m)$ централизатор подалгебры $\mathfrak{gl}(m - N)$ в алгебре $U(\mathfrak{gl}(m))$. В частности, $A_0(m)$ совпадает с центром $Z(\mathfrak{gl}(m))$ алгебры $U(\mathfrak{gl}(m))$. Тогда возникает каноническая цепочка гомоморфизмов

$$A_N(N + 1) \leftarrow A_N(N + 2) \leftarrow \dots \leftarrow A_N(m) \leftarrow \dots$$

В частности, для $N = 0$ мы получаем каноническую цепочку

$$Z(\mathfrak{gl}(1)) \leftarrow Z(\mathfrak{gl}(2)) \leftarrow \dots \leftarrow Z(\mathfrak{gl}(m)) \leftarrow \dots$$

Теорема 2.1.5 из работы [42] устанавливает изоморфизм

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \text{proj } A_N(m) \cong Y(\mathfrak{gl}(N)) \otimes \lim_{m \rightarrow \infty} \text{proj } Z(\mathfrak{gl}(m)).$$

В [43] было показано, что применение аналогичной конструкции к алгебре Ли $\mathfrak{a}$ вместо $\mathfrak{gl}(N)$ приводит к появлению скрученного янгиана $Y(\mathfrak{gl}(N), \sigma)$ вместо $Y(\mathfrak{gl}(N))$.

Систематическое изучение конечномерных представлений янгианов было начато Дринфельдом в [16]. Янгиан $Y(\mathfrak{sl}(2))$ исследовался ранее Тарасовым в [50], [51] (см. также Чари–Прессли [12]). Конечномерные представления янгиана $Y(\mathfrak{a})$ изучались Решетихиным в [45], а в статье Чарии Прессли [13] рассматривались общие янгианы. Однако, выделенный случай янгиана $Y(\mathfrak{gl}(N))$ является наиболее полно изученным; для него в работах Чередника [7] и Дринфельда [15] был установлен аналог классической двойственности Шура–Вейля. Классические формулы Гельфанда–Цетлина для действия алгебры Ли $\mathfrak{gl}(N)$ в ее неприводимых конечномерных представлениях были обобщены на янгиан $Y(\mathfrak{gl}(N))$ в работах Молева [36] и Назарова и Тарасова. Мы убеждены, что конечномерные представления скрученных янгианов также заслуживают тщательного изучения.

В работе Молева [35] рассматривалась теория конечномерных представлений скрученного янгиана $Y(\mathfrak{gl}(N), \sigma)$. В этой работе был получен аналог классификационной теоремы Дринфельда [16] и детально проанализированы случаи $\mathfrak{a} = \mathfrak{sp}(2)$, $\mathfrak{o}(2)$.

В настоящей работе мы подробно изучаем алгебраическую структуру янгиана $Y(\mathfrak{gl}(N))$ и скрученного янгиана $Y(\mathfrak{gl}(N), \sigma)$. Большинство результатов, относящихся к структуре $Y(\mathfrak{gl}(N))$, известны, однако, их обзор в литературе отсутствует. Результаты, касающиеся $Y(\mathfrak{gl}(N), \sigma)$, были приведены в работе [43] без доказательств. Перейдем к описанию содержания данной статьи.

В §1 мы начинаем с определения янгиана $Y(\mathfrak{gl}(N))$ и вводим некоторые полезные автоморфизмы этой алгебры. Главный результат первого параграфа – это аналог теоремы Пуанкаре–Биркгофа–Витта (теорема 1.22). Мы также вводим на алгебре $Y(\mathfrak{gl}(N))$ такую фильтрацию, что соответствующая градуированная алгебра совпадает с универсальной обертывающей алгеброй $U(\mathfrak{gl}(N)[x])$ (см. теорему 1.26).

В §2 мы даем полное описание (теорема 2.13) центра алгебры $Y(\mathfrak{gl}(N))$. Здесь мы используем важное понятие “квантового детерминанта”, взятое у Кулиша и Склянина [30]. Для $N = 2$ квантовый детерминант возник ранее в работе Изергина и Корепина [23]. Рассмотрим формальный ряд по u^{-1} с коэффициентами в $Y(\mathfrak{gl}(N))$

$$(7) \quad \sum_{p \in \mathfrak{S}_N} \text{sgn}(p) t_{p(1),1}(u) t_{p(2),2}(u-1) \dots t_{p(N),N}(u-N+1) = 1 + \sum_k d_k u^{-k},$$

где $\mathfrak{S}_N$ – симметрическая группа. Этот ряд называется квантовым детерминантом $(N \times N)$ -матрицы, образованной элементами $t_{ij}(u)$. Мы доказываем, что коэффициенты $d_1, d_2, \dots$ порождают центр алгебры $Y(\mathfrak{gl}(N))$. Образы элементов $d_1, d_2, \dots, d_N$ при гомоморфизме $Y(\mathfrak{gl}(N)) \rightarrow U(\mathfrak{gl}(N))$, задаваемом (2), совпадают с образующими центра $Z(\mathfrak{gl}(N))$, введенными Капелли [9], [10] и рассмотренными в статьях Картера–Люстига [11] и Хау [21]. Более того, алгебра $Y(\mathfrak{sl}(N))$ может быть определена как факторалгебра $Y(\mathfrak{gl}(N))$ по соотношениям $d_1 = d_2 = \dots = 0$ (следствие 2.18).

В §3 мы приводим два альтернативных описания алгебры $Y(\mathfrak{gl}(N), \sigma)$ и устанавливаем их эквивалентность. Согласно одному из определений $Y(\mathfrak{gl}(N), \sigma)$ есть алгебра с образующими $s_{ij}^{(k)}$ и соотношениями (3), (4). Мы доказываем (теорема 3.5), что отображение (6) расширяется до гомоморфизма алгебр $Y(\mathfrak{gl}(N), \sigma) \rightarrow Y(\mathfrak{gl}(N))$, и что этот гомоморфизм инъективен (теорема 3.8). Таким образом, $Y(\mathfrak{gl}(N), \sigma)$ можно определить как подалгебру в $Y(\mathfrak{gl}(N))$. Более того, эта подалгебра оказывается левым коидеалом в алгебре Хопфа $Y(\mathfrak{gl}(N))$ (см. теорему 4.17). Мы приводим (замечание 3.14) аналог теоремы Пуанкаре–Биркгофа–Витта для алгебры $Y(\mathfrak{gl}(N), \sigma)$. Так же, как и в §1, мы вводим фильтрацию на алгебре $Y(\mathfrak{gl}(N), \sigma)$ такую, что соответствующая градуированная алгебра совпадает с $U(\mathfrak{gl}(N)[x]^\sigma)$ (см. теорему 3.15).

В §4 мы строим образующие $c_1, c_2, \dots$ центра $Y(\mathfrak{gl}(N), \sigma)$, аналогичные $d_1, d_2, \dots \in Y(\mathfrak{gl}(N))$ (см. предложение 4.4, теорему 4.7 и теорему 4.11). Это построение обобщает одну конструкцию Склянина [49]. Затем, используя гомоморфизм $Y(\mathfrak{gl}(N), \sigma) \rightarrow U(\mathfrak{a})$, определенный (5), мы получаем образующие центра алгебры $U(\mathfrak{a})$, которые, по-видимому, являются новыми (см. Хуа и Умеда [22, приложение 2]). Фактор алгебры $Y(\mathfrak{gl}(N), \sigma)$ по соотношениям $c_1 = c_2 = \dots = 0$ представляет собой деформацию универсальной обертывающей алгебры Ли $\mathfrak{sl}(N)[x]^\sigma$ (см. следствие 4.16).

В §5 мы строим образующие $z_1, z_2, \dots$ центра алгебры $Y(\mathfrak{gl}(N))$, отличные от рассмотренных в §2 (см. [38]). Образы этих образующих при гомоморфизме $Y(\mathfrak{gl}(N)) \rightarrow U(\mathfrak{gl}(N))$, определяемом (2), совпадают с элементами центра $Z(\mathfrak{gl}(N))$, найденными Переломовым и Поповым [44]. Мы явно описываем (теорема 5.11) автоморфизм S^2 алгебры $Y(\mathfrak{gl}(N))$, где S обозначает антипод. Это описание также использует элементы

$z_1, z_2, \dots$. Мы приводим формулу, которая связывает эти элементы с $d_1, d_2, \dots$ (теорема 5.7).

В §6 мы строим образующие центра алгебры $Y(\mathfrak{gl}(N), \sigma)$, аналогичные $z_1, z_2, \dots \in Y(\mathfrak{gl}(N))$. Их образы при гомоморфизме $Y(\mathfrak{gl}(N), \sigma) \rightarrow U(\mathfrak{a})$, определяемом (5), опять совпадают с элементами центра $Z(\mathfrak{a})$ из работы [44]. Результаты этого параграфа также позволяют нам переформулировать весьма элегантно условие симметрии (4) (теорема 6.4).

Наконец, в §7 мы возвращаемся к рассмотрению квантового детерминанта (7). В этом параграфе мы приводим квантовый аналог (теорема 7.3) хорошо известного разложения детерминанта блочной матрицы

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det A \cdot \det(D - CA^{-1}B),$$

где блок A предполагается обратимым. Мы также указываем аналог этого разложения для алгебры $Y(\mathfrak{gl}(N), \sigma)$ (см. теорему 7.6).

Необходимо сделать некоторое пояснение, касающееся принятой в статье системы нумерации формул. Формулы каждого раздела нумеруются независимо. При ссылках на эти формулы в последующих разделах, используется тройная нумерация. Например, формула (1) в разделе 3.2 обозначается как (1) в этом разделе, и как (3.2.1) в последующих.

На различных этапах написания этой работы нам помогали обсуждения с И. В. Черепником, В. Г. Дринфельдом, Б. Л. Фейгиным, П. П. Кулишом, Н. Ю. Решетихиным, Е. К. Скляниным и В. О. Тарасовым. Нам приятно выразить всем им нашу благодарность. Мы также благодарны Д. В. Холтби за его любезную помощь в подготовке рукописи.

§1. Янгиан $Y(N)$

В этом параграфе мы фиксируем $N \in \{1, 2, \dots\}$. Янгиан $Y(N)$ задается как ассоциативная алгебра с определяющими соотношениями (1.1.1). Затем мы описываем основной инструмент для работы с $Y(N)$ – R -матричный формализм. Далее мы определяем некоторые автоморфизмы алгебры $Y(N)$, которые будут часто использоваться в дальнейшем. В разделах 1.16–1.19 мы обсуждаем фундаментальную связь между $Y(N)$ и универсальной обертывающей алгеброй алгебры $\mathfrak{gl}(N)$. Затем мы вводим две фильтрации в $Y(N)$ и доказываем основной результат этого параграфа – теорему Пуанкаре–Биркгофа–Витта (теорема 1.22 и следствие 1.23). Мы также показываем, что $Y(N)$ является плоской деформацией универсальной обертывающей алгебры полиномиальной алгебры токов $\mathfrak{gl}(N) \otimes \mathbb{C}[x]$. В заключение мы обсуждаем структуру алгебры Хопфа для $Y(N)$.

1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Янгианом $Y(N) = Y(\mathfrak{gl}(N))$ называется комплексная ассоциативная унитарная алгебра со счетным числом образующих $t_{ij}^{(1)}, t_{ij}^{(2)}, \dots$, где $1 \leq i, j \leq N$, и определяющими соотношениями

$$(1) \quad [t_{ij}^{(M+1)}, t_{kl}^{(L)}] - [t_{ij}^{(M)}, t_{kl}^{(L+1)}] = t_{kj}^{(M)} t_{il}^{(L)} - t_{kj}^{(L)} t_{il}^{(M)},$$

где $M, L = 0, 1, 2, \dots$ и $t_{ij}^{(0)} := \delta_{ij} \cdot 1$.

1.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Система (1.1.1) эквивалентна следующей системе коммутационных соотношений:

$$(1) \quad [t_{ij}^{(M)}, t_{kl}^{(L)}] = \sum_{r=0}^{\min(M,L)-1} (t_{kj}^{(r)} t_{il}^{(M+L-1-r)} - t_{kj}^{(M+L-1-r)} t_{il}^{(r)}),$$

где $M, L = 1, 2, \dots$ и $1 \leq i, j, k, l \leq N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы упростить дальнейшее рассмотрение, обозначим через $\text{Left}(M, L)$ и $\text{Right}(M, L)$, соответственно, левую и правую части (1.1.1). Очевидно, система (1.1.1) эквивалентна следующей системе соотношений:

$$(2) \quad \begin{aligned} \text{Left}(M, L) + \text{Left}(M-1, L+1) + \dots + \text{Left}(0, M+L) \\ = \text{Right}(M, L) + \text{Right}(M-1, L+1) + \dots + \text{Right}(0, M+L), \end{aligned}$$

где $M, L = 0, 1, 2, \dots$. Заметим, что

$$\text{Left}(0, M+L) = [t_{ij}^{(1)}, t_{kl}^{(M+L)}] - [t_{ij}^{(0)}, t_{kl}^{(M+L+1)}] = [t_{ij}^{(1)}, t_{kl}^{(M+L)}],$$

поскольку $t_{ij}^{(0)} = \delta_{ij}$. Таким образом, (2) можно переписать в виде

$$(3) \quad [t_{ij}^{(M+1)}, t_{kl}^{(L)}] = \sum_{r=0}^M \text{Right}(r, M+L-r).$$

Далее, заметим, что

$$(4) \quad \text{Right}(r, s) = -\text{Right}(s, r) \quad \text{для } r, s = 0, 1, \dots,$$

поэтому

$$\sum_{r=L}^M \text{Right}(r, M+L-r) = 0, \quad \text{если } M \geq L,$$

и равенство (3) принимает следующий вид:

$$[t_{ij}^{(M+1)}, t_{kl}^{(L)}] = \sum_{r=0}^{\min(M,L-1)} \text{Right}(r, M+L-r).$$

Теперь, заменяя M на $M-1$, мы получаем соотношение (1).

1.3. Следующие несколько разделов содержат необходимые сведения об R -матричном формализме. В этом формализме рассматриваются многократные тензорные произведения $\mathbb{C}^N \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^N$ и действующие в них операторы. Положим $\mathcal{E} = \mathbb{C}^N$. Для оператора $A \in \text{End } \mathcal{E}$ и числа $m = 1, 2, \dots$ положим

$$(1) \quad A_k := 1^{\otimes(k-1)} \otimes A \otimes 1^{\otimes(m-k)} \in \text{End } \mathcal{E}^{\otimes m}, \quad 1 \leq k \leq m.$$

Если $A \in \text{End } \mathcal{E}^{\otimes 2}$, то для любых k, l таких, что $1 \leq k, l \leq m$ и $k \neq l$, обозначим через A_{kl} оператор на $\mathcal{E}^{\otimes m}$, который действует как A в произведении k -й и l -й копий и как 1 во всех остальных копиях. То есть

$$(2) \quad A = \sum_{r,s,t,u} a_{rstu} E_{rs} \otimes E_{tu}, \quad a_{rstu} \in \mathbb{C} \Rightarrow A_{kl} = \sum_{r,s,t,u} a_{rstu} (E_{rs})_k (E_{tu})_l,$$

где в соответствии с (1)

$$(3) \quad (E_{rs})_k = 1^{\otimes(k-1)} \otimes E_{rs} \otimes 1^{\otimes(m-k)}.$$

1.4. Мы будем обозначать через P оператор перестановки в $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$:

$$(1) \quad P := \sum_{i,j=1}^N E_{ij} \otimes E_{ji}.$$

Положим

$$(2) \quad R(u) := 1 - \frac{P}{u} \in \text{End}(\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}) \otimes \mathbb{C}(u),$$

где u — формальная переменная; этот объект называется *R-матрицей Янга*.

Пусть $m = 2, 3, \dots$, а $u_1, \dots, u_m$ являются формальными переменными. Для $1 \leq k, l \leq m$, $k \neq l$, рассмотрим оператор P_{kl} , который получается из P по общему правилу (1.3.2) и представляет собой перестановку k -го и l -го факторов в $\mathcal{E}^{\otimes m}$. Теперь положим

$$(3) \quad R_{kl}(u_k - u_l) := 1 - \frac{P_{kl}}{u_k - u_l} \in \text{End } \mathcal{E}^{\otimes m} \otimes \mathbb{C}(u_1, \dots, u_m).$$

В случае $m = 2$ мы будем писать $R(u - v)$ вместо $R_{12}(u_1 - u_2)$.

1.5. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для трех попарно различных индексов i, j, k имеет место следующее тождество:

$$(1) \quad R_{ij}(u) R_{ik}(u + v) R_{jk}(v) = R_{jk}(v) R_{ik}(u + v) R_{ij}(u).$$

Это тождество называется *уравнением Янга–Бакстера*. Иногда удобно записывать (1) в слегка измененной форме

$$(2) \quad R_{12}(u_1 - u_2) R_{13}(u_1 - u_3) R_{23}(u_2 - u_3) = R_{23}(u_2 - u_3) R_{13}(u_1 - u_3) R_{12}(u_1 - u_2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно положить $i = 1, j = 2, k = 3$. Используя (1.4.2) и умножая (1) на $uv(u + v)$, мы получаем, после очевидных преобразований,

$$\begin{aligned} P_{12}P_{13}v + P_{12}P_{23}(u + v) + P_{13}P_{23}u - P_{12}P_{13}P_{23} \\ = P_{13}P_{12}v + P_{23}P_{12}(u + v) + P_{23}P_{13}u - P_{23}P_{13}P_{12}. \end{aligned}$$

Поскольку $P_{12}P_{13}P_{23} = P_{23}P_{13}P_{12}$ (это, в сущности, есть тождество в симметрической группе $\mathfrak{S}_3$), необходимо проверить следующие два тождества:

$$\begin{aligned} P_{12}P_{23} + P_{13}P_{23} &= P_{23}P_{12} + P_{23}P_{13}, \\ P_{12}P_{13} + P_{12}P_{23} &= P_{13}P_{12} + P_{23}P_{12}. \end{aligned}$$

Однако, эти тождества действительно справедливы, поскольку

$$P_{12}P_{23} = P_{23}P_{13} = P_{13}P_{12}, \quad P_{13}P_{23} = P_{23}P_{12} = P_{12}P_{13}.$$

1.6. Введем так называемую T -матрицу, которая является формальным матрично-значным производящим рядом для образующих $t_{ij}^{(M)}$ янгиана $Y(N)$. По определенным причинам (см., например, замечание 2.2), удобно работать с рядами по *отрицательным* степеням формальной переменной.

Сперва для любых $i, j = 1, \dots, N$ определим следующий производящий ряд для последовательности $t_{ij}^{(M)}$, $M = 1, 2, \dots$:

$$(1) \quad t_{ij}(u) = \delta_{ij} + t_{ij}^{(1)}u^{-1} + t_{ij}^{(2)}u^{-2} + \dots \in Y(N)[[u^{-1}]].$$

Затем объединим все эти ряды в одну “ T -матрицу”:

$$(2) \quad T(u) := \sum_{i,j=1}^N t_{ij}(u) \otimes E_{ij} \in Y(N)[[u^{-1}]] \otimes \text{End } \mathcal{E}.$$

В более общем виде, для числа $m = 2, 3, \dots$ и формальных переменных $u_1, \dots, u_m$, мы полагаем

$$(3) \quad T_k(u_k) := \sum_{i,j=1}^N t_{ij}(u_k) \otimes (E_{ij})_k \in Y(N)[[u_1^{-1}, \dots, u_m^{-1}]] \otimes \text{End } \mathcal{E}^{\otimes m}$$

для каждого значения $k = 1, \dots, m$. В случае $m = 2$ мы предпочитаем использовать u, v вместо u_1, u_2 .

1.7. Нам часто придется иметь дело одновременно с операторами $R_{kl}(u_k - u_l)$ и $T_k(u_k)$. При этом алгебра $Y(N)[[u_1^{-1}, \dots, u_m^{-1}]]$ должна заменяться подходящим расширением $Y(N)[[u_1^{-1}, \dots, u_m^{-1}]]_{\text{ext}}$, содержащим элементы $(u_k - u_l)^{-1}$. Такое расширение легко построить. Например, запишем

$$(u_k - u_l)^{-1} = -\frac{u_k^{-1}u_l^{-1}}{u_k^{-1} - u_l^{-1}}$$

и затем локализуем $Y(N)[[u_1^{-1}, \dots, u_m^{-1}]]$ по отношению к мультипликативному семейству, порожденному элементами $u_k^{-1} - u_l^{-1}$, $k \neq l$. Эта локализация корректно определена, поскольку алгебра $Y(N)[[u_1^{-1}, \dots, u_m^{-1}]]$ не имеет делителей нуля. Указанное расширение является минимально возможным. Иногда нам будет необходимо большее расширение (см., например, раздел 1.10).

1.8. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Система (1.1.1) определяющих соотношений в $Y(N)$ эквивалентна следующему единственному соотношению на T -матрицу:

$$(1) \quad R(u-v)T_1(u)T_2(v) = T_2(v)T_1(u)R(u-v).$$

В дальнейшем мы будем называть (1) *тройным соотношением*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что в терминах производящего ряда (1.6.1) первоначальная система (1.1.1) может быть переписана следующим образом:

$$(2) \quad [t_{ij}(u), t_{kl}(v)] = \frac{1}{u-v} (t_{kj}(u)t_{il}(v) - t_{kj}(v)t_{il}(u)),$$

где $1 \leq i, j, k, l \leq N$. Действительно, умножив обе части (2) на $u-v$ и сравнив члены, имеющие одинаковые степени по u и v , вернемся к (1.1.1).

С другой стороны, согласно определениям (1.3.1) и (1.4.2), формула (1) имеет вид:

$$(3) \quad \left(1 - \frac{P}{u-v}\right) \sum_{i,j,k,l} t_{ij}(u)t_{kl}(v)(E_{ij} \otimes E_{kl}) = \sum_{i,j,k,l} t_{kl}(v)t_{ij}(u)(E_{ij} \otimes E_{kl}) \left(1 - \frac{P}{u-v}\right).$$

Ее можно переписать как

$$(4) \quad \sum_{i,j,k,l} [t_{ij}(u), t_{kl}(v)](E_{ij} \otimes E_{kl}) = \frac{1}{u-v} \sum_{i,j,k,l} t_{ij}(u)t_{kl}(v)P(E_{ij} \otimes E_{kl}) - \frac{1}{u-v} \sum_{i,j,k,l} t_{kl}(v)t_{ij}(u)(E_{ij} \otimes E_{kl})P.$$

Заметим теперь, что по определению P

$$P(E_{ij} \otimes E_{kl}) = E_{kj} \otimes E_{il}, \quad (E_{ij} \otimes E_{kl})P = E_{il} \otimes E_{kj}.$$

Подставляя эти выражения в (4) и изменя очевидным образом обозначения индексов, мы, наконец, получаем

$$\sum_{i,j,k,l} [t_{ij}(u), t_{kl}(v)](E_{ij} \otimes E_{kl}) = \frac{1}{u-v} \sum_{i,j,k,l} (t_{kj}(u)t_{il}(v) - t_{kj}(v)t_{il}(u))(E_{ij} \otimes E_{kl}),$$

что эквивалентно системе (2).

1.9. ЗАМЕЧАНИЕ. Можно было бы предложить следующую неформальную интерпретацию тождества (1.8.1). Предположим, что образующие $t_{ij}^{(1)}, t_{ij}^{(2)}, \dots$ являются операторами в некотором векторном пространстве W (природа W несущественна; например, можно взять левое регулярное представление алгебры $Y(N)$). Тогда $T(u)$ можно рассматривать как оператор в $W \otimes \mathcal{E}$, зависящий от одного (формального) параметра u , а (1.8.1) – как соотношение в $\text{End } W \otimes \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$.

1.10. ЗАМЕЧАНИЕ. Коммутационные соотношения (1.2.1) также могут быть записаны в следующем виде:

$$(1) \quad [T_1^{(M)}, T_2^{(L)}] = \sum_{r=0}^{\min(M,L)-1} (PT_1^{(r)}T_2^{(M+L-1-r)} - T_2^{(M+L-1-r)}T_1^{(r)}P),$$

где

$$T^{(M)} := \sum_{i,j=1}^N t_{ij}^{(M)} \otimes E_{ij} \in Y(N) \otimes \text{End } \mathcal{E}$$

и $T_1^{(M)}, T_2^{(M)}$ построены в соответствии с общим предписанием (1.3.1).

Покажем, как (1) выводится из тройного соотношения (1.8.1). Сперва запишем (1.8.1) в виде

$$(2) \quad [T_1(u), T_2(v)] = \frac{1}{u-v} (PT_1(u)T_2(v) - T_2(v)T_1(u)P).$$

Затем разложим

$$(3) \quad \frac{1}{u-v} = \frac{u^{-1}}{1-vu^{-1}} = \sum_{s=0}^{\infty} v^s u^{-s-1}$$

и будем рассматривать левую и правую части равенства (2) как элементы расширенной алгебры

$$(4) \quad Y(N)((v^{-1}))[[u^{-1}]] \otimes \text{End}(\mathcal{E} \otimes \mathcal{E})$$

(заметим, что (3) принадлежит этой алгебре). Тогда (2) переписывается как система следующих соотношений для $M, L = 0, 1, 2, \dots$:

$$(5) \quad [T_1^{(M)}, T_2^{(L)}] = \sum_{s=0}^{\infty} (PT_1^{(M-s-1)}T_2^{(L+s)} - T_2^{(L+s)}T_1^{(M-s-1)}P),$$

где $M, L = 0, 1, 2, \dots$. Сумма в правой части (5) в действительности берется по $s = 0, 1, \dots, M-1$, так что s можно заменить переменной $r := M-1-s$. При этом (5) принимает вид

$$(6) \quad [T_1^{(M)}, T_2^{(L)}] = \sum_{r=0}^{M-1} (PT_1^{(r)}T_2^{(M+L-1-r)} - T_2^{(M+L-1-r)}T_1^{(r)}P),$$

который просто является другой формой записи соотношения (1.2.3).

Остается заметить, что для любых r, s сопряжение оператором P превращает $T_1^{(r)}$ в $T_2^{(r)}$, а $T_2^{(s)}$ — в $T_1^{(s)}$, поэтому выражение

$$PT_1^{(r)}T_2^{(s)} - T_2^{(s)}T_1^{(r)}P$$

антисимметрично по (r, s) (ср. (1.2.4)). Это показывает, что суммирование в (6) ведется, в действительности, по $r = 0, 1, \dots, \min(M, L) - 1$.

1.11. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Отображение*

$$(1) \quad \text{sign}: T(u) \mapsto T(-u).$$

является инволютивным антиавтоморфизмом алгебры $Y(N)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО почти тривиально. Необходимо проверить, что

$$(2) \quad R(u-v)T_2(-v)T_1(-u) = T_1(-u)T_2(-v)R(u-v).$$

Это, однако, прямо следует из тройного соотношения (1.8.1), если мы сопрягаем обе его части с помощью R и затем заменяем (u, v) на $(-v, -u)$.

1.12. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Следующие отображения определяют автоморфизмы алгебры $Y(N)$.*

(i) *Сдвиг по u :*

$$(1) \quad \sigma_a: T(u) \mapsto T(u+a), \quad a \in \mathbb{C}.$$

(ii) *Умножение на формальный ряд:*

$$(2) \quad \mu_f: T(u) \mapsto f(u)T(u),$$

где

$$(3) \quad f(u) := 1 + f_1 u^{-1} + f_2 u^{-2} + \dots \in \mathbb{C}[[u^{-1}]]$$

или, более явно,

$$(4) \quad t_{ij}^{(1)} \mapsto t_{ij}^{(1)} + f_1 \delta_{ij}, \quad t_{ij}^{(2)} \mapsto t_{ij}^{(2)} + f_1 t_{ij}^{(1)} + f_2 \delta_{ij}, \quad \text{и т. д.}$$

(iii) *Инверсия:*

$$(5) \quad \text{inv}: T(u) \mapsto T^{-1}(-u).$$

(iv) *Транспонирование:*

$$(6) \quad \bar{t}: T(u) \mapsto T^t(-u),$$

где $t: \text{End } \mathcal{E} \rightarrow \text{End } \mathcal{E}$ есть произвольный антиавтоморфизм алгебры $\text{End } \mathcal{E}$ (например, $E_{ij} \mapsto E_{ji}$) и

$$(7) \quad T^t(u) := \sum t_{ij}(u) \otimes (E_{ij})^t.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала мы проверим, что каждое из отображений (i)–(iv) сохраняет определяющие соотношения (1.8.1) янгиана $Y(N)$.

(i) Доказательство (i) представляется тривиальным, поскольку тройное соотношение явно инвариантно относительно сдвигов параметра u . Имеется, однако, важная деталь, на которую следует обратить внимание: сдвиг (формального) параметра u является корректно определенной операцией в $Y(N)[[u^{-1}]]$. Отметим, что в случае $Y(N)[[u]]$ это утверждение неверно.

(ii) Достаточно умножить обе части тройного соотношения на $f(u)f(v)$.

(iii) Необходимо проверить равенство

$$(8) \quad R(u-v)T_1^{-1}(-u)T_2^{-1}(-v) = T_2^{-1}(-v)T_1^{-1}(-u)R(u-v).$$

Это можно сделать следующим образом. Сначала умножим обе части тройного соотношения на $T_1^{-1}(u)T_2^{-1}(v)$ слева, и на $T_2^{-1}(v)T_1^{-1}(u)$ справа; в результате получим

$$(9) \quad T_1^{-1}(u)T_2^{-1}(v)R(u-v) = R(u-v)T_2^{-1}(v)T_1^{-1}(u).$$

Далее, поменяем местами обе части уравнения (9) и сопряжем их оператором перестановки P ; результатом является

$$(10) \quad R(u-v)T_1^{-1}(v)T_2^{-1}(u) = T_2^{-1}(u)T_1^{-1}(v)R(u-v).$$

И, наконец, замена (u, v) на $(-v, -u)$ превращает (10) в (8).

(iv) Прежде всего, заметим, что любой антиавтоморфизм пространства $\text{End } \mathcal{E}$ может быть записан как композиция “стандартного” транспонирования $E_{ij} \mapsto E_{ji}$ и некоторого внутреннего автоморфизма (т.е. сопряжения обратимым оператором). Это означает, что $P \in \text{End}(\mathcal{E} \otimes \mathcal{E})$ остается инвариантным по отношению к $t \otimes t$, и потому оператор $R(u-v)$ также инвариантен.

Введем частичные транспонирования

$$(11) \quad t_1 := t \otimes 1, \quad t_2 := 1 \otimes t.$$

Наше утверждение эквивалентно равенству

$$(12) \quad R(u-v)T_1^{t_1}(-u)T_2^{t_2}(-v) = T_2^{t_2}(-v)T_1^{t_1}(-u)R(u-v).$$

Мы выведем (12) из тройного соотношения путем следующих преобразований.

Во-первых, применим t_1 к обеим частям тройного соотношения. Легко видеть, что результатом является

$$(13) \quad (R(u-v)T_1(u))^{t_1}T_2(v) = T_2(v)(T_1(u)R(u-v))^{t_1}.$$

Во-вторых, заметим, что $R(u-v)$ и $T_1(u)$ можно считать $(N \times N)$ -матрицами, скажем, A и B , такими, что каждый матричный элемент в A коммутирует с любым из матричных элементов в B . (Фактически, матричные элементы в A являются операторами во второй копии пространства $\mathcal{E}$, тогда как матричные элементы B принадлежат янгиану.) В этом случае мы имеем $(AB)^t = B^t A^t$ и, следовательно, можем написать

$$\begin{aligned} (R(u-v)T_1(u))^{t_1} &= T_1^{t_1}(u)R^{t_1}(u-v), \\ (T_1(u)R(u-v))^{t_1} &= R^{t_1}(u-v)T_1^{t_1}(u). \end{aligned}$$

Подставляя эти формулы в (13), получаем

$$(14) \quad T_1^{t_1}(u)R^{t_1}(u-v)T_2(v) = T_2(v)R^{t_1}(u-v)T_1^{t_1}(u).$$

В-третьих, применяя к (14) транспонирование t_2 и используя инвариантность R -матрицы относительно $t_2 \circ t_1 = t \otimes t$, получаем

$$(15) \quad T_1^{t_1}(u)T_2^{t_2}(v)R(u-v) = R(u-v)T_2^{t_2}(v)T_1^{t_1}(u).$$

Наконец, сопрягая обе части (15) оператором P , а затем меняя их местами и заменяя (u, v) на $(-v, -u)$, мы приходим к (12).

Каждое из отображений (i)–(iv) сохраняет определяющие соотношения янгиана $Y(N)$. Для доказательства предложения 1.12 остается проверить, что все эти отображения обратимы. Для случаев (i), (ii) и (iv) это очевидно. Случай (iii) требует некоторых дополнительных усилий. Мы начинаем с равенства

$$(\text{inv } T(u))T(-u) = 1$$

и, применяя inv к обеим частям, получаем:

$$\begin{aligned} (\text{inv} \circ \text{inv})(T(u)) \text{inv}(T(-u)) &= 1, \\ (\text{inv} \circ \text{inv})(T(u))(T^{-1}(u)) &= 1, \\ (\text{inv} \circ \text{inv})(T(u)) &= T(u), \end{aligned}$$

т.е. $\text{inv} \circ \text{inv} = \text{id}$.

1.13. СЛЕДСТВИЯ ПРЕДЛОЖЕНИЙ 1.11 и 1.12. Отображения

$$\begin{aligned} (1) \quad S &:= \text{inv} \circ \text{sign}: T(u) \mapsto T^{-1}(u), \\ (2) \quad \bar{t} \circ \text{sign} &: T(u) \mapsto T^t(u) \end{aligned}$$

определяют антиавтоморфизмы алгебры $Y(N)$.

1.14. ЗАМЕЧАНИЕ. Заметим, что антиавтоморфизмы inv и sign не коммутируют, так что $S^{-1} = \text{sign} \circ \text{inv} \neq S$, и антиавтоморфизм S не инволютивен! В самом деле,

$$(\text{inv} \circ \text{sign})(t_{ij}^{(M)}) = \text{inv}(t_{ij}^{(M)})(-1)^M.$$

С другой стороны, $\text{inv}(t_{ij}^{(M)})$ является довольно сложным выражением из образующих $t_{kl}^{(L)}$, например,

$$\begin{aligned} \text{inv}(t_{ij}^{(1)}) &= t_{ij}^{(1)}, \\ \text{inv}(t_{ij}^{(2)}) &= -t_{ij}^{(2)} + \sum_{a=1}^N t_{ia}^{(1)} t_{aj}^{(1)}, \\ \text{inv}(t_{ij}^{(3)}) &= t_{ij}^{(3)} - \sum_{a=1}^N (t_{ia}^{(1)} t_{aj}^{(2)} + t_{ia}^{(2)} t_{aj}^{(1)}) + \sum_{a,b=1}^N t_{ia}^{(1)} t_{ab}^{(1)} t_{bj}^{(1)}, \end{aligned}$$

поэтому его поведение относительно антиавтоморфизма, который отображает $t_{kl}^{(L)}$ в $t_{kl}^{(L)}(-1)^L$, описать нелегко. Позднее мы вычислим квадрат отображения S (см. раздел 5.11).

1.15. ЗАМЕЧАНИЕ. В дальнейшем мы будем часто использовать утверждение, которое является естественным обобщением утверждения, использованного при доказательстве предложения 1.12: *если A и B – матрицы с матричными элементами в ассоциативной алгебре, такими, что каждый матричный элемент A коммутирует с любым матричным элементом B , то $(AB)^t = B^t A^t$ для любого антиавтоморфизма t матричной алгебры.*

Теперь нам необходима некоторая подготовка для доказательства важного результата – теоремы 1.22.

1.16. Обозначим через E_{ij} естественный базис алгебры Ли $\mathfrak{gl}(N)$, образованный матричными единицами.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Отображение*

$$(1) \quad \xi: t_{ij}(u) \mapsto \delta_{ij} + E_{ij}u^{-1}$$

определяет гомоморфизм алгебр $\xi: Y(N) \rightarrow U(\mathfrak{gl}(N))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя автоморфизм (1.12.6) янгиана $Y(N)$, получаем, что требуемое свойство отображения ξ эквивалентно гомоморфности отображения

$$\xi': t_{ij}(u) \mapsto \delta_{ji} - E_{ji}u^{-1}.$$

Для доказательства того, что ξ' также определяет гомоморфизм алгебр $\xi': Y(N) \rightarrow U(\mathfrak{gl}(N))$, необходимо проверить выполнение тройного соотношения для

$$(2) \quad T(u) = 1 - u^{-1} \sum_{i,j} E_{ij} \otimes E_{ji}.$$

Однако, благодаря (1.4.1) и (1.4.2), выражение (2) совпадает с $R(u)$. Таким образом, требуемое свойство эквивалентно формуле

$$R_{23}(u-v)R_{12}(u)R_{13}(v) = R_{13}(v)R_{12}(u)R_{23}(u-v),$$

которая, после сопряжения оператором P_{23} , превращается в уравнение Янга–Бакстера (1.5.2), записанное в слегка измененном виде.

1.17. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Отображение $\eta: E_{ij} \mapsto t_{ij}^{(1)}$ определяет вложение алгебры $U(\mathfrak{gl}(N))$ в $Y(N)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из коммутационных соотношений (1.2.1) следует, что η расширяется до гомоморфизма алгебр. Очевидно, что $\xi \circ \eta = \text{id}$, т.е. ядро η тривиально.

1.18. ЗАМЕЧАНИЕ. Обозначим через E матрицу формата $N \times N$, матричными элементами которой являются E_{ij} , т.е.

$$E := \sum_{i,j} E_{ij} \otimes E_{ij} \in \text{End}(\mathcal{E} \otimes \mathcal{E})$$

и положим

$$\mathcal{T}(u) := 1 + Eu^{-1}.$$

Мы можем суммировать предыдущие результаты следующим образом: тот факт, что $\mathcal{T}(u)$ удовлетворяет тройному соотношению, эквивалентен тому, что базисные элементы E_{ij} удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{kj} E_{il} - \delta_{il} E_{kj}.$$

1.19. Нам также будет необходима композиция $\xi \circ \text{inv}: Y(N) \rightarrow U(\mathfrak{gl}(N))$ гомоморфизма ξ и инверсии (1.12.5):

$$\xi \circ \text{inv}: T(u) \mapsto \mathcal{T}(-u)^{-1},$$

которая есть

$$(1) \quad \xi \circ \text{inv}(t_{ij}^{(M)}) = \sum_{a_1, \dots, a_{M-1}=1}^N E_{ia_1} E_{a_1 a_2} \dots E_{a_{M-1} j}.$$

1.20. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Алгебра $Y(N)$ снабжается двумя различными возрастающими фильтрациями, которые задаются присвоением каждой образующей двух различных степеней:

$$\deg_1(t_{ij}^{(M)}) = M \quad \text{и} \quad \deg_2(t_{ij}^{(M)}) = M - 1.$$

Обозначим через $\text{gr}_1 Y(N)$ и $\text{gr}_2 Y(N)$ соответствующие градуированные алгебры.

1.21. СЛЕДСТВИЕ. Алгебра $\text{gr}_1 Y(N)$ коммутативна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это прямо следует из (1.2.1), поскольку степень $\deg_1(\cdot)$ каждого члена в правой части (1.2.1) меньше, чем степень в левой части.

1.22. ТЕОРЕМА. Пусть $\bar{t}_{ij}^{(M)}$ обозначает образ образующей $t_{ij}^{(M)}$ в M -й компоненте алгебры $\text{gr}_1 Y(N)$. Элементы $\bar{t}_{ij}^{(M)}$ алгебраически независимы, т.е. $\text{gr}_1 Y(N)$ является алгеброй полиномов со счетным числом образующих $\bar{t}_{ij}^{(M)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определяющих соотношений (1.1.1) следует, что для любого $N' \geq N$ существует естественный гомоморфизм $\iota: Y(N) \rightarrow Y(N')$. Беря композицию ι и гомоморфизма $\xi \circ \text{inv}: Y(N') \rightarrow U(\mathfrak{gl}(N'))$, мы получаем другой гомоморфизм $\zeta := \xi \circ \text{inv} \circ \iota$,

$$\zeta: Y(N) \rightarrow U(\mathfrak{gl}(N'))$$

такой, что

$$\zeta(t_{ij}^{(M)}) = \sum_{a_1, \dots, a_{M-1}=1}^{N'} E_{ia_1} E_{a_1 a_2} \dots E_{a_{M-1} j}.$$

Этот гомоморфизм переводит фильтрацию в $Y(N)$, заданную при помощи $\deg_1$, в каноническую фильтрацию алгебры $U(\mathfrak{gl}(N'))$. Следовательно, он определяет гомоморфизм градуированных алгебр

$$\bar{\zeta}: \text{gr}_1 Y(N) \rightarrow S(\mathfrak{gl}(N')).$$

Мы будем рассматривать элементы симметрической алгебры $S(\mathfrak{gl}(N'))$ как полиномиальные функции на $\mathfrak{gl}(N')$. Поэтому, образ $\bar{t}_{ij}^{(M)}$ при $\bar{\zeta}$ есть полином $p_{ij}^{(M)}$ такой, что

$$p_{ij}^{(M)}(x) = (x^M)_{ij}, \quad x \in \mathfrak{gl}(N').$$

Теперь достаточно доказать, что для каждого фиксированного положительного целого M' все полиномы $p_{ij}^{(M)}$, $1 \leq i, j \leq N$, $1 \leq M \leq M'$, алгебраически независимы при достаточно большом значении N' .

Для любой тройки индексов (i, j, M) , удовлетворяющей условиям $1 \leq i, j \leq N$, $1 \leq M \leq M'$, можно выбрать подмножество

$$\Omega_{ij}^{(M)} \subset \{N+1, N+2, \dots\}$$

мощности $M-1$ так, чтобы для различных троек эти подмножества не пересекались. Пусть N' будет настолько большим, чтобы все они принадлежали $\{N+1, N+2, \dots, N'\}$. Обозначим через $y_{ij}^{(M)}$ комплексные параметры. Определим в $\mathbb{C}^{N'}$ линейный оператор $x_{ij}^{(M)}$, имеющий следующую зависимость от $y_{ij}^{(M)}$. Пусть $e_1, \dots, e_{N'}$ обозначает канонический базис в $\mathbb{C}^{N'}$, а $a_1 < \dots < a_{M-1}$ — все элементы множества $\Omega_{ij}^{(M)}$. Положим

$$\begin{aligned} x_{ij}^{(M)} : e_j &\mapsto y_{ij}^{(M)} e_{a_{M-1}}, \quad e_{a_{M-1}} \mapsto e_{a_{M-2}}, \dots, e_{a_1} \mapsto e_i, \\ x_{ij}^{(M)} : e_k &\mapsto 0 \quad \text{для } k \notin \{j\} \cup \Omega_{ij}^{(M)} \end{aligned}$$

и

$$(1) \quad x = \sum_{i,j,M} x_{ij}^{(M)}.$$

Тогда, для любой матрицы x вида (1), имеем

$$p_{ij}^{(M)}(x) = y_{ij}^{(M)} + \psi,$$

где ψ — некоторый полином по переменным $y_{kl}^{(L)}$ с $L < M$. Таким образом, полиномы $p_{ij}^{(M)}$ алгебраически независимы, даже при ограничении на аффинное подпространство матриц вида (1). Теорема 1.22 доказана.

1.23. СЛЕДСТВИЕ. Пусть на наборе образующих $t_{ij}^{(M)}$ задан произвольный линейный порядок. Тогда любой элемент алгебры $Y(N)$ записывается единственным образом в виде линейной комбинации упорядоченных мономов.

1.24. ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема 1.22 (или эквивалентное ей утверждение следствия 1.23) представляет собой фундаментальный факт, который может быть назван теоремой Пуанкаре–Биркгофа–Витта для янгиана $Y(N)$.

1.25. ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема 1.22 означает, что $Y(N)$ можно рассматривать как плоскую деформацию алгебры полиномов со счетным числом образующих. Чтобы увидеть это, рассмотрим для каждого $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ алгебру $Y(N, h)$ с образующими $t_{ij}^{(M)}$ и соотношениями, полученными из (1.2.1) умножением правой части на h :

$$(1) \quad [t_{ij}^{(M)}, t_{kl}^{(L)}] = h \cdot \sum_{r=0}^{\min(M, L)-1} (t_{kj}^{(r)} t_{il}^{(M+L-1-r)} - t_{kl}^{(M+L-1-r)} t_{ij}^{(r)}).$$

Все алгебры $Y(N, h)$ изоморфны друг другу; изоморфизм $Y(N, h) \rightarrow Y(N)$ можно определить как $t_{ij}^{(M)} \mapsto t_{ij}^{(M)} h^M$. С другой стороны, в пределе при $h \rightarrow 0$ мы получаем из $Y(N, h)$ алгебру полиномов от элементов $t_{ij}^{(M)}$.

1.26. Теперь обратимся ко второй фильтрации. Рассмотрим *полиномиальную алгебру Ли токов*

$$(1) \quad \mathfrak{gl}(N)[x] := \mathfrak{gl}(N) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[x]$$

и ее универсальную обертывающую алгебру $U(\mathfrak{gl}(N)[x])$. В $\mathfrak{gl}(N)[x]$ имеется естественный базис, образованный элементами $E_{ij} x^{M-1}$, где $1 \leq i, j \leq N$ и $M = 1, 2, \dots$.

ТЕОРЕМА. Алгебра $\mathrm{gr}_2 Y(N)$ изоморфна алгебре $U(\mathfrak{gl}(N)[x])$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Изучим степень $\deg_2(\cdot)$ различных членов в (1.2.1). Степень левой части равна $M + L - 2$. Степень каждого члена правой части равна $M + L - 3$, кроме члена с $r = 0$. Последний записывается как

$$(2) \quad t_{kj}^{(0)} t_{il}^{(M+L-1)} - t_{kl}^{(M+L-1)} t_{ij}^{(0)} = \delta_{kj} t_{il}^{(M+L-1)} - \delta_{il} t_{kj}^{(M+L-1)}$$

и имеет ту же степень $M + L - 2$, что и левая часть. Следовательно, коммутационные соотношения в алгебре $\mathrm{gr}_2 Y(N)$ принимают вид

$$(3) \quad [\tilde{t}_{ij}^{(M)}, \tilde{t}_{kl}^{(L)}] = \delta_{kj} \tilde{t}_{il}^{(M+L-1)} - \delta_{il} \tilde{t}_{kj}^{(M+L-1)},$$

где $\tilde{t}_{ij}^{(M)}$ обозначает образ элемента $t_{ij}^{(M)}$ в $(M-1)$ -й компоненте алгебры $\mathrm{gr}_2 Y(N)$. Теперь заметим, что соотношения (3) суть в точности коммутационные соотношения алгебры $\mathfrak{gl}(N)[x]$ в базисе $\{E_{ij} x^{M-1}\}$. Таким образом, имеется морфизм алгебр $E_{ij} x^{M-1} \mapsto \tilde{t}_{ij}^{(M)}$ из $U(\mathfrak{gl}(N)[x])$ на алгебр $\mathrm{gr}_2 Y(N)$. По теореме 1.22 ядро этого морфизма тривиально.

1.27. ЗАМЕЧАНИЕ (ср. замечание 1.25). Алгебра $Y(N)$ может также рассматриваться как плоская деформация алгебры $U(\mathfrak{gl}(N)[x])$. В самом деле, перенормируем образующие алгебры $Y(N)$, умножая $t_{ij}^{(M)}$ на h^{M-1} (вместо h^M , как это было сделано ранее). Это приводит к следующей модификации соотношений (1.2.1): числовой множитель h появится при всех членах в правой части (1.2.1), за исключением члена, соответствующего $r = 0$. Обозначим через $Y_h(N)$ алгебру, определенную этими модифицированными соотношениями. Тогда $Y_1(N) = Y(N)$ и $Y_0(N) = U(\mathfrak{gl}(N)[x])$. Плоскость деформации $\{Y_h(N) : h \in \mathbb{C}\}$ снова обеспечивается теоремой 1.22.

1.28. ТЕОРЕМА. Янгиан $Y(N)$ является алгеброй Хопфа с копроизведением $\Delta: Y(N) \rightarrow Y(N)^{\otimes 2}$, задаваемым формулой

$$\Delta(t_{ij}(u)) := \sum_{a=1}^N t_{ia}(u) \otimes t_{aj}(u),$$

отображением антипода S , заданным формулой (1.13.1) и коединицей $\epsilon: \epsilon(T(u)) := 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы работать с копроизведением Δ , удобнее переписать его действие в терминах T -матрицы. С этой целью мы слегка обобщим обозначения, введенные в разделе 1.6.

Предположим, что мы рассматриваем тензорное произведение m копий алгебры $Y(N)[[u^{-1}]]$ и n копий алгебр $\text{End } \mathcal{E}$. Тогда, для любых чисел k, l таких, что $1 \leq k \leq m$ и $1 \leq l \leq n$, положим

$$T_{[k]l}(u) := \sum_{i,j=1}^N (1^{\otimes k-1} \otimes t_{ij}(u) \otimes 1^{\otimes m-k}) \otimes (1^{\otimes l-1} \otimes E_{ij} \otimes 1^{\otimes n-l})$$

$$\in Y(N)[[u^{-1}]]^{\otimes m} \otimes (\text{End } \mathcal{E})^{\otimes n}.$$

Используя неформальный язык замечания 1.9, можно было бы сказать, что $T_{[k]l}(u)$ является оператором в $W^{\otimes m} \otimes \mathcal{E}^{\otimes n}$, который действует как $T(u)$ в произведении k -й копии пространства W и l -й копии пространства $\mathcal{E}$ и как 1 во всех остальных копиях этих пространств.

В случае $m = 1$ мы предпочитаем использовать краткое обозначение $T_l(u) := T_{[1]l}(u)$, в соответствии с нашим обычным соглашением, а в случае $n = 1$ мы используем $T_{[k]}(u) := T_{[k]1}(u)$. Теперь мы можем записать определение Δ в виде

$$\Delta(T(u)) := T_{[1]}(u)T_{[2]}(u),$$

который является наиболее удобным для наших целей.

Проверим выполнение “основной” аксиомы о совместности произведения и копроизведения, которая означает, что Δ есть гомоморфизм алгебры $Y(N)$ в $Y(N) \otimes Y(N)$ или, по определению янгиана, что $\Delta(T(u))$ удовлетворяет тройному соотношению (1.8.1):

$$(1) \quad R_{12}(u-v)T_{[1]1}(u)T_{[2]1}(u)T_{[1]2}(v)T_{[2]2}(v)$$

$$= T_{[1]2}(v)T_{[2]2}(v)T_{[1]1}(u)T_{[2]1}(u)R_{12}(u-v).$$

Ключевое наблюдение состоит в том, что $T_{[2]1}(u)$ и $T_{[1]2}(v)$, также как и $T_{[1]1}(u)$ и $T_{[2]2}(v)$, коммутируют. Используя этот факт, мы преобразуем левую часть (1) в правую следующим образом. Сначала мы переставим коммутирующие T -матрицы $T_{[2]1}(u)$ и $T_{[1]2}(v)$. Затем, используя тройное соотношение

$$R_{12}(u-v)T_{[1]1}(u)T_{[1]2}(v) = T_{[1]2}(v)T_{[1]1}(u)R_{12}(u-v),$$

поменяем $T_{[1]1}(u)$ и $T_{[1]2}(v)$, потом, вновь с помощью тройного соотношения, $-T_{[2]1}(u)$ с $T_{[2]2}(v)$, и, наконец, переставим коммутирующие T -матрицы $T_{[1]1}(u)$ и $T_{[2]2}(v)$. Результат этих преобразований совпадает с правой частью (1).

Остальные аксиомы непосредственно следуют из определений Δ , S и ϵ .

1.29. ЗАМЕЧАНИЕ. Легко проверяется, что $Y(N)$ есть деформация универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{gl}(N)[x])$ не только как алгебры (замечание 1.27), но также как алгебры Хопфа.

1.30. ЗАМЕЧАНИЕ. Копроизведение Δ не кокоммутативно.

1.31. КОММЕНТАРИИ. Основная информация о структуре (общих) янгианов содержится в работах Дринфельда [14], [16], [17].

По поводу R -матричного формализма мы отсылаем читателя к работам Кулиша, Решетихина, Склянина, Тахтаджяна и Фаддеева.

Тот факт, что коммутационные соотношения алгебры $\mathfrak{gl}(N)$ можно записать в R -матричной форме, показывает, что $Y(N)$ является естественной надстройкой над $U(\mathfrak{gl}(N))$. Существование проекции $Y(N) \rightarrow U(\mathfrak{gl}(N))$ порождает связь между янгианами и обычной теорией представлений (по поводу некоторых применений см. работы Чередника [8] и Назарова–Тарасова [41]).

Еще до появления янгианов идея объединения образующих классической алгебры Ли в матрицу была использована в работе Переломова и Попова [44] и в работах Брэкена [2] и Грина [20] о так называемых характеристических тождествах.

Теорема Пуанкаре–Биркгофа–Витта (ПБВ) для общих янгианов принадлежит Дринфельду. Он сообщил одному из авторов, что вывел ее из ПБВ для квантованных алгебр петель. Другое доказательство ПБВ было недавно дано в заметке Левендорского [33]. Наше доказательство ПБВ, приведенное в разделе 1.22, следует подходу работы Ольшанского [42] (см. там лемму 2.1.11).

Один из результатов Дринфельда (см. [14, теорема 2]) показывает, что янгианы могут быть охарактеризованы как канонические деформации алгебр Ли токов. Слово “канонический” здесь означает “удовлетворяющий некоторым естественным условиям”.

Копроизведение Δ , отображение антипода S и автоморфизм сдвига играют главную роль в построении конечномерных представлений алгебры $Y(N)$.

§ 2. Квантовый детерминант $\text{qdet } T(u)$ и центр алгебры $Y(N)$

В этом параграфе мы вводим квантовый детерминант матрицы $T(u)$, который представляет собой формальный ряд по u^{-1} с коэффициентами в янгиане $Y(N)$. Мы показываем, что все эти коэффициенты принадлежат центру янгиана $Y(N)$, являются алгебраически независимыми и порождают весь центр. Мы также вводим янгиан алгебры Ли $\mathfrak{sl}(N)$ и показываем, что алгебра $Y(N)$ изоморфна тензорному произведению ее центра и янгиана для $\mathfrak{sl}(N)$. Мы сохраним обозначения первого параграфа.

2.1. Обозначим $u_1, \dots, u_m$ формальные переменные. Положим

$$(1) \quad R(u_1, \dots, u_m) := (R_{m-1,m})(R_{m-2,m}R_{m-2,m-1}) \cdots (R_{1m} \cdots R_{12}),$$

где использовано краткое обозначение $R_{ij} := R_{ij}(u_i - u_j)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Имеет место следующее основное тождество:*

$$(2) \quad R(u_1, \dots, u_m)T_1(u_1) \cdots T_m(u_m) = T_m(u_m) \cdots T_1(u_1)R(u_1, \dots, u_m).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы упростить обозначения, положим $T_i := T_i(u_i)$. Сначала проверим тождество

$$(3) \quad (R_{1m} \cdots R_{12})T_1(T_2 \cdots T_m) = (T_2 \cdots T_m)T_1(R_{1m} \cdots R_{12}).$$

Действительно, левая часть (3) равняется

$$\begin{aligned} (R_{1m} \cdots R_{12})T_1(T_2 \cdots T_m) &= R_{1m} \cdots R_{13}(R_{12}T_1T_2)T_3 \cdots T_m \\ &= R_{1m} \cdots R_{13}(T_2T_1R_{12})T_3 \cdots T_m \\ &= T_2(R_{1m} \cdots R_{13})T_1(T_3 \cdots T_m)R_{12}. \end{aligned}$$

Здесь переход от первой ко второй строке основан на тройном соотношении, а последнее преобразование оправдано тем, что матрицы R_{ij} и T_k с несовпадающими индексами перестановочны. Повторяя ту же процедуру, мы можем переставить T_1 и $T_3, \dots, T_m$. Отсюда следует (3).

Далее, заметим, что

$$(4) \quad R(u_1, \dots, u_m) = R(u_2, \dots, u_m)(R_{1m} \cdots R_{12}).$$

Используя этот факт и тождество (3), мы можем переставить T_1 и $(T_2 \cdots T_m)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} R(u_1, \dots, u_m)T_1T_2 \cdots T_m &= R(u_2, \dots, u_m)(R_{1m} \cdots R_{12})T_1T_2 \cdots T_m \\ &= R(u_2, \dots, u_m)(T_2 \cdots T_m)T_1(R_{1m} \cdots R_{12}). \end{aligned}$$

Аналогично мы переставляем T_2 и $(T_3 \cdots T_m)$ и т. д. В конце концов мы приходим к правой части (2).

2.2. ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть u и v – формальные переменные, а $c \in \mathbb{C}$ – константа. В противоположность случаю алгебры $Y(N)[[u, v]]$, в алгебре $Y(N)[[u^{-1}, v^{-1}]]$ допустима специализация $v = u - c$. Этот факт означает существование естественного гомоморфизма алгебр

$$(1) \quad Y(N)[[u^{-1}, v^{-1}]] \rightarrow Y(N)[[u^{-1}]]$$

такого, что

$$\sum_{k,l=0}^{\infty} a_{kl}u^{-k}v^{-l} \mapsto \sum_{k,l=0}^{\infty} a_{kl}u^{-k}(u-c)^{-l} = \sum_{k,l=0}^{\infty} a_{kl}u^{-k-l} \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} c^r u^{-r} \right).$$

Отметим также, что эта специализация, при условии $c \neq 0$, совместима с локализацией относительно $u^{-1} - v^{-1}$. Это замечание позволит нам использовать основное тождество (2.1.2), когда $u_1, \dots, u_m$ не являются независимыми, а связаны некоторыми соотношениями.

2.3. Пусть $\mathfrak{S}_m$ обозначает симметрическую группу, реализованную как группа перестановок множества $\{1, \dots, m\}$, и пусть также

$$(1) \quad a_m = \sum_{p \in \mathfrak{S}_m} \text{sgn}(p) \cdot p \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_m]$$

обозначает антисимметризатор в групповом кольце. Рассмотрим естественное действие группы $\mathfrak{S}_m$ в тензорном пространстве $\mathcal{E}^{\otimes m}$ и обозначим через A_m образ нормированного антисимметризатора $(m!)^{-1}a_m$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если $u_i - u_{i+1} = 1$ для $i = 1, \dots, m-1$, то

$$(2) \quad R(u_1, \dots, u_m) = m! A_m.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p_{ij} \in \mathfrak{S}_m$ есть перестановка (i, j) . Тогда, в обозначениях предложения 2.1,

$$R_{ij} = \text{образ элемента } 1 - \frac{p_{ij}}{u_i - u_j}.$$

Таким образом, (2) выполняется в силу следующей “мультипликативной формулы” для антисимметризатора $a_m \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_m]$:

$$(3) \quad a_m = \prod_{k=1}^{m-1} \leftarrow \prod_{l=k+1}^m \left(1 - \frac{p_{kl}}{l-k} \right).$$

Здесь и ниже символ $\prod \leftarrow$ означает, что сомножители произведения записываются справа налево.

Обозначим правую часть (3) через b_m , и докажем равенство $a_m = b_m$ индукцией по m . Для $m = 2$ оно очевидно:

$$b_2 = 1 - \frac{p_{12}}{2-1} = 1 - p_{12} = a_2.$$

Полагая $m > 2$ и $a_{m-1} = b_{m-1}$, проверим, что $a_m = b_m$.

Пусть $\mathfrak{S}_{m-1}$ отождествляется со стабилизатором m в $\mathfrak{S}_m$; таким образом, $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_{m-1}]$ содержится в $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_m]$. Заметим, что

$$(4) \quad a_m = (1 - p_{1m} - \dots - p_{m-1,m}) a_{m-1}.$$

С другой стороны, в двойном произведении (3) все сомножители с $l = m$ могут быть передвинуты налево, т.е. мы получаем

$$(5) \quad b_m = \left\{ \prod_{k=1}^{m-1} \left(1 - \frac{p_{km}}{m-k} \right) \right\} b_{m-1} = \left\{ \prod_{k=1}^{m-1} \left(1 - \frac{p_{km}}{m-k} \right) \right\} a_{m-1} 1,$$

где было использовано предположение $a_{m-1} = b_{m-1}$.

Теперь мы последовательно раскроем скобки в правой части (5). Сначала сделаем это в сомножителе с $k = 1$, который является крайним справа:

$$(6) \quad b_m = \left\{ \prod_{k=2}^{m-1} \left(1 - \frac{p_{km}}{m-k} \right) \right\} a_{m-1} - \frac{1}{m-1} \left\{ \prod_{k=2}^{m-1} \left(1 - \frac{p_{km}}{m-k} \right) \right\} p_{1m} a_{m-1}.$$

Однако, $p_{km} p_{1m} = p_{1m} p_{k1}$ для $k = 2, \dots, m-1$, так что

$$(7) \quad \frac{1}{m-1} \left\{ \prod_{k=2}^{m-1} \left(1 - \frac{p_{km}}{m-k} \right) \right\} p_{1m} = \frac{p_{1m}}{m-1} \left(1 - \frac{p_{m-1,1}}{1} \right) \dots \left(1 - \frac{p_{21}}{m-2} \right) a_{m-1}.$$

Поскольку $p_{k1}a_{m-1} = -a_{m-1}$ для $k = 2, \dots, m-1$, правая часть (7) равняется

$$\frac{p_{1m}}{m-1} \left(1 + \frac{1}{1}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{m-2}\right) a_{m-1} = \frac{p_{1m}}{m-1} \frac{2}{1} \frac{3}{2} \cdots \frac{m-1}{m-2} a_{m-1} = p_{1m} a_{m-1}.$$

Подставляя это в (6), получаем (ср. (5))

$$(8) \quad b_m = \left\{ \prod_{k=2}^{m-1} \left(1 - \frac{p_{km}}{m-k}\right) \right\} a_{m-1} - p_{1m} a_{m-1}.$$

Затем мы раскрываем скобки в сомножителе $k = 2$, повторяем те же преобразования и т. д. В конце концов мы приходим к последнему сомножителю $(1 - p_{m-1,m}/1)$, который не нужно преобразовывать, и получаем

$$(9) \quad b_m = (1 - p_{m-1,m} - \dots - p_{1m}) a_{m-1}.$$

Сравнивая (9) и (4), заключаем, что $a_m = b_m$.

2.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Имеет место следующее тождество:*

$$(1) \quad A_N T_1(u) \cdots T_N(u - N + 1) = T_N(u - N + 1) \cdots T_1(u) A_N.$$

Более того, имеем

$$(2) \quad A_N T_1(u) \cdots T_N(u - N + 1) A_N = (1),$$

$$(3) \quad A_N T_N(u - N + 1) \cdots T_1(u) A_N = (1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя предложения 2.1 и 2.3 к $m = N$, получаем (1). Чтобы доказать (2), умножим обе части (1) на A_N справа. При этом правая часть (1) не изменится, поскольку $A_N^2 = A_N$, а левая превратится в левую часть (2). Аналогично, чтобы доказать (3), достаточно умножить (1) на A_N слева.

2.5. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Существует формальный ряд*

$$(1) \quad \text{qdet } T(u) := 1 + d_1 u^{-1} + d_2 u^{-2} + \cdots \in Y(N)[[u^{-1}]]$$

такой, что (2.4.1) равно $\text{qdet } T(u) A_N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что A_N является одномерным проектором: он проектирует $\mathcal{E}^{\otimes N}$ на $\mathbb{C}\xi$, где

$$(2) \quad \xi := \sum_{p \in \mathfrak{S}_N} \text{sgn}(p) e_{p(1)} \otimes \cdots \otimes e_{p(N)}$$

и $e_1, \dots, e_N$ есть канонический базис в $\mathbb{C}^N$. Таким образом, (2.4.1) равняется A_N , умноженному на формальный ряд по u^{-1} с коэффициентами в $Y(N)$. Остается проверить, что этот ряд начинается с 1, а это следует из того, что каждый из рядов $T_i(u - i + 1)$, $i = 1, \dots, N$, начинается с 1.

2.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. $\text{qdet } T(u)$ называется *квантовым детерминантом* матрицы $T(u)$.

2.7. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Имеют место следующие равенства:*

$$\begin{aligned} (1) \quad \text{qdet } T(u) &= \sum_{p \in \mathfrak{S}_N} \text{sgn}(p) t_{p(1),1}(u) \cdots t_{p(N),N}(u - N + 1) \\ (2) \quad &= \sum_{p \in \mathfrak{S}_N} \text{sgn}(p) t_{1,p(1)}(u - N + 1) \cdots t_{N,p(N)}(u). \end{aligned}$$

Например, если $N = 1$, то $\text{qdet } T(u) = t_{11}(u)$; если $N = 2$, то

$$\begin{aligned} (3) \quad \text{qdet } T(u) &= t_{11}(u)t_{22}(u - 1) - t_{21}(u)t_{12}(u - 1) \\ &= t_{11}(u - 1)t_{22}(u) - t_{12}(u - 1)t_{21}(u). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы доказать (1), мы отправляемся от тождества

$$(4) \quad \text{qdet } T(u) A_N = A_N T_1(u) \cdots T_N(u - N + 1).$$

Применим обе части (4) к вектору $e_1 \otimes \cdots \otimes e_N$. Тогда слева будет

$$(5) \quad \text{qdet } T(u) A_N (e_1 \otimes \cdots \otimes e_N) = (N!)^{-1} \text{qdet } T(u) \xi,$$

а справа мы получим

$$\begin{aligned} (6) \quad & A_N \sum_{i_1, \dots, i_N, j_1, \dots, j_N=1}^N t_{i_1 j_1}(u) \cdots t_{i_N j_N}(u - N + 1) (E_{i_1 j_1} \otimes \cdots \otimes E_{i_N j_N}) (e_1 \otimes \cdots \otimes e_N) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_N=1}^N t_{i_1,1}(u) \cdots t_{i_N,N}(u - N + 1) A_N (e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_N}). \end{aligned}$$

Если индексы $i_1, \dots, i_N$ попарно различны, то вектор $A_N(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_N})$ равен $(N!)^{-1} \text{sgn}((i_1, \dots, i_N)) \xi$; в противном случае он равен 0. Таким образом, (6) равняется $(N!)^{-1} c \xi$, где c обозначает правую часть (1). Следовательно, $\text{qdet } T(u) \xi = c \xi$, и (1) доказано.

Для доказательства (2) рассмотрим тождество

$$(7) \quad \text{qdet } T(u) A_N = T_N(u - N + 1) \cdots T_1(u) A_N$$

и применим обе его части к ξ . Поскольку $A_N \xi = \xi$, мы получаем

$$(8) \quad \text{qdet } T(u) \xi = T_N(u - N + 1) \cdots T_1(u) \xi.$$

Правую часть (8) можно разложить по каноническому базису в $\mathcal{E}^{\otimes N}$. Аналогичное вычисление показывает, что $e_1 \otimes \cdots \otimes e_N$ входит в это разложение с коэффициентом, равным правой части (2). Доказательство завершено.

2.8. ЗАМЕЧАНИЕ. Выбирая в вышеприведенном доказательстве $e_{q(1)} \otimes \cdots \otimes e_{q(N)}$, $q \in \mathfrak{S}_N$, вместо $e_1 \otimes \cdots \otimes e_N$ можно было бы получить два других выражения для $\text{qdet } T(u)$, именно

$$(1) \quad \begin{aligned} \text{qdet } T(u) &= \text{sgn}(q) \sum_{p \in \mathfrak{S}_N} \text{sgn}(p) t_{p(1), q(1)}(u) \cdots t_{p(N), q(N)}(u - N + 1) \\ &= \text{sgn}(q) \sum_{p \in \mathfrak{S}_N} \text{sgn}(p) t_{q(1), p(1)}(u - N + 1) \cdots t_{q(N), p(N)}(u). \end{aligned}$$

2.9. ЗАМЕЧАНИЕ. Обозначим через $X(u) = (x_{ij}(u))_{i,j=1}^N$ произвольную матрицу, матричные элементы которой являются формальными степенными рядами по u^{-1} с коэффициентами из $Y(N)$. Тогда *квантовый детерминант* матрицы $X(u)$ можно определить следующим образом (см. (2.7.1)):

$$(1) \quad \text{qdet } X(u) = \sum_{p \in \mathfrak{S}_N} \text{sgn}(p) x_{p(1), 1}(u) \cdots x_{p(N), N}(u - N + 1).$$

Чтобы избежать двусмысленности, мы будем иногда заключать матрицу $X(u)$ в скобки. Например, если $N \geq 2$, то ряд

$$\text{qdet } T(-u) = 1 + d_1(-u)^{-1} + d_2(-u)^{-2} + \cdots$$

(см. (2.5.1)) не совпадает с квантовым детерминантом $\text{qdet}(T(-u))$ матрицы $X(u) = T(-u)$.

2.10. ТЕОРЕМА. $\text{qdet } T(u)$ *лежит в центре* $Y(N)$, т.е. все его коэффициенты являются *центральными элементами*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вспомогательное тензорное пространство $\mathcal{E}^{\otimes(N+1)}$, в котором копии пространства $\mathcal{E}$ нумеруются индексами $0, \dots, N$, и рассмотрим $N + 1$ оператор

$$(1) \quad T_0 := T_0(v), \quad T_1 := T_1(u), \quad \dots, \quad T_N := T_N(u - N + 1).$$

Мы докажем тождество

$$(2) \quad T_0(v) \text{qdet } T(u) A_N = \text{qdet } T(u) T_0(v) A_N,$$

где $\text{qdet } T(u)$ построен из $T_1, \dots, T_N$, как и выше, а A_N соответствует антисимметризации индексов $1, \dots, N$. Легко видеть, что из (2) следует теорема. Мы выведем (2) из основного тождества (2.1.2) в несколько шагов.

Шаг 1. Применяя (2.1.2) к операторам (1), получаем

$$(3) \quad \begin{aligned} R(v, u, u - 1, \dots, u - N + 1) T_0 T_1 \cdots T_N \\ = T_N \cdots T_1 T_0 R(v, u, u - 1, \dots, u - N + 1). \end{aligned}$$

Поскольку

$$R(v, u, u - 1, \dots, u - N + 1) = R(u, u - 1, \dots, u - N + 1) \prod_{i=1}^N \leftarrow R_{0i} = N! A_N \prod_{i=1}^N \leftarrow R_{0i},$$

равенство (3) можно записать следующим образом:

$$(4) \quad A_N \left(\prod_{i=1}^N \leftarrow R_{0i} \right) T_0 T_1 \cdots T_N = T_N \cdots T_1 T_0 A_N \left(\prod_{i=1}^N \leftarrow R_{0i} \right).$$

Шаг 2. Докажем, что

$$(5) \quad A_N R_{0N} \cdots R_{01} = R_{01} \cdots R_{0N} A_N.$$

Для этого перепишем (5) как

$$(6) \quad A_N R_{01}^{-1} \cdots R_{0N}^{-1} = R_{0N}^{-1} \cdots R_{01}^{-1} A_N$$

и заметим, что структура этой формулы аналогична структуре равенства (2.4.1).

Теперь, возвращаясь к доказательству (2.4.1), мы видим, что оно полностью основано на тождестве

$$R_{ij} T_i T_j = T_j T_i R_{ij}.$$

Однако, то же самое тождество имеет место, когда T_i, T_j заменяются на R_{0i}^{-1}, R_{0j}^{-1} , соответственно. Действительно,

$$R_{ij} R_{0i}^{-1} R_{0j}^{-1} = R_{0j}^{-1} R_{0i}^{-1} R_{ij}$$

просто эквивалентно уравнению Янга–Бакстера (см. (1.5.1))

$$R_{0i} R_{0j} R_{ij} = R_{ij} R_{0j} R_{0i}.$$

Таким образом, доказательство равенства (2.4.1) работает также и для (6).

Шаг 3. Используя (5), мы преобразуем левую часть (4) следующим образом:

$$\begin{aligned} & A_N (R_{0N} \cdots R_{01}) T_0 T_1 \cdots T_N \\ &= A_N^2 (R_{0N} \cdots R_{01}) T_0 T_1 \cdots T_N \\ &= A_N (R_{01} \cdots R_{0N}) A_N T_0 T_1 \cdots T_N \quad \text{в силу (5)} \\ &= A_N (R_{01} \cdots R_{0N}) A_N^2 T_0 T_1 \cdots T_N. \end{aligned}$$

Поскольку T_0 и A_N коммутируют, последнее выражение равняется

$$A_N (R_{01} \cdots R_{0N}) A_N T_0 A_N T_1 \cdots T_N = A_N (R_{01} \cdots R_{0N}) A_N T_0 \operatorname{qdet} T(u) A_N.$$

Выполняя аналогичные преобразования в правой части (4), мы приходим к следующему тождеству:

$$(7) \quad \begin{aligned} A_N (R_{01} \cdots R_{0N}) A_N T_0(v) \operatorname{qdet} T(u) A_N \\ = \operatorname{qdet} T(u) A_N T_0(v) A_N (R_{01} \cdots R_{0N}) A_N. \end{aligned}$$

Шаг 4. Докажем тождество

$$(8) \quad A_N (R_{01} \cdots R_{0N}) A_N = f(u, v) A_N,$$

где $f(u, v)$ есть *ненулевой* элемент подходящего расширения поля $\mathbb{C}$, содержащего

$$(v - u_i)^{-1} = (v - u + i - 1)^{-1}, \quad \text{где } i = 1, \dots, N.$$

В самом деле, запишем $\mathcal{E}^{\otimes(N+1)}$ как $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}^{\otimes N}$ и вспомним, что A_N является одномерным проектором в $\mathcal{E}^{\otimes N}$. Отсюда следует, что левая часть (8) может быть записана как $X \otimes A_N$, где X — оператор в $\mathcal{E}$ (точнее, элемент пространства $\text{End } \mathcal{E}$, помноженного на наше расширение поля $\mathbb{C}$).

С другой стороны, картина в целом явно инвариантна относительно действия группы $\text{Aut } \mathcal{E} = \text{GL}(N, \mathbb{C})$. Следовательно, X является скалярным оператором, т.е. $X = f(u, v) \cdot 1$.

Остается проверить, что $f(u, v) \neq 0$. Для этого в качестве вышеупомянутого расширения возьмем алгебру $\mathbb{C}[u][[v^{-1}]]$ и заметим, что

$$\begin{aligned} R_{0i} &= 1 - \frac{P_{0i}}{v - u + i - 1} \\ &= 1 - P_{0i}v^{-1}(1 + (u - i + 1)v^{-1} + (u - i + 1)^2v^{-2} + \dots). \end{aligned}$$

Последнее означает, что $f(u, v)$, как степенной ряд по v^{-1} с коэффициентами в $\mathbb{C}[u]$, начинается с 1. Таким образом, $f(u, v) \neq 0$.

Шаг 5. Теперь, в силу (8), тождество (7) принимает вид

$$T_0(v) \text{ qdet } T(u) A_N = \text{ qdet } T(u) T_0(v) A_N$$

и, очевидно, означает, что $\text{ qdet } T(u)$ является центральным.

2.11. ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема 2.10 может быть применена для (хорошо известного) описания центра универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{gl}(N))$. Для этого необходимо использовать гомоморфизм ξ (см. (1.16.1)). Легко видеть, что

$$\begin{aligned} (1) \quad & u(u-1) \cdots (u-N+1) \xi(\text{ qdet } T(u)) \\ &= \det \begin{pmatrix} E_{11} + u & E_{12} & \dots & E_{1N} \\ E_{21} & E_{22} + u - 1 & \dots & E_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ E_{N1} & E_{N2} & \dots & E_{NN} + u - N + 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где “детерминант” $\det A$ некоммутативной матрицы $A = (a_{ij})_{i,j=1}^N$ определен выражением

$$\det A := \sum_{p \in \mathfrak{S}_N} \text{sgn}(p) a_{p(1),1} \cdots a_{p(N),N}.$$

Обозначим через $Q(u)$ правую часть (1). Тогда

$$Q(u) = u^N + z_1 u^{N-1} + \cdots + z_N, \quad z_i \in U(\mathfrak{gl}(N)).$$

Теорема 2.10 означает, что все коэффициенты z_i принадлежат центру алгебры $U(\mathfrak{gl}(N))$. Используя гомоморфизм Хариш-Чандры, можно показать, что элементы $z_1, \dots, z_N$ алгебраически независимы и порождают весь центр алгебры $U(\mathfrak{gl}(N))$ (ср. с теоремой 2.13). Более того, полином $\tilde{Q}(u) = Q(-u + N - 1)$ можно считать “характеристическим полиномом” для матрицы $E = (E_{ij})$ (см. замечание 1.18), для которого имеет место следующий аналог теоремы Гамильтона–Кэли:

$$(2) \quad \tilde{Q}(E) = 0.$$

Ссылки и комментарии по этому поводу содержатся в разделе 2.24.

2.12. Пусть x — формальная переменная. При доказательстве теоремы 2.13 будет использовано следующее вспомогательное утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $\mathfrak{a}$ является алгеброй Ли с тривиальным центром. Тогда центр универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{a}[x])$ также тривиален.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем использовать тот факт, что для любой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ отображение симметризации $S(\mathfrak{g}) \rightarrow U(\mathfrak{g})$ порождает изоморфизм $\mathfrak{g}$ -модулей $U(\mathfrak{g})$ и $S(\mathfrak{g})$. Необходимо доказать, что симметрическая алгебра $S(\mathfrak{a}[x])$, рассматриваемая как присоединенный $\mathfrak{a}[x]$ -модуль, не имеет нетривиальных инвариантных элементов. Обозначим через $\{e_1, \dots, e_n\}$ базис в $\mathfrak{a}$ и напишем

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k e_k,$$

где c_{ij}^k — структурные константы. Тогда мономы вида

$$\prod_{i,r} (e_i x^r) \quad (\text{конечное произведение})$$

образуют базис в $S(\mathfrak{a}[x])$. Пусть $A \in S(\mathfrak{a}[x])$ будет $\mathfrak{a}[x]$ -инвариантным элементом, а m — максимальным целым числом таким, что $e_i x^m$ встречается в A для некоторого $i \in \{1, \dots, n\}$. Тогда A имеет вид

$$A = \sum_d A_d (e_1 x^m)^{d_1} \dots (e_n x^m)^{d_n},$$

где $d = (d_1, \dots, d_n)$, $d_1 \geq 0, \dots, d_n \geq 0$, и A_d есть полином по переменным $e_i x^r$ с $r < m$. По определению элемента A имеет место следующее соотношение:

$$(1) \quad \text{ad}(e_i x)(A) = 0 \quad \text{для } i = 1, \dots, n.$$

Компонента левой части равенства (1), содержащая элементы вида $e_k x^{m+1}$, должна быть равна нулю, т.е.

$$(2) \quad \sum_d A_d \sum_{j=1}^n d_j (e_1 x^m)^{d_1} \dots (e_j x^m)^{d_j-1} \dots (e_n x^m)^{d_n} \sum_{k=1}^n c_{ij}^k e_k x^{m+1} = 0.$$

Беря в этом равенстве коэффициент при $e_k x^{m+1}$, получаем:

$$\sum_d A_d \sum_{j=1}^n d_j c_{ij}^k (e_1 x^m)^{d_1} \dots (e_j x^m)^{d_j-1} \dots (e_n x^m)^{d_n} = 0.$$

Таким образом, для любого мультииндекса $d' = (d'_1, \dots, d'_n)$ с неотрицательными компонентами имеем

$$(3) \quad \sum_{j=1}^n A_{d'+\delta_j} (d'_j + 1) c_{ij}^k = 0, \quad 1 \leq i, k \leq n,$$

где $d' + \delta_j$ обозначает мультииндекс $(d'_1, \dots, d'_j + 1, \dots, d'_n)$. Зафиксируем d' и заметим, что элементы

$$e'_j = (d'_j + 1) e_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

также образуют базис в $\mathfrak{a}$. Поскольку центр алгебры $\mathfrak{a}$ тривиален, система линейных уравнений

$$\left[e_i, \sum_{j=1}^n x_j e'_j \right] = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

на переменные x_j имеет только тривиальное решение. Эту систему можно записать как систему n^2 уравнений

$$\sum_{j=1}^n x_j (d'_j + 1) c_{ij}^k = 0, \quad i, k = 1, \dots, n.$$

Сравнивая ее с (3), мы видим, что $A_{d'+\delta_j} = 0$. Следовательно, $A_d = 0$ для всех $d \neq 0$, что доказывает предложение.

2.13. ТЕОРЕМА. *Коэффициенты $d_1, d_2, \dots$ квантового детерминанта $\text{qdet } T(u)$ алгебраически независимы и порождают весь центр алгебры $Y(N)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ключевая идея состоит в том, чтобы свести утверждение теоремы к аналогичному утверждению для алгебры $\text{gr}_2 Y(N)$. Напомним, что алгебра $\text{gr}_2 Y(N)$ изоморфна $U(\mathfrak{gl}(N)[x])$ (см. теорему 1.26).

Шаг 1. Положим

$$(1) \quad Z := E_{11} + \dots + E_{NN},$$

так что $\mathfrak{gl}(N) = \mathbb{C}Z \oplus \mathfrak{sl}(N)$. Тогда, для любого $M = 1, 2, \dots$ M -й коэффициент d_M квантового детерминанта $\text{qdet } T(u)$ имеет степень $M - 1$ относительно $\deg_2(\cdot)$, и его образ в $(M - 1)$ -й компоненте алгебры $\text{gr}_2 Y(N)$ совпадает с Zx^{M-1} .

Действительно, по формуле (2.7.1) для $\text{qdet } T(u)$, d_M является линейной комбинацией мономов вида

$$(2) \quad t_{p(1),1}^{(M_1)} \dots t_{p(N),N}^{(M_N)}, \quad \text{где } M_1 + \dots + M_N \leq M.$$

Из определения 1.20 градуировки $\deg_2(\cdot)$ ясно, что степень монома (2) строго меньше $M - 1$, за исключением случая, когда для некоторого i имеем $M_j = \delta_{ij} M$, $1 \leq j \leq N$. Предположим, что это как раз такой случай. Тогда, поскольку $t_{kl}^{(0)} = \delta_{kl}$, перестановка p должна быть тривиальной, в противном случае (2) исчезает. Следовательно,

$$(3) \quad d_M = t_{11}^{(M)} + \dots + t_{NN}^{(M)} + (\text{члены степени } < M - 1),$$

что доказывает утверждение, а также означает алгебраическую независимость элементов $d_1, d_2, \dots$.

Шаг 2. Остается доказать, что центр алгебры $U(\mathfrak{gl}(N)[x])$ порождается элементами $Z, Zx, Zx^2, \dots$. Так как

$$U(\mathfrak{gl}(N)[x]) = \mathbb{C}[Z, Zx, Zx^2, \dots] \otimes U(\mathfrak{sl}(N)[x]),$$

это утверждение эквивалентно тривиальности центра алгебры $U(\mathfrak{sl}(N)[x])$, которая следует из предложения 2.12, поскольку центр алгебры Ли $\mathfrak{sl}(N)$ тривиален. Тем самым доказательство теоремы завершено.

2.14. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Рассмотрим подалгебру в $Y(N)$

$$(1) \quad SY(N) := \{y \in Y(N) \mid \mu_f(y) = y \text{ для любого } f\}$$

(см. (1.12.2)). Эта подалгебра называется *янгианом алгебры Ли* $\mathfrak{sl}(N)$.

2.15. Следующее утверждение будет часто использоваться в дальнейшем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $\mathcal{A}$ обозначает произвольную коммутативную ассоциативную алгебру, а u — формальную переменную. Тогда для любого ряда

$$a(u) = 1 + a_1 u^{-1} + a_2 u^{-2} + \dots \in \mathcal{A}[[u^{-1}]]$$

и любого натурального числа N существует единственный ряд

$$\tilde{a}(u) = 1 + \tilde{a}_1 u^{-1} + \tilde{a}_2 u^{-2} + \dots \in \mathcal{A}[[u^{-1}]]$$

такой, что

$$(1) \quad a(u) = \tilde{a}(u)\tilde{a}(u-1)\dots\tilde{a}(u-N+1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем (1) через коэффициенты рядов $a(u)$ и $\tilde{a}(u)$:

$$a_k = N\tilde{a}_k + (\dots), \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $(\dots)$ обозначает некоторый полином по переменным $\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_{k-1}$. Значит, каждый элемент $\tilde{a}_k$ может быть представлен единственным образом как полином по $a_1, \dots, a_k$, что и доказывает предложение.

2.16. Обозначим через $Z(N)$ центр алгебры $Y(N)$. Имеем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Алгебра $Y(N)$ изоморфна тензорному произведению своих подалгебр $Z(N)$ и $SY(N)$:

$$Y(N) = Z(N) \otimes SY(N).$$

В частности, центр алгебры $SY(N)$ тривиален.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим предложение 2.15 к $\mathcal{A} = Z(N)$ и $a(u) = \text{qdet } T(u)$. Соответствующий элемент $\tilde{a}(u)$ будет обозначаться $\tilde{d}(u)$.

Шаг 1. Рассмотрим автоморфизм μ_f (см. (1.12.2)) и докажем, что

$$(1) \quad \mu_f(\tilde{d}(u)) = \tilde{d}(u)f(u).$$

Из предложения 2.7 следует, что

$$(2) \quad \mu_f(\text{qdet } T(u)) = \text{qdet } T(u)f(u)f(u-1)\dots f(u-N+1).$$

С другой стороны, по определению $\tilde{d}(u)$,

$$\mu_f(\text{qdet } T(u)) = \mu_f(\tilde{d}(u))\mu_f(\tilde{d}(u-1))\dots\mu_f(\tilde{d}(u-N+1)).$$

Сравнивая последнее равенство с (2) и применяя предложение 2.15 к $a(u) = \mu_f(\text{qdet } T(u))$, получаем (1).

Шаг 2. Докажем, что

$$(3) \quad Y(N) = Z(N) \text{SY}(N).$$

Положим

$$\tau_{ij}(u) = \tilde{d}(u)^{-1} t_{ij}(u), \quad 1 \leq i, j \leq N.$$

Согласно (1), имеем $\mu_f(\tau_{ij}(u)) = \tau_{ij}(u)$ для любого ряда f . Следовательно, все коэффициенты $\tau_{ij}^{(M)}$ лежат в $\text{SY}(N)$, и (3) следует из разложения $t_{ij}(u) = \tilde{d}(u) \tau_{ij}(u)$.

Шаг 3. Пусть n обозначает минимальное натуральное число такое, что имеется ненулевой полином $P \in \text{SY}(N)[x_1, \dots, x_n]$, для которого $P(\tilde{d}_1, \dots, \tilde{d}_n) = 0$. Положим $f(u) = 1 + au^{-n}$, $a \in \mathbb{C}$. Тогда

$$\mu_f: P(\tilde{d}_1, \dots, \tilde{d}_n) \mapsto P(\tilde{d}_1, \dots, \tilde{d}_{n-1}, \tilde{d}_n + a).$$

Таким образом, $P(\tilde{d}_1, \dots, \tilde{d}_{n-1}, \tilde{d}_n + a) = 0$ для любого $a \in \mathbb{C}$. Значит, полином P не зависит от x_n , что находится в противоречии с выбором n . Предложение доказано.

2.17. СЛЕДСТВИЕ. Элементы $\tau_{ij}^{(M)}$, $1 \leq i, j \leq N$, $M = 1, 2, \dots$, введенные при доказательстве предложения 2.16, являются образующими алгебры $\text{SY}(N)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из доказательства предложения 2.16 следует, что любой элемент $y \in Y(N)$ может быть записан единственным образом как

$$(1) \quad y = \sum_a z_a \otimes S_a,$$

где $\{z_a\}$ есть базис в $Z(N)$, образованный мономами $\tilde{d}_{i_1} \dots \tilde{d}_{i_k}$, $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k$, и S_a суть (некоммутативные) полиномы по переменным $\tau_{ij}^{(M)}$. С другой стороны, если $y \in \text{SY}(N)$, то элемент (1) должен, очевидно, иметь вид $y = 1 \otimes y$. Следовательно, y является полиномом по $\tau_{ij}^{(M)}$.

2.18. СЛЕДСТВИЕ. Алгебра $\text{SY}(N)$ изоморфна факторалгебре

$$Y(N) / (\text{qdet } T(u) = 1) = Y(N) / (d_1 = d_2 = \dots = 0).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть I является идеалом в $Y(N)$, порожденным всеми элементами $d_1, d_2, \dots$ (или, что то же самое, всеми элементами $\tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \dots$). Из предложения 2.16 немедленно следует, что

$$Y(N) = I \oplus \text{SY}(N).$$

2.19. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Имеет место равенство

$$(1) \quad \Delta(\text{qdet } T(u)) = \text{qdet } T(u) \otimes \text{qdet } T(u).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы будем рассматривать Δ как гомоморфизм алгебр

$$\Delta: Y(N) \otimes \text{End } \mathcal{E}^{\otimes N} \rightarrow Y(N) \otimes Y(N) \otimes \text{End } \mathcal{E}^{\otimes N},$$

который тождественен на $\text{End } \mathcal{E}^{\otimes N}$. Используя обозначения раздела 1.28, получаем

$$(2) \quad \Delta(\text{qdet } T(u)A_N) = \Delta(A_N T_1 \dots T_N) = A_N T_{[1]1} T_{[2]1} \dots T_{[1]N} T_{[2]N},$$

где $T_i = T_i(u - i + 1)$. Заметим, что элементы $T_{[i]j}$ и $T_{[k]l}$ коммутируют, если $i \neq k$ и $j \neq l$. Таким образом, (2) можно переписать как

$$\begin{aligned} A_N T_{[1]1} \dots T_{[1]N} T_{[2]1} \dots T_{[2]N} &= \text{qdet } T_{[1]}(u) A_N T_{[2]1} \dots T_{[2]N} \\ &= \text{qdet } T_{[1]}(u) \text{qdet } T_{[2]}(u) A_N. \end{aligned}$$

Отсюда следует (1).

2.20. СЛЕДСТВИЕ. $\Delta(\tilde{d}(u)) = \tilde{d}(u) \otimes \tilde{d}(u)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что $\tilde{d}(u)$ определен равенством

$$\text{qdet } T(u) = \tilde{d}(u) \tilde{d}(u - 1) \dots \tilde{d}(u - N + 1)$$

(см. раздел 2.16). Следовательно,

$$\Delta(\text{qdet } T(u)) = \Delta(\tilde{d}(u)) \Delta(\tilde{d}(u - 1)) \dots \Delta(\tilde{d}(u - N + 1)).$$

С другой стороны, согласно предложению 2.19,

$$\begin{aligned} \Delta(\text{qdet } T(u)) &= \tilde{d}(u) \dots \tilde{d}(u - N + 1) \otimes \tilde{d}(u) \dots \tilde{d}(u - N + 1) \\ &= (\tilde{d}(u) \otimes \tilde{d}(u)) (\tilde{d}(u - 1) \otimes \tilde{d}(u - 1)) \dots (\tilde{d}(u - N + 1) \otimes \tilde{d}(u - N + 1)). \end{aligned}$$

Применение предложения 2.15 к алгебре $\mathcal{A} = Z(N) \otimes Z(N)$ и элементу $a(u) = \Delta(\text{qdet } T(u)) \in \mathcal{A}[[u^{-1}]]$ завершает доказательство.

2.21. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Подалгебра $\text{SY}(N) \subset Y(N)$ является алгеброй Хопфа, т.е. копроизведение, антипод и коединица в $\text{SY}(N)$ могут быть получены ограничением на $\text{SY}(N)$ соответствующих операций в алгебре Хопфа $Y(N)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из следствия 2.20 вытекает, что

$$\Delta(\tilde{d}(u)^{-1}) = \tilde{d}(u)^{-1} \otimes \tilde{d}(u)^{-1}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \Delta(\tau_{ij}(u)) &= \Delta(\tilde{d}(u)^{-1} t_{ij}(u)) \\ &= (\tilde{d}(u)^{-1} \otimes \tilde{d}(u)^{-1}) \sum_{a=1}^N t_{ia}(u) \otimes t_{aj}(u) \\ &= \sum_{a=1}^N \tau_{ia}(u) \otimes \tau_{aj}(u). \end{aligned}$$

В силу следствия 2.17 последнее равенство показывает, что $\Delta(\text{SY}(N)) \subset \text{SY}(N) \otimes \text{SY}(N)$. Мы опускаем проверку аксиом для антипода и коединицы, которые очевидны.

2.22. Отметим, что $\text{SY}(N)$ наследует обе фильтрации алгебры $Y(N)$, определенные в разделе 1.20. Мы опишем соответствующие градуированные алгебры $\text{gr}_1 \text{SY}(N)$ и $\text{gr}_2 \text{SY}(N)$; результатом будут являться предложения, аналогичные теоремам 1.22 и 1.26.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Алгебра $\mathrm{gr}_1 \mathrm{SY}(N)$ коммутативна и изоморфна алгебре полиномов с образующими

$$(1) \quad \bar{t}_{ij}^{(M)} \quad (i \neq j), \quad \bar{t}_{kk}^{(M)} - \bar{t}_{k+1,k+1}^{(M)}, \quad k = 1, \dots, N-1, \quad M = 1, 2, \dots,$$

где черта имеет то же значение, что и в разделе 1.22.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Коммутативность алгебры $\mathrm{gr}_1 \mathrm{SY}(N)$ следует из коммутативности алгебры $\mathrm{gr}_1 Y(N)$. Далее, в соответствии с (2.7.1),

$$(2) \quad \bar{d}_M = \bar{t}_{11}^{(M)} + \dots + \bar{t}_{NN}^{(M)} + (\dots),$$

где $(\dots)$ обозначает сумму (коммутативных) мономов, составленных из букв $\bar{t}_{ij}^{(L)}$ со степенями $L < M$. Вместе с теоремой Пуанкаре–Биркгофа–Витта (1.22) это означает, что элементы $\bar{d}_M$ и (1) образуют систему алгебраически независимых образующих алгебры $\mathrm{gr}_1 Y(N)$. Из центральности элементов d_M в $Y(N)$ легко следует, что факторизация алгебры $Y(N)$ по ним просто приводит к устранению элементов $\bar{d}_M$ из алгебры $\mathrm{gr}_1 Y(N)$.

2.23. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Алгебра $\mathrm{gr}_2 \mathrm{SY}(N)$ изоморфна $U(\mathfrak{sl}(N)[x])$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим идеал I алгебры $Y(N)$, введенный при доказательстве следствия 2.18. Используя шаг 1 доказательства теоремы 2.13, мы получаем, что образ идеала $\mathrm{gr}_2 I$ при изоморфизме

$$\mathrm{gr}_2 Y(N) \rightarrow U(\mathfrak{gl}(N)[x])$$

(см. теорему 1.26) совпадает с идеалом $\tilde{I}$ алгебры $U(\mathfrak{gl}(N)[x])$, порожденным элементами $Z, Zx, Zx^2, \dots$. Ясно, что факторалгебра $U(\mathfrak{gl}(N)[x])/\tilde{I}$ изоморфна алгебре $U(\mathfrak{sl}(N)[x])$. Тем самым доказательство завершено.

2.24. КОММЕНТАРИИ. Определение квантового детерминанта $\mathrm{qdet} T(u)$ впервые появилось в работе Изергина и Корепина [23] для случая $N = 2$. Основные идеи и формулы, связанные с квантовым детерминантом для произвольного N , содержатся в обзорной статье Кулиша и Склянина [30]. Квантовый детерминант использовался во многих работах (см., например, Чередник [7], [8], Дринфельд [16], Молев [36], Назаров [38], Назаров и Тарасов [41], Тарасов [50], [51]). Однако, насколько нам известно, детальный обзор свойств квантового детерминанта $\mathrm{qdet} T(u)$ не публиковался. В этом параграфе мы попытались восполнить этот пробел.

Формула (2.11.1) имеет длинную историю. Она тесно связана со знаменитым тождеством Капелли [9], [10], которое обсуждалось в книге Вейля о классических группах [53, часть II, § 4]. Тот факт, что детерминант (2.11.1) лежит в центре обертывающей алгебры $U(\mathfrak{gl}(N))$, никоим образом не является тривиальным. Доказательство этого результата, предложенное Хау в [21], содержало ошибку, которая была исправлена в работе Хау и Умеда [22]. Подход к доказательству, основанный на янг-идеале, по-видимому, является плодотворным, и позднее мы надеемся вернуться к этому предмету. Отметим, что Назаров [38] построил супераналог квантового детерминанта $\mathrm{qdet} T(u)$ (квантовый березиниан) и применил его к выводу “супер” тождества Капелли; в этом случае конструкция является гораздо более сложной, поскольку березиниан не есть полиномиальная функция матричных коэффициентов (см. Березин [1]).

Тождество (2.11.2) представляет собой один из примеров полиномиальных тождеств, которым удовлетворяют генераторы полупростой алгебры Ли. Они исследовались в работах Брэкена–Грина [2], Грина [20], Костанта [26], О’Брайна–Кэнта–Кэри [3], Гулда [19] и других. Назаров и Тарасов [41] доказали тождество (2.11.2) и его q -аналог, используя свойства квантового детерминанта.

Идея доказательства теоремы 2.13 с использованием редукции к алгебре $\mathrm{gr}_2 Y(N)$ была сообщена одному из нас В. Г. Дринфельдом.

Следуя общей философии Дринфельда [17], янгиан $\mathfrak{sl}(N)$ должен быть определен как фактор-алгебра алгебры $Y(N)$. Тот факт, что он также может быть реализован как подалгебра в $Y(N)$, был замечен третьим автором и сообщен В. Г. Дринфельду, который предложил в ответ элегантную характеристику подалгебры $Y(\mathfrak{sl}(N)) \subset Y(N)$ в терминах автоморфизмов μ_f .

§3. Скрученный янгиан $Y^\pm(N)$

В этом параграфе мы вводим скрученные янгианы $Y^+(N)$ и $Y^-(N)$. Они определяются как некоторые подалгебры янгиана $Y(N)$ (определение 3.5). Мы также находим реализацию алгебры $Y^\pm(N)$ в терминах образующих и определяющих соотношений. Наконец, мы доказываем аналог теоремы Пуанкаре–Биркгофа–Витта для алгебр $Y^\pm(N)$.

3.1. Как и ранее, мы будем обозначать через $\mathcal{E}$ векторное пространство $\mathbb{C}^N$, и через $\{e_i\}$ его канонический базис. Но теперь нам будет удобно параметризовать базисные векторы алгебры числами $i = -n, -n+1, \dots, n-1, n$, где $n := \lfloor N/2 \rfloor$ и $i = 0$ пропускается, когда N четное.

Снабдим $\mathcal{E}$ невырожденной билинейной формой $\langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle_\pm$, которая может быть как симметрической, так и кососимметрической:

$$\langle e_i, e_j \rangle_+ = \delta_{i, -j}, \quad \langle e_i, e_j \rangle_- = \mathrm{sgn}(i) \delta_{i, -j}.$$

Здесь символ $\mathrm{sgn}(i)$ равен 1 для $i > 0$ и -1 для $i < 0$. Разумеется, кососимметрический случай может возникать, только когда N четное.

Если не указано иначе, мы будем рассматривать оба случая, симметрический и кососимметрический, одновременно. Нам будет удобно использовать символ θ_{ij} , который определяется следующим образом:

$$\theta_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{в симметрическом случае;} \\ \mathrm{sgn}(i) \mathrm{sgn}(j), & \text{в кососимметрическом случае.} \end{cases}$$

Везде, где будут встречаться двойные знаки $\pm$ или $\mp$, верхний знак будет соответствовать симметрическому случаю, а нижний знак – кососимметрическому.

Обозначим через $A \mapsto A^t$ транспонирование относительно формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Это анти-автоморфизм алгебры $\mathrm{End} \mathcal{E}$; на матричные единицы транспозиция действует следующим образом:

$$(1) \quad (E_{ij})^t = \theta_{ij} E_{-j, -i}.$$

Мы будем часто использовать частичные транспозиции $t_1, t_2, \dots$ в кратных тензорных произведениях вида $\mathcal{A} \otimes (\mathrm{End} \mathcal{E})^{\otimes m}$, где $\mathcal{A}$ – некоторая алгебра. По определению, t_k означает транспозицию, соответствующую k -й копии $\mathcal{E}$.

3.2. Пусть P , как обычно, означает перестановку в $\mathcal{E}^{\otimes 2}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Имеем:*

$$(1) \quad Q := P^{t_1} = P^{t_2} = \sum_{i,j} \theta_{ij} E_{-j,-i} \otimes E_{ji},$$

$$(2) \quad Q^2 = NQ,$$

$$(3) \quad Q \mathcal{E}^{\otimes 2} = \mathbb{C}\xi, \quad \text{где} \quad \xi := \begin{cases} \sum e_{-j} \otimes e_j, & \text{в симметрическом случае,} \\ \sum \operatorname{sgn}(j) e_{-j} \otimes e_j, & \text{в кососимметрическом случае,} \end{cases}$$

$$(4) \quad PQ = QP = \pm Q.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$(5) \quad Q := P^{t_1} = \sum E_{ij}^t \otimes E_{ji} = \sum \theta_{ij} E_{-j,-i} \otimes E_{ji},$$

$$(6) \quad P^{t_2} = \sum E_{kl} \otimes E_{lk}^t = \sum \theta_{kl} E_{kl} \otimes E_{-k,-l}.$$

Заменяя (k, l) на $(-j, -i)$ в (6) и используя очевидное равенство $\theta_{ij} = \theta_{-j,-i}$, мы видим, что (5) равно (6). Это доказывает (1).

Далее, принимая во внимание (5), мы получаем:

$$\begin{aligned} Q^2 &= \left(\sum_{i,j} \theta_{ij} E_{-j,-i} \otimes E_{ji} \right) \left(\sum_{k,l} \theta_{kl} E_{-l,-k} \otimes E_{lk} \right) \\ &= \sum_{i,j,k,l} \theta_{ij} \theta_{kl} (E_{-j,-i} E_{-l,-k} \otimes E_{ji} E_{lk}) \\ &= \sum_{i,j,k,l} \theta_{ij} \theta_{kl} \delta_{il} (E_{-j,-k} \otimes E_{jk}) \\ &= N \sum_{k,j} \theta_{kj} (E_{-j,-k} \otimes E_{jk}) = NQ \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} Q e_k \otimes e_l &= \sum_{i,j} \theta_{ij} (E_{-j,-i} \otimes E_{ji}) (e_k \otimes e_l) \\ &= \sum_{i,j} \theta_{ij} \delta_{-i,k} \delta_{il} \cdot e_{-j} \otimes e_j \\ &= \delta_{-k,l} \sum_j \theta_{lj} \cdot e_{-j} \otimes e_j = \delta_{-k,l} \operatorname{sgn}(l) \cdot \xi. \end{aligned}$$

Это доказывает (2) и (3). Наконец,

$$\begin{aligned} PQ &= \left(\sum_{i,j} E_{ij} \otimes E_{ji} \right) \left(\sum_{k,l} \theta_{kl} E_{-l,-k} \otimes E_{lk} \right) \\ &= \sum_{i,j,k,l} \theta_{kl} (E_{ij} E_{-l,-k} \otimes E_{ji} E_{lk}) = \sum_{i,k} \theta_{ki} E_{i,-k} \otimes E_{-i,k}. \end{aligned}$$

В симметрическом случае $\theta_{ki} \equiv 1$, так что $PQ = Q$. В кососимметрическом случае $\theta_{ki} = -\theta_{k,-i}$, так что $PQ = -Q$. Таким образом, мы проверили (4).

3.3. Из (3.2.1) мы получаем

$$(1) \quad R'(u) := R^{t_1}(u) = R^{t_2}(u) = 1 - \frac{Q}{u}.$$

Заметим, что

$$(2) \quad R(u)R'(v) = R'(v)R(u),$$

так как $PQ = QP$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *T-матрица удовлетворяет следующим соотношениям:*

$$(3) \quad T_1^{t_1}(u)R'(u-v)T_2(v) = T_2(v)R'(u-v)T_1^{t_1}(u),$$

$$(4) \quad T_1(u)R'(-u+v)T_2^{t_2}(v) = T_2^{t_2}(v)R'(-u+v)T_1(u),$$

$$(5) \quad R(u-v)T_1^{t_1}(-u)T_2^{t_2}(-v) = T_2^{t_2}(-v)T_1^{t_1}(-u)R(u-v).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждое из этих соотношений эквивалентно основному тройному соотношению (1.8.1). В самом деле, применяя t_1 к обеим частям (1.8.1) и повторяя те же рассуждения, что и при доказательстве предложения 1.12(iv), мы получаем (3).

Далее, умножая обе части (3) на P слева и справа, мы получаем

$$(6) \quad T_2^{t_2}(u)R'(u-v)T_1(v) = T_1(v)R'(u-v)T_2^{t_2}(u),$$

или, что то же самое,

$$T_1(v)R'(u-v)T_2^{t_2}(u) = T_2^{t_2}(u)R'(u-v)T_1(v).$$

Заменяя u, v на v, u , мы получаем (4).

Наконец, применяя t_1 к обеим частям (4) и заменяя u, v на $-u, -v$, мы приходим к (5).

3.4. Из соотношения (3.3.5) вытекает следующий аналог предложения 1.12(iv) для транспозиции (3.1.1).

СЛЕДСТВИЕ. *Отображение $T(u) \mapsto T^t(-u)$ определяет инволютивный автоморфизм алгебры $Y(N)$.*

3.5. Положим

$$(1) \quad S(u) := T(u)T^t(-u).$$

Тогда

$$(2) \quad S(u) = \sum_{i,j} s_{ij}(u) \otimes E_{ij}, \quad \text{где} \quad s_{ij}(u) := \sum_a \theta_{aj} t_{ia}(u) t_{-j,-a}(-u).$$

Далее,

$$(3) \quad s_{ij}(u) = \delta_{ij} + s_{ij}^{(1)} u^{-1} + s_{ij}^{(2)} u^{-2} + \dots,$$

где

$$(4) \quad s_{ij}^{(M)} = \sum_a \sum_{r=0}^M \theta_{aj} (-1)^r t_{ia}^{(M-r)} t_{-j,-a}^{(r)}.$$

Например,

$$(5) \quad s_{ij}^{(1)} = t_{ij}^{(1)} - \theta_{ij} t_{-j,-i}^{(1)}, \quad s_{ij}^{(2)} = t_{ij}^{(2)} + \theta_{ij} t_{-j,-i}^{(2)} - \sum_a \theta_{aj} t_{ia}^{(1)} t_{-j,-a}^{(1)}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Скрученный янгиан* $Y^\pm(N)$ является подалгеброй янгиана $Y(N)$, порожденной матричными элементами S -матрицы, т.е. элементами $s_{ij}^{(M)}$, где $M = 1, 2, \dots$ и $-n \leq i, j \leq n$.

3.6. Положим

$$(1) \quad S_1(u) := \sum_{ij} s_{ij}(u) \otimes E_{ij} \otimes 1, \quad S_2(v) := \sum_{kl} s_{kl}(v) \otimes 1 \otimes E_{kl}.$$

Это элементы алгебры $Y^\pm(N)[[u^{-1}, v^{-1}]] \otimes \text{End } \mathcal{E}^{\otimes 2}$.

ТЕОРЕМА. *S -матрица удовлетворяет следующим соотношениям:*

$$(2) \quad R(u-v)S_1(u)R'(-u-v)S_2(v) = S_2(v)R'(-u-v)S_1(u)R(u-v),$$

$$(3) \quad S^t(-u) = S(u) \pm \frac{S(u) - S(-u)}{2u}.$$

Мы будем называть (2) и (3), соответственно, *четверным соотношением* и *условием симметрии*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Четверное соотношение для S -матрицы выводится из тройного соотношения для T -матрицы следующим образом:

$$\begin{aligned} & R(u-v)S_1(u)R'(-u-v)S_2(v) \\ &= R(u-v)T_1(u)T_1^{t_1}(-u)R'(-u-v)T_2(v)T_2^{t_2}(-v) \\ &= R(u-v)T_1(u)T_2(v)R'(-u-v)T_1^{t_1}(-u)T_2^{t_2}(-v) \quad \text{в силу (3.3.3)} \\ &= T_2(v)T_1(u)R(u-v)R'(-u-v)T_1^{t_1}(-u)T_2^{t_2}(-v) \\ &\quad \text{(в силу тройного соотношения)} \\ &= T_2(v)T_1(u)R'(-u-v)R(u-v)T_1^{t_1}(-u)T_2^{t_2}(-v) \quad \text{в силу (3.3.2)} \\ &= T_2(v)T_1(u)R'(-u-v)T_2^{t_2}(-v)T_1^{t_1}(-u)R(u-v) \quad \text{в силу (3.3.5)} \\ &= T_2(v)T_2^{t_2}(-v)R'(-u-v)T_1(u)T_1^{t_1}(-u)R(u-v) \quad \text{в силу (3.3.4)} \\ &= S_2(v)R'(-u-v)S_1(u)R(u-v). \end{aligned}$$

Для того чтобы установить условие симметрии, мы используем (3.5.2) и коммутационные соотношения (1.8.2):

$$\begin{aligned} (S^t(-u))_{ij} &= \theta_{ij}s_{-j,-i}(-u) \\ &= \sum_a \theta_{ij}\theta_{-i,a}t_{-j,a}(-u)t_{i,-a}(u) \quad \text{в силу (3.5.2)} \\ &= \sum_a \theta_{ja}t_{-j,-a}(-u)t_{i,a}(u), \quad \text{заменяя } a \text{ на } -a. \end{aligned}$$

В силу (1.8.2), это может быть переписано как

$$\sum_a \theta_{ja}t_{ia}(u)t_{-j,-a}(-u) - \frac{1}{2u} \sum_a \theta_{ja}t_{i,-a}(-u)t_{-j,a}(u) + \frac{1}{2u} \sum_a \theta_{ja}t_{i,-a}(u)t_{-j,a}(-u).$$

Заметим теперь, что $\theta_{ja} = \pm\theta_{j,-a}$. Подставляя это выражение во вторую и третью сумму, мы в итоге получаем

$$(4) \quad \theta_{ij}s_{-j,-i}(-u) = s_{ij}(u) \pm \frac{s_{ij}(u) - s_{ij}(-u)}{2u} \quad \text{для всех } i, j,$$

что в точности совпадает с условием симметрии.

3.7. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Четверное соотношение (3.6.2) может быть записано в виде

$$(1) \quad \begin{aligned} [S_1(u), S_2(v)] = & \frac{1}{u-v} (PS_1(u)S_2(v) - S_2(v)S_1(u)P) \\ & - \frac{1}{u+v} (S_1(u)QS_2(v) - S_2(v)QS_1(u)) \\ & + \frac{1}{u^2-v^2} (PS_1(u)QS_2(v) - S_2(v)QS_1(u)P) \end{aligned}$$

или же как следующая система соотношений: для любых i, j, k, l

$$(2) \quad \begin{aligned} [s_{ij}(u), s_{kl}(v)] = & \frac{1}{u-v} (s_{kj}(u)s_{il}(v) - s_{kj}(v)s_{il}(u)) \\ & - \frac{1}{u+v} (\theta_{k,-j}s_{i,-k}(u)s_{-j,l}(v) - \theta_{i,-l}s_{k,-i}(v)s_{-l,j}(u)) \\ & + \frac{1}{u^2-v^2} (\theta_{i,-j}s_{k,-i}(u)s_{-j,l}(v) - \theta_{i,-j}s_{k,-i}(v)s_{-j,l}(u)). \end{aligned}$$

Заметим, что соотношение (2) аналогично соотношению (1.8.2) для янгиана $Y(N)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для того чтобы получить (1), достаточно подставить в (3.6.2)

$$R(u-v) = 1 - \frac{P}{u-v}, \quad R'(-u-v) = 1 + \frac{Q}{u+v}.$$

Чтобы получить (2), следует просто переписать (1) в терминах элементов $s_{ij}(u)$, используя (3.6.1) и явный вид P и Q :

$$P = \sum E_{ij} \otimes E_{ji}, \quad Q = \sum \theta_{kl} E_{-l, -k} \otimes E_{lk}.$$

3.8. ТЕОРЕМА. Четверное соотношение (3.6.2) и условие симметрии (3.6.3) являются в точности определяющими соотношениями для скрученного янгиана $Y^\pm(N)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим две алгебры $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$, где $\mathcal{A}_1 := Y^\pm(N)$ и $\mathcal{A}_2$ порождена произвольными образующими $s_{ij}^{(M)}$ (где $M = 1, 2, \dots$ и $-n \leq i, j \leq n$), удовлетворяющими соотношениям (3.6.2) и (3.6.3). Тогда существует очевидный сюръективный морфизм $\mathcal{A}_2 \rightarrow \mathcal{A}_1$, и мы должны проверить его инъективность.

Для того чтобы сделать это, мы снабдим обе алгебры фильтрациями: фильтрация в $\mathcal{A}_1 = Y^\pm(N)$ индуцирована первой фильтрацией янгиана (см. определение 1.20), а фильтрация в $\mathcal{A}_2$ определена условием $\deg(s_{ij}^{(M)}) = M$. Отображение $\mathcal{A}_2 \rightarrow \mathcal{A}_1$ сохраняет фильтрацию, так что оно определяет сюръективный морфизм $\text{gr } \mathcal{A}_2 \rightarrow \text{gr } \mathcal{A}_1$ соответствующих градуированных алгебр.

Теперь достаточно показать, что последний морфизм является инъективным. Для того чтобы сделать это, мы опишем обе градуированные алгебры более подробно. Рассмотрим сначала $\text{gr } \mathcal{A}_1$, которая является подалгеброй в $\text{gr}_1 Y(N)$. Заметим, что

$\mathrm{gr}_1 Y(N)$ коммутативна в силу следствия 1.21, следовательно, $\mathrm{gr} \mathcal{A}_1$ также коммутативна. Обозначим, соответственно, через $\bar{t}_{ij}^{(M)}$ и $\bar{s}_{ij}^{(M)}$ образы элементов $t_{ij}^{(M)}$ и $s_{ij}^{(M)}$ в M -й однородной компоненте алгебры $\mathrm{gr}_1 Y(N)$. Тогда из (3.5.4) следует, что

$$(1) \quad \bar{s}_{ij}^{(M)} = \bar{t}_{ij}^{(M)} + (-1)^M \theta_{ij} \bar{t}_{-j, -i}^{(M)} + \sum_a \sum_{r=1}^{M-1} (-1)^r \theta_{ja} \bar{t}_{ia}^{(M-r)} \bar{t}_{-j, -a}^{(r)}.$$

Заметим также, что

$$(2) \quad \theta_{ij} \bar{s}_{-j, -i}^{(M)} = (-1)^M \bar{s}_{ij}^{(M)}.$$

В самом деле, это следует из (1), так как мы имеем дело с коммутативной алгеброй (это также следует из условия симметрии).

Отметим, что образующие $\bar{t}_{ij}^{(M)}$ являются алгебраически независимыми по теореме 1.22. Так как сумма в (1) содержит только образующие степени строго меньше M , мы видим, что алгебра $\mathrm{gr} \mathcal{A}_1$ изоморфна алгебре полиномов от символов $\bar{s}_{ij}^{(M)}$, удовлетворяющих условию симметрии (2).

Вернемся теперь к алгебре $\mathrm{gr} \mathcal{A}_2$. Здесь основное наблюдение состоит в том, что эта алгебра также коммутативна. В самом деле, чтобы показать это, достаточно проверить, что

$$\deg[s_{ij}^{(M)}, s_{kl}^{(L)}] < M + L.$$

Рассмотрим коммутационное соотношение (3.7.2) и будем считать его правую часть элементом алгебры $\mathrm{gr} \mathcal{A}_2 \otimes \mathbb{C}((v^{-1}))[[u^{-1}]]$. В $\mathbb{C}((v^{-1}))[[u^{-1}]]$ мы можем записать

$$(3) \quad \begin{aligned} \frac{1}{u-v} &= u^{-1}(1-vu^{-1})^{-1} = \sum_{r=0}^{\infty} v^r u^{-r-1}, \\ \frac{1}{u+v} &= u^{-1}(1+vu^{-1})^{-1} = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r v^r u^{-r-1}, \\ \frac{1}{u^2-v^2} &= u^{-2}(1-v^2u^{-2})^{-1} = \sum_{r=0}^{\infty} v^{2r} u^{-2r-2}. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (3.7.2) и сравнивая коэффициенты при $u^{-M}v^{-L}$ в обеих частях равенства, мы видим, что $[s_{ij}^{(M)}, s_{kl}^{(L)}]$ является конечной суммой выражений степени $M+L-1$ или $M+L-2$. (Заметим, что это рассуждение вполне аналогично тому, что использовалось при переходе от (1.1.1) к (1.2.1).)

Таким образом, мы проверили коммутативность алгебры $\mathrm{gr} \mathcal{A}_2$. Теперь, пусть символы $\bar{s}_{ij}^{(M)}$ имеют тот же смысл, что и ранее: то есть образы (абстрактных) образующих $s_{ij}^{(M)}$ в M -й компоненте алгебры $\mathrm{gr} \mathcal{A}_2$. В силу условия симметрии (3.6.3), (абстрактные) образующие $\bar{s}_{ij}^{(M)}$ удовлетворяют условию симметрии (2). Так как образующие алгебры $\mathrm{gr} \mathcal{A}_1$ являются алгебраически независимыми, мы заключаем, что морфизм $\mathrm{gr} \mathcal{A}_2 \rightarrow \mathrm{gr} \mathcal{A}_1$ инъективен.

3.9. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Отображение*

$$(1) \quad S(u) \mapsto S^t(u)$$

определяет инволютивный морфизм алгебры $Y^\pm(N)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим антиавтоморфизм sign (см. (1.11.1)) к $s_{ij}(u)$. Благодаря (3.5.2), мы имеем

$$\begin{aligned} \text{sign}(s_{ij}(u)) &= \sum_a \theta_{aj} t_{-j, -a}(u) t_{ia}(-u) \\ &= \sum_a \theta_{-a, j} t_{-j, a}(u) t_{i, -a}(-u) \quad (\text{мы заменяем } a \text{ на } -a) \\ &= \sum_a \theta_{ij} \theta_{-a, i} t_{-j, a}(u) t_{i, -a}(-u) = \theta_{ij} s_{-j, -i}(u). \end{aligned}$$

Таким образом, подалгебра $Y^\pm(N)$ инвариантна относительно антиавтоморфизма sign , и его сужение на $Y^\pm(N)$ дает антиавтоморфизм (1).

3.10. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $g(u) = 1 + g_1 u^{-2} + g_2 u^{-4} + \dots \in \mathbb{C}[[u^{-2}]]$ является формальным степенным рядом. Тогда отображение

$$(1) \quad \nu_g : S(u) \mapsto g(u) S(u)$$

определяет автоморфизм алгебры $Y^\pm(N)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ряд $g(u)$ может быть записан в виде $g(u) = f(u)f(-u)$, где $f(u) = 1 + f_1 u^{-1} + f_2 u^{-2} + \dots \in \mathbb{C}[[u^{-1}]]$. Рассмотрим автоморфизм μ_f алгебры $Y(N)$ (см. (1.12.2)). В силу (3.5.1) имеем

$$\mu_f(S(u)) = f(u)T(u)f(-u)T^t(-u) = f(u)f(-u)S(u) = g(u)S(u).$$

То есть подалгебра $Y^\pm(N)$ инвариантна относительно автоморфизма μ_f , и ее сужение на $Y^\pm(N)$ дает автоморфизм ν_g .

3.11. Для $-n \leq i, j \leq n$ положим

$$(1) \quad F_{ij} := E_{ij} - \theta_{ij} E_{-j, -i}$$

и обозначим через $\mathfrak{g}(n)$ подалгебру Ли в $\mathfrak{gl}(N)$, натянутую на элементы (1). Тогда $\mathfrak{g}(n)$ изоморфна $\mathfrak{o}(2n)$ или $\mathfrak{sp}(2n)$ (соответственно, $\mathfrak{o}(2n+1)$), если $N = 2n$ (соответственно, $2n+1$). Заметим, что образующие (1) удовлетворяют следующему условию симметрии:

$$(2) \quad F_{-j, -i} = -\theta_{ij} F_{ij}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Отображение*

$$(3) \quad \xi : s_{ij}(u) \mapsto \delta_{ij} + \left(u \pm \frac{1}{2}\right)^{-1} \cdot F_{ij}$$

определяет гомоморфизм алгебр $\xi : Y^\pm(N) \rightarrow U(\mathfrak{g}(n))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам надо проверить, что соотношения (3.7.2) и (3.6.4) выполняются для

$$(4) \quad s_{ij}(u) = \delta_{ij} + \left(u \pm \frac{1}{2}\right)^{-1} \cdot F_{ij}.$$

Положим $u' = u \pm \frac{1}{2}$, $v' = v \pm \frac{1}{2}$ и подставим (4) в (3.7.2). Умножая обе части на $u'v'$, мы получаем:

$$\begin{aligned} [F_{ij}, F_{kl}] &= \frac{1}{u' - v'} ((\delta_{kj}u' + F_{kj})(\delta_{il}v' + F_{il}) - (\delta_{kj}v' + F_{kj})(\delta_{il}u' + F_{il})) \\ &\quad - \frac{1}{u' + v' \mp 1} (\theta_{k,-j}(\delta_{i,-k}u' + F_{i,-k})(\delta_{-j,l}v' + F_{-j,l}) \\ &\quad - \theta_{i,-l}(\delta_{k,-i}v' + F_{k,-i})(\delta_{-l,j}u' + F_{-l,j})) \\ &\quad + \frac{1}{(u' - v')(u' + v' \mp 1)} \theta_{i,-j} ((\delta_{k,-i}u' + F_{k,-i})(\delta_{-j,l}v' + F_{-j,l}) \\ &\quad - (\delta_{k,-i}v' + F_{k,-i})(\delta_{-j,l}u' + F_{-j,l})), \end{aligned}$$

что равно

$$\begin{aligned} &\delta_{kj}F_{il} - \delta_{il}F_{kj} - \frac{1}{u' + v' \mp 1} ((\theta_{k,-j}\delta_{i,-k}F_{-j,l} - \theta_{i,-l}\delta_{-l,j}F_{k,-i})u' \\ &\quad + (\theta_{k,-j}\delta_{-j,l}F_{i,-k} - \theta_{i,-l}\delta_{k,-i}F_{-l,j})v' - \theta_{i,-j}(\delta_{k,-i}F_{-j,l} - \delta_{-j,l}F_{k,-i})). \end{aligned}$$

Здесь мы использовали соотношения

$$\theta_{k,-j}\delta_{i,-k}\delta_{-j,l} - \theta_{i,-l}\delta_{k,-i}\delta_{-l,j} = 0 \quad \text{и} \quad \theta_{k,-j}F_{i,-k}F_{-j,l} - \theta_{i,-l}F_{k,-i}F_{-l,j} = 0.$$

Первое соотношение очевидно, второе следует из (2). Из соотношений (2) также следует, что

$$\begin{aligned} \theta_{k,-j}\delta_{i,-k}F_{-j,l} - \theta_{i,-l}\delta_{-l,j}F_{k,-i} &= \theta_{k,-j}\delta_{-j,l}F_{i,-k} - \theta_{i,-l}\delta_{k,-i}F_{-l,j} \\ &= \pm \theta_{i,-j}(\delta_{k,-i}F_{-j,l} - \delta_{-j,l}F_{k,-i}). \end{aligned}$$

Таким образом, мы получаем равенство

$$(5) \quad [F_{ij}, F_{kl}] = \delta_{kj}F_{il} - \delta_{il}F_{kj} - \theta_{k,-j}\delta_{i,-k}F_{-j,l} + \theta_{i,-l}\delta_{-l,j}F_{k,-i},$$

которое совпадает с коммутационными соотношениями для алгебры Ли $\mathfrak{g}(n)$.

Подставим теперь (4) в (3.6.4). Используя (2), мы получаем для левой части:

$$\theta_{ij} \left(\delta_{-j,-i} + \left(-u \pm \frac{1}{2}\right)^{-1} \cdot F_{-j,-i} \right) = \delta_{ij} + \left(u \mp \frac{1}{2}\right)^{-1} \cdot F_{ij},$$

а для правой части:

$$\delta_{ij} + \left(u \pm \frac{1}{2}\right)^{-1} \cdot F_{ij} \pm \frac{(u \pm \frac{1}{2})^{-1} - (-u \pm \frac{1}{2})^{-1}}{2u} \cdot F_{ij} = \delta_{ij} + \left(u \mp \frac{1}{2}\right)^{-1} \cdot F_{ij},$$

таким образом, доказательство завершено.

3.12. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Отображение*

$$(1) \quad \eta: F_{ij} \mapsto s_{ij}^{(1)}$$

является вложением алгебры $U(\mathfrak{g}(n))$ в $Y^\pm(N)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя (3.8.3), мы выводим из соотношений (3.7.2), что

$$[s_{ij}^{(1)}, s_{kl}^{(1)}] = \delta_{kj}s_{il}^{(1)} - \delta_{il}s_{kj}^{(1)} - \theta_{k,-j}\delta_{i,-k}s_{-j,l}^{(1)} + \theta_{i,-l}\delta_{-l,j}s_{k,-i}^{(1)}.$$

Далее, (3.6.4) влечет равенство

$$-\theta_{ij}s_{-j,-i}^{(1)} = s_{ij}^{(1)}.$$

Сравнивая это выражение с (3.11.5) и (3.11.2), мы заключаем, что (1) является гомоморфизмом алгебр. Ясно, что $\xi \circ \eta = \text{id}$. Поэтому ядро отображения η тривиально.

3.13. ЗАМЕЧАНИЕ (ср. с замечанием 1.18). Обозначим через F матрицу формата $N \times N$, образованную элементами F_{ij} , и положим

$$(1) \quad \mathcal{S}(u) := 1 + F\left(u \pm \frac{1}{2}\right)^{-1}.$$

Тогда предыдущие утверждения могут быть сформулированы следующим образом: тот факт, что $\mathcal{S}(u)$ удовлетворяет четверному соотношению (3.6.2) и условию симметрии (3.6.3), эквивалентен тому, что элементы F_{ij} удовлетворяют соотношениям (3.11.2) и (3.11.6). Отметим, что слагаемое $\pm \frac{1}{2}$ в (1) является существенным. В отличие от случая янгианов $Y(N)$, отображение $S(u) \mapsto 1 + Fu^{-1}$ не определяет морфизма алгебр.

3.14. ЗАМЕЧАНИЕ. Существует аналог теоремы 1.22 для скрученного янгиана. Именно, из доказательства теоремы 3.8 следует, что элементы

$$\bar{s}_{ij}^{(2k)}, \quad i+j \leq 0, \quad \bar{s}_{ij}^{(2k-1)}, \quad i+j < 0, \quad k=1,2,\dots,$$

в случае $Y^+(N)$, и элементы

$$\bar{s}_{ij}^{(2k)}, \quad i+j < 0, \quad \bar{s}_{ij}^{(2k-1)}, \quad i+j \leq 0, \quad k=1,2,\dots,$$

в случае $Y^-(N)$, образуют систему алгебраически независимых образующих алгебры $\text{gr}_1 Y^\pm(N)$. Это утверждение можно понимать как теорему Пуанкаре–Биркгофа–Витта для алгебр $Y^\pm(N)$.

3.15. Теперь мы сформулируем аналог теоремы 1.26 для скрученных янгианов. Введем инволютивный автоморфизм σ алгебры Ли полиномиальных токов $\mathfrak{g}(N)[x]$:

$$(\sigma(f))(x) = -(f(-x))^t, \quad f \in \mathfrak{gl}(N)[x].$$

Эта инволюция определяет подалгебру Ли в $\mathfrak{gl}(N)[x]$; обозначим ее через $\mathfrak{gl}(N)[x]^\sigma$. Мы будем называть ее алгеброй Ли скрученных полиномиальных токов, отвечающей ортогональной алгебре Ли $\mathfrak{o}(N) \subset \mathfrak{gl}(N)$ или симплектической алгебре Ли $\mathfrak{sp}(N) \subset \mathfrak{gl}(N)$. Если

$$f = a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k$$

является элементом алгебры $\mathfrak{gl}(N)[x]^\sigma$, то все коэффициенты a_{2i} лежат в подалгебре $\mathfrak{o}(N)$ или $\mathfrak{sp}(N)$ алгебры $\mathfrak{gl}(N)$, в то время как коэффициенты a_{2i-1} лежат в подалгебре, определенной сужением инволюции σ на $\mathfrak{gl}(N)$.

Вторая фильтрация $Y(N)$ (см. определение 1.20) определяет фильтрацию подалгебр $Y^\pm(N) \subset Y(N)$. Обозначим через $\text{gr}_2 Y^\pm(N)$ соответствующую градуированную алгебру.

ТЕОРЕМА. *Градуированная алгебра $\mathrm{gr}_2 Y^\pm(N)$ изоморфна универсальной обертывающей алгебре $U(\mathfrak{gl}(N)[x]^\sigma)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим изоморфизм $U(\mathfrak{gl}(N)[x]) \rightarrow \mathrm{gr}_2 Y(N)$, построенный при доказательстве теоремы 1.26, и найдем образ подалгебры $U(\mathfrak{gl}(N)[x]^\sigma)$ при этом изоморфизме. Алгебра Ли $\mathfrak{gl}(N)[x]^\sigma$ является линейной оболочкой элементов

$$(E_{ij} + (-1)^M \theta_{ij} E_{-j, -i}) x^{M-1}, \quad -n \leq i, j \leq n, \quad M = 1, 2, \dots$$

Их образы в $\mathrm{gr}_2 Y(N)$ имеют вид $\tilde{t}_{ij}^{(M)} + (-1)^M t_{ij} \tilde{t}_{-j, -i}^{(M)}$. Из формулы (3.5.4) следует, что они в точности являются образами образующих $s_{ij}^{(M)}$ в $(M-1)$ -й компоненте $\mathrm{gr}_2 Y(N)$, что доказывает теорему.

3.16. ЗАМЕЧАНИЕ (ср. с замечанием 1.27). Алгебру $Y^\pm(N)$ можно рассматривать как плоскую деформацию алгебры $U(\mathfrak{gl}(N)[x]^\sigma)$. Чтобы увидеть это, мы введем новые образующие в $Y^\pm(N)$:

$$\tilde{s}_{ij}^{(M)} = s_{ij}^{(M)} h^{M-1},$$

где $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ – параметр деформации. Положим

$$\tilde{s}_{ij}(u) = \sum_{M=1}^{\infty} \tilde{s}_{ij}^{(M)} u^{-M}.$$

Соотношения (3.7.2) и (3.6.4) тогда принимают вид

$$\begin{aligned} [\tilde{s}_{ij}(u), \tilde{s}_{kl}(v)] &= -\frac{1}{u-v} (\delta_{kj} (\tilde{s}_{il}(u) - \tilde{s}_{il}(v)) - \delta_{il} (\tilde{s}_{kj}(u) - \tilde{s}_{kj}(v))) \\ &+ \frac{1}{u+v} (\delta_{i,-k} (\theta_{i,-l} \tilde{s}_{-l,j}(u) - \theta_{k,-j} \tilde{s}_{-j,l}(v)) - \delta_{-j,l} (\theta_{k,-j} \tilde{s}_{i,-k}(u) - \theta_{i,-l} \tilde{s}_{k,-i}(v))) \\ &+ \frac{h}{u-v} (\tilde{s}_{kj}(u) \tilde{s}_{il}(v) - \tilde{s}_{kj}(v) \tilde{s}_{il}(u)) \\ &- \frac{h}{u+v} (\theta_{k,-j} \tilde{s}_{i,-k}(u) \tilde{s}_{-j,l}(v) - \theta_{i,-l} \tilde{s}_{k,-i}(v) \tilde{s}_{-l,j}(u)) \\ &- \frac{h}{u^2 - v^2} \theta_{i,-j} (\delta_{k,-i} (\tilde{s}_{-j,l}(u) - \tilde{s}_{-j,l}(v)) - \delta_{-j,l} (\tilde{s}_{k,-i}(u) - \tilde{s}_{k,-i}(v))) \\ &+ \frac{h^2}{u^2 - v^2} \theta_{i,-j} (\tilde{s}_{k,-i}(u) \tilde{s}_{-j,l}(v) - \tilde{s}_{k,-i}(v) \tilde{s}_{-j,l}(u)) \end{aligned}$$

и

$$\theta_{ij} \tilde{s}_{-j,-i}(-u) = \tilde{s}_{ij}(u) \pm h \frac{\tilde{s}_{ij}(u) - \tilde{s}_{ij}(-u)}{2u}.$$

Обозначим через $Y_h^\pm(N)$ алгебру с абстрактными образующими $\tilde{s}_{ij}^{(M)}$, $-n \leq i, j \leq n$, $M = 1, 2, \dots$, удовлетворяющими соотношениям, описанным выше. Тогда алгебры $Y_h^\pm(N)$ с $h \neq 0$ изоморфны алгебрам $Y^\pm(N) = Y_1^\pm(N)$, в то время как из формул, приведенных выше, при $h = 0$ мы получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} [\tilde{s}_{ij}^{(M)}, \tilde{s}_{kl}^{(L)}] &= \delta_{kj} \tilde{s}_{il}^{(M+L-1)} - \delta_{il} \tilde{s}_{kj}^{(M+L-1)} \\ &+ (-1)^M (\delta_{i,-k} \theta_{k,-j} \tilde{s}_{-j,l}^{(M+L-1)} - \delta_{-l,j} \theta_{i,-l} \tilde{s}_{k,-i}^{(M+L-1)}) \end{aligned}$$

и

$$(-1)^M \theta_{ij} \tilde{s}_{-j, -i}^{(M)} = \tilde{s}_{ij}^{(M)}.$$

Они совпадают с коммутационными соотношениями для алгебры Ли $\mathfrak{gl}(N)[x]^\sigma$ в терминах образующих $(E_{ij} + (-1)^M \theta_{ij} E_{-j, -i})x^{M-1}$. То, что деформация является плоской, следует из теоремы Пуанкаре–Биркгофа–Витта для $Y^\pm(N)$ (см. замечание 3.14).

3.17. КОММЕНТАРИЙ. В этом параграфе мы дали подробное изложение некоторых результатов, анонсированных в работе Ольшанского [43]. Цель [43] заключалась в том, чтобы применить подход [42] к ортогональным и симплектическим алгебрам.

§ 4. Детерминант Складина $\text{qddet } S(u)$ и центр алгебры $Y^\pm(N)$

В этом параграфе мы устанавливаем несколько фактов относительно структуры алгебр $Y^\pm(N)$, введенных в § 3. Мы находим систему алгебраически независимых образующих центра алгебры $Y^\pm(N)$. Мы вводим специальные скрученные янгианы $SY^\pm(N)$ и доказываем, что алгебра $Y^\pm(N)$ изоморфна тензорному произведению ее центра и алгебры $SY^\pm(N)$. Мы будем придерживаться обозначений § 3 и активно использовать R -матричный формализм разделов 1.3–1.8.

4.1. Пусть $u_1, \dots, u_m$ – формальные переменные. Как и в разделе 2.1, мы положим

$$R(u_1, \dots, u_m) := (R_{m-1, m})(R_{m-2, m} R_{m-2, m-1}) \cdots (R_{1m} \cdots R_{12}),$$

где $R_{ij} := R_{ij}(u_i - u_j)$. Мы рассматриваем R_{ij} как элемент алгебры

$$(1) \quad Y^\pm(N)[[u_1^{-1}, \dots, u_m^{-1}]]_{\text{ext}} \otimes \text{End } \mathcal{E}^{\otimes m},$$

где $Y^\pm(N)[[u_1^{-1}, \dots, u_m^{-1}]]_{\text{ext}}$ является локализацией алгебры $Y^\pm(N)[[u_1^{-1}, \dots, u_m^{-1}]]$ по отношению к мультипликативному семейству, образованному элементами $u_k^{-1} - u_l^{-1}$ и $u_k^{-1} + u_l^{-1}$, $k \neq l$ (ср. (1.7)). Нам также потребуются следующие элементы алгебры (1):

$$S_i := S_i(u_i), \quad 1 \leq i \leq m, \quad \text{и} \quad R'_{ij} = R'_{ji} := R'_{ij}(-u_i - u_j), \quad 1 \leq i < j \leq m,$$

(см. разделы 3.3 и 3.5). Для произвольной перестановки $(p_1, \dots, p_m)$ чисел $1, \dots, m$ мы вводим сокращенное обозначение

$$(2) \quad \langle S_{p_1}, \dots, S_{p_m} \rangle = S_{p_1}(R'_{p_1 p_2} \cdots R'_{p_1 p_m}) S_{p_2}(R'_{p_2 p_3} \cdots R'_{p_2 p_m}) \cdots S_{p_m}.$$

4.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Справедливо фундаментальное тождество* (ср. с (2.1.2))

$$(1) \quad R(u_1, \dots, u_m) \langle S_1, \dots, S_m \rangle = \langle S_m, \dots, S_1 \rangle R(u_1, \dots, u_m).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы докажем (1) в несколько шагов.

Шаг 1. Имеем следующие равенства:

$$\begin{aligned} (2) \quad & R_{ij} S_i R'_{ij} S_j = S_j R'_{ji} S_i R_{ij}, \\ (3) \quad & R_{ij} R'_{ik} R'_{jk} = R'_{jk} R'_{ik} R_{ij}, \end{aligned}$$

где i, j, k попарно различны. В самом деле, равенство (2) совпадает с четверным соотношением (3.6.2). Из тройного соотношения следует, что (3) эквивалентно следующему факту: отображение $T(u) \mapsto R'(-u)$, т.е.

$$t_{ij}(u) \mapsto \delta_{ij} + \theta_{ij} E_{-i, -j} u^{-1},$$

определяет гомоморфизм алгебр $Y(N) \rightarrow U(\mathfrak{gl}(N))$. Но это уже было доказано для отображения

$$t_{ij}(u) \mapsto \delta_{ij} + E_{ij} u^{-1}$$

(см. предложение 1.16). Остается заметить, что отображение $E_{ij} \mapsto \theta_{ij} E_{-i, -j}$ определяет автоморфизм алгебры $U(\mathfrak{gl}(N))$.

Шаг 2. Заметим, что (3) может быть переписано как

$$(4) \quad R_{ij} R'_{ki} R'_{kj} = R'_{kj} R'_{ki} R_{ij},$$

так как $R'_{ik} = R'_{ki}$ и $R'_{jk} = R'_{kj}$. Нам также потребуется следующее обобщение соотношения (3):

$$(5) \quad R_{ij} (R'_{ik_1} \dots R'_{ik_r}) (R'_{jk_1} \dots R'_{jk_r}) = (R'_{jk_1} \dots R'_{jk_r}) (R'_{ik_1} \dots R'_{ik_r}) R_{ij},$$

в предположении, что $i, j, k_1, \dots, k_r$ попарно различны.

Для того чтобы проверить (5), мы заметим, что R'_{ik_a} и R'_{jk_b} коммутируют, когда $a \neq b$, так что (5) может быть переписано как

$$R_{ij} \cdot \prod_{a=1}^r (R'_{ik_a} R'_{jk_a}) = \prod_{a=1}^r (R'_{jk_a} R'_{ik_a}) \cdot R_{ij},$$

но это равенство немедленно следует из (3).

Шаг 3. Докажем, что для любого $i = 1, \dots, m-1$ и для любой перестановки $(p_1, \dots, p_m)$ чисел $1, \dots, m$

$$(6) \quad R_{p_i p_{i+1}} \langle S_{p_1}, \dots, S_{p_m} \rangle = \langle S_{p_1}, \dots, S_{p_{i-1}}, S_{p_{i+1}}, S_{p_i}, S_{p_{i+2}}, \dots, S_{p_m} \rangle R_{p_i p_{i+1}}.$$

Сначала мы рассмотрим фрагмент произведения $\langle S_{p_1}, \dots, S_{p_m} \rangle$ (см. (4.1.2)), который предшествует элементу S_{p_i} . Все сомножители этого фрагмента коммутируют с $R_{p_i p_{i+1}}$, кроме $R'_{p_k p_i}$ и $R'_{p_k p_{i+1}}$, где $k = 1, \dots, i-1$. Для того чтобы переставить $R_{p_i p_{i+1}}$ с этими сомножителями, мы воспользуемся правилом

$$R_{p_i p_{i+1}} R'_{p_k p_i} R'_{p_k p_{i+1}} = R'_{p_k p_{i+1}} R'_{p_k p_i} R_{p_i p_{i+1}},$$

которое является частным случаем (4). После этих преобразований данный фрагмент принимает такой же вид, как и соответствующий фрагмент в правой части (6).

Затем рассмотрим фрагмент

$$(7) \quad S_{p_i} R'_{p_i p_{i+1}} \left(\prod_{k>i+1} R'_{p_i p_k} \right) S_{p_{i+1}} \left(\prod_{k>i+1} R'_{p_{i+1} p_k} \right).$$

Так как $R'_{p_i p_k}$ и $S_{p_{i+1}}$ коммутируют для любых $k > i + 1$, мы можем переписать (7) как

$$(8) \quad S_{p_i} R'_{p_i p_{i+1}} S_{p_{i+1}} \left(\prod_{k>i+1} R'_{p_i p_k} \right) \left(\prod_{k>i+1} R'_{p_{i+1} p_k} \right).$$

Для того чтобы переставить $R_{p_i p_{i+1}}$ с (8), мы воспользуемся тождествами

$$\begin{aligned} R_{p_i p_{i+1}} S_{p_i} R'_{p_i p_{i+1}} S_{p_{i+1}} &= S_{p_{i+1}} R'_{p_i p_{i+1}} S_{p_i} R_{p_i p_{i+1}}, \\ R_{p_i p_{i+1}} \left(\prod_{k>i+1} R'_{p_i p_k} \right) \left(\prod_{k>i+1} R'_{p_{i+1} p_k} \right) &= \left(\prod_{k>i+1} R'_{p_{i+1} p_k} \right) \left(\prod_{k>i+1} R'_{p_i p_k} \right) R_{p_i p_{i+1}}, \end{aligned}$$

которые являются частными случаями (2) и (5), соответственно. Затем мы перепишем $R'_{p_i p_{i+1}}$ как $R'_{p_{i+1} p_i}$ и переставим S_{p_i} с произведением

$$\prod_{k>i+1} R'_{p_{i+1} p_k}.$$

Опять же, после этих преобразований данный фрагмент принимает тот же вид, что и соответствующий фрагмент в правой части (6).

В-третьих, рассмотрим оставшийся фрагмент, который в точности есть $\langle S_{p_{i+2}}, \dots, S_{p_m} \rangle$. Все сомножители этого фрагмента коммутируют с $R_{p_i p_{i+1}}$; с другой стороны, этот фрагмент содержится в правой части (6) в той же самой форме.

Таким образом, доказательство (6) завершено.

Шаг 4. Наконец, заметим, что (1) может быть выведено из (6). Действительно, используя (6) повторно, мы переставим R_{12} с $\langle S_1, \dots, S_m \rangle$, затем мы переставим R_{13} с $\langle S_2, S_1, S_3, \dots, S_m \rangle$ и т. д. Суммарный эффект такой перестановки со всеми сомножителями R_{ij} , входящими в $R(u_1, \dots, u_m)$, очевидно, приводит к тому, что все сомножители S_i переставляются в обратном порядке, т.е. в точности так, как они входят в правую часть (1).

4.3. Заметим, что в случае скрученного янгиана может быть также использован морфизм вида (2.2.1) (см. замечание 2.2). Поэтому фундаментальное тождество (4.2.1) остается справедливым, когда переменные $u_1, \dots, u_m$ удовлетворяют некоторым соотношениям.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. В алгебре (4.1.1) с $t = N$ справедливо следующее тождество:

$$(1) \quad A_N S_1 R'_{12} \dots R'_{1N} S_2 \dots S_{N-1} R'_{N-1, N} S_N \\ = S_N R'_{N, N-1} \dots R'_{N1} S_{N-1} \dots S_2 R'_{21} S_1 A_N,$$

где $S_i = S_i(u - i + 1)$, $R'_{ij} = R'_{ij}(-2u + i + j - 2)$ и u — формальная переменная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $m = N$ и $u_i = u - i + 1$ для $i = 1, \dots, N$ в фундаментальном тождестве (4.2.1). Тогда, используя предложение 2.3, мы получаем равенство (1).

4.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Существует формальный ряд*

$$\text{sdet } S(u) := 1 + c_1 u^{-1} + c_2 u^{-2} + \dots \in Y^\pm(N)[[u^{-1}]]$$

такой, что обе части (4.3.1) равны $\text{sdet } S(u) A_N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство аналогично доказательству предложения 2.5. Требуемое утверждение следует из того, что A_N является одномерным проектором в $\mathcal{E}^{\otimes N}$ и каждый из элементов $S_i(u - i + 1)$, $1 \leq i \leq N$, и $R'_{ij}(-2u + i + j - 2)$, $1 \leq i, j \leq N$, $i \neq j$, является формальным рядом по u^{-1} , начинающимся с 1.

4.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Ряд $\text{sdet } S(u)$ называется *детерминантом Складина* матрицы $S(u)$.

Например, если $N = 2$, то $\text{sdet } S(u)$ равен

$$\begin{aligned} & s_{-1,-1}(u) s_{1,1}(u-1) - s_{1,-1}(u) s_{-1,1}(u-1) + \frac{s_{-1,-1}(u) \mp s_{1,1}(u)}{2u-1} s_{1,1}(u-1) \\ &= s_{-1,-1}(u-1) s_{1,1}(u) - s_{-1,1}(u-1) s_{1,-1}(u) + s_{-1,-1}(u-1) \frac{s_{1,1}(u) \mp s_{-1,-1}(u)}{2u-1}. \end{aligned}$$

Используя условие симметрии (3.6.4), мы можем переписать это следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{sdet } S(u) &= \frac{2u+1}{2u \pm 1} (s_{-1,-1}(u-1) s_{-1,-1}(-u) \mp s_{-1,1}(u-1) s_{1,-1}(-u)) \\ &= \frac{2u+1}{2u \pm 1} (s_{1,1}(-u) s_{1,1}(u-1) \mp s_{1,-1}(-u) s_{-1,1}(u-1)). \end{aligned}$$

Аналог этого выражения для $\text{sdet } S(u)$ с произвольным N дан в [35].

4.6. ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть p — произвольный элемент симметрической группы $\mathfrak{S}_N$. Заменяем множители $S_i(u - i + 1)$ и $R'_{ij}(-2u + i + j - 2)$ в тождестве (4.3.1), соответственно, на $S_{p(i)}(u - i + 1)$ и $R'_{p(i),p(j)}(-2u + i + j - 2)$. Тогда предложение 4.4 справедливо для того же самого ряда $\text{sdet } S(u)$. Это немедленно следует из равенств:

$$P A_N P^{-1} = A_N, \quad P S_i P^{-1} = S_{p(i)}, \quad P R'_{ij} P^{-1} = R'_{p(i),p(j)},$$

где P обозначает образ перестановки p в $\text{End } \mathcal{E}^{\otimes N}$.

4.7. ТЕОРЕМА. *Имеем*

$$\text{sdet } S(u) = \gamma_N(u) \text{qdet } T(u) \text{qdet } T(-u + N - 1),$$

где $\gamma_N(u) \equiv 1$ для $Y^+(N)$ и $\gamma_N(u) = \frac{2u+1}{2u-N+1}$ для $Y^-(N)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы используем тождество (4.3.1).

Шаг 1. Заметим, что $S_i = T_i T_i^\sigma$, где $T_i = T_i(u - i + 1)$ и σ означает инволютивный автоморфизм алгебры $Y(N)$ (см. следствие 3.4): $T^\sigma(u) = T^t(-u)$. Поэтому левая часть (4.3.1) имеет вид

$$(1) \quad A_N T_1 T_1^\sigma R'_{12} \dots R'_{1N} T_2 T_2^\sigma R'_{23} \dots R'_{2N} T_3 T_3^\sigma \dots T_{N-1} T_{N-1}^\sigma R'_{N-1,N} T_N T_N^\sigma,$$

где $R'_{ij} = R'_{ij}(-2u + i + j - 2)$. Из равенства (3.3.6) следует, что для $1 \leq i, j \leq N$, $i \neq j$,

$$(2) \quad T_i^\sigma R'_{ij} T_j = T_j R'_{ji} T_i^\sigma.$$

Так как элементы T_i и T_i^σ коммутируют с R'_{jk} для $i \neq j, k$, мы можем переписать (1) в следующем виде:

$$A_N T_1 (T_1^\sigma R'_{12} T_2) R'_{13} \dots R'_{1N} (T_2^\sigma R'_{23} T_3) \dots (T_{N-1}^\sigma R'_{N-1,N} T_N) T_N^\sigma.$$

Применяя (2) к произведениям, заключенным в скобки, мы получаем выражение

$$A_N T_1 T_2 R'_{12} (T_1^\sigma R'_{13} T_3) R'_{14} \dots R'_{1N} R'_{23} (T_2^\sigma R'_{24} T_4) \dots \dots (T_{N-2}^\sigma R'_{N-2,N} T_N) R'_{N-1,N} T_{N-1}^\sigma T_N^\sigma.$$

Далее, применяя (2) повторно, мы приводим (1) к виду

$$A_N T_1 \dots T_N R'_{12} \dots R'_{1N} R'_{23} \dots R'_{2N} \dots R'_{N-1,N} T_1^\sigma \dots T_N^\sigma.$$

Заменяя здесь A_N на A_N^2 и используя предложение 2.4, мы преобразовываем последнее выражение в

$$(3) \quad A_N T_N \dots T_1 A_N R'_{12} \dots R'_{1N} R'_{23} \dots R'_{2N} \dots R'_{N-1,N} T_1^\sigma \dots T_N^\sigma.$$

Далее мы будем рассматривать алгебры $Y^+(N)$ и $Y^-(N)$ отдельно.

Шаг 2. Сначала покажем, что в случае $Y^+(N)$

$$(4) \quad A_N R'_{12} \dots R'_{1N} R'_{23} \dots R'_{2N} \dots R'_{N-1,N} = A_N.$$

В самом деле, $A_N = \frac{1}{2} A_N (1 - P_{ij})$ для всех $i \neq j$. Однако,

$$(1 - P_{ij}) R'_{ij} = (1 - P_{ij}) \left(1 + \frac{1}{2u - i - j + 2} Q_{ij} \right) = 1 - P_{ij},$$

так как $P_{ij} Q_{ij} = Q_{ij}$ в силу предложения 3.2. Поэтому $A_N R'_{ij} = A_N$, и (4) доказано. Следовательно, (3) имеет вид

$$A_N T_N \dots T_1 A_N T_1^\sigma \dots T_N^\sigma.$$

Так как σ является автоморфизмом алгебры $Y(N)$, это равно

$$A_N T_N \dots T_1 (A_N T_1 \dots T_N)^\sigma = A_N \text{ qdet } T(u) \sigma(\text{qdet } T(u))$$

в силу предложения 2.5. Наконец, применяя предложение 4.4, мы приходим к выводу, что

$$\text{sdet } S(u) = \text{qdet } T(u) \sigma(\text{qdet } T(u)).$$

Шаг 3. В случае $Y^-(N)$, $N = 2n$, мы проверим, что

$$(5) \quad A_N R'_{12} \dots R'_{1N} R'_{23} \dots R'_{2N} \dots R'_{N-1,N} = \frac{2u+1}{2u-N+1} A_N.$$

Сперва заметим, что из фундаментального тождества (4.2.1) следует соотношение

$$(6) \quad A_N R'_{12} \dots R'_{1N} \dots R'_{N-1,N} = R'_{N-1,N} \dots R'_{N,1} \dots R'_{21} A_N.$$

Для того чтобы доказать это, мы рассмотрим тривиальный гомоморфизм $Y^-(N) \rightarrow \mathbb{C}$, $s_{ij}(u) \mapsto \delta_{ij}$, $-n \leq i, j \leq n$, и положим $u_i = u - i + 1$ для $i = 1, \dots, N$. Тогда тождество (4.2.1) переходит в (6). Таким образом,

$$(7) \quad A_N R'_{12} \dots R'_{1N} \dots R'_{N-1,N} = \gamma_N(u) A_N$$

для некоторой скалярной функции $\gamma_N(u)$. Чтобы вычислить ее, мы применим левую часть (7) к вектору

$$v = e_{-n} \otimes \dots \otimes e_{-1} \otimes e_1 \otimes \dots \otimes e_n \in \mathcal{E}^{\otimes N}.$$

Ясно, что $R'_{ij}v = v$ для $n+1 \leq i < j \leq N$. Пусть $0 \leq a \leq n$. Используя индукцию по a , мы докажем, что

$$(8) \quad A_N R'_{12} \dots R'_{1N} \dots R'_{a,a+1} \dots R'_{a,N} v = \frac{2u+1}{2u-2a+1} A_N v.$$

Тогда в случае $a = n$ мы получим требуемое равенство $\gamma_N(u) = \frac{2u+1}{2u-N+1}$. Пусть $A_m^{(i)}$ означает нормализованный антисимметризатор по индексам $\{i, i+1, \dots, m\}$ (см. раздел 2.3), так что $A_N^{(1)}$ совпадает с A_N . Тогда $A_N = A_N A_N^{(2)}$ и

$$(9) \quad A_N^{(2)} R'_{12} \dots R'_{1N} = R'_{1N} \dots R'_{12} A_N^{(2)}.$$

В самом деле, в силу предложения 2.3 мы можем записать

$$A_N^{(2)} = \frac{1}{(N-1)!} R_{N-1,N} R_{N-2,N} R_{N-2,N-1} \dots R_{2N} \dots R_{23}.$$

Используя соотношение (4.2.3), мы получаем

$$R_{2N} \dots R_{23} R'_{12} R'_{13} \dots R'_{1N} = R'_{13} \dots R'_{1N} R'_{12} R_{2N} \dots R_{23}.$$

Легкое рассуждение по индукции дает (9). Аналогично, $A_N^{(m+1)} = A_N^{(m+1)} A_N^{(m+2)}$ для $m = 1, \dots, N-2$, так что левая часть (8) может быть переписана как

$$A_N^{(1)} R'_{1N} \dots R'_{12} A_N^{(2)} R'_{2N} \dots R'_{23} A_N^{(3)} \dots A_N^{(a)} R'_{aN} \dots R'_{a,a+1} A_N^{(a+1)} v.$$

Поэтому, чтобы проверить (8), мы можем заменить v на произвольный вектор вида

$$e_{-n} \otimes \cdots \otimes e_{-(n-a+1)} \otimes e_{p_1} \otimes \cdots \otimes e_{p_{N-a}},$$

где $(p_1, \dots, p_{N-a})$ является перестановкой индексов $-(n-a), -(n-a)+1, \dots, n$. Зафиксируем такой вектор v' , для которого $p_1 = n-a+1$. Тогда $R'_{am} v' = v'$ для $m = a+2, \dots, N$, в то время как $R'_{a,a+1} v'$ равно

$$v' + \frac{1}{2u-2a+1} \sum_k \theta_{k, -(n-a+1)} e_{-n} \otimes \cdots \otimes e_{-(n-a+2)} \otimes e_k \otimes e_{-k} \otimes e_{p_2} \otimes \cdots \otimes e_{p_{N-a}}.$$

Пусть w означает правую часть последнего равенства. Заметим, что

$$A_N^{(a)} e_{-n} \otimes \cdots \otimes e_{-(n-a+2)} \otimes e_k \otimes e_{-k} \otimes e_{p_2} \otimes \cdots \otimes e_{p_{N-a}} = 0$$

за исключением случая $k = \pm(n-a+1)$. Следовательно, по индукционному предположению,

$$A_N R'_{12} \cdots R'_{1N} \cdots R'_{a-1,a} \cdots R'_{a-1,N} w = \frac{2u+1}{2u-2a+3} A_N w,$$

в то время как $A_N w = \frac{2u-2a+3}{2u-2a+1} A_N v'$. Таким образом, (8) и, следовательно, (5) доказаны.

Повторяя те же рассуждения, что и для случая $Y^+(N)$, мы получаем из (3) и (5), что

$$\text{sdet } S(u) = \frac{2u+1}{2u-N+1} \text{qdet } T(u) \sigma(\text{qdet } T(u)).$$

Шаг 4. Остается проверить, что

$$\sigma(\text{qdet } T(u)) = \text{qdet } T(-u+N-1).$$

Мы сделаем это одновременно для обеих алгебр $Y^+(N)$ и $Y^-(N)$. В силу предложения 2.7, имеем

$$\text{qdet } T(u) = \sum_{p \in \mathfrak{S}_N} \text{sgn}(p) t_{-n, p(-n)}(u-N+1) \cdots t_{n, p(n)}(u),$$

следовательно,

$$\sigma(\text{qdet } T(u)) = \sum_{p \in \mathfrak{S}_N} \text{sgn}(p) \theta_{-n, p(-n)} \cdots \theta_{n, p(n)} t_{-p(-n), n}(-u+N-1) \cdots t_{-p(n), -n}(-u).$$

Пусть q будет перестановкой индексов $(-n, -n+1, \dots, n)$ такой, что $q(i) = -i$. Тогда перестановка $p' = (-p(-n), \dots, -p(n))$ равна qp . Так как

$$\theta_{-n, p(-n)} \cdots \theta_{n, p(n)} = 1,$$

то, используя замечание 2.8, мы получаем

$$\begin{aligned} \sigma(\text{qdet } T(u)) &= \sum_{p' \in \mathfrak{S}_N} \text{sgn}(qp') t_{p'(-n), n}(-u+N-1) \cdots t_{p'(n), -n}(-u) \\ &= \text{sgn}(q) \sum_{p' \in \mathfrak{S}_N} \text{sgn}(p') t_{p'(-n), q(-n)}(-u+N-1) \cdots t_{p'(n), q(n)}(-u) \\ &= \text{qdet } T(-u+N-1), \end{aligned}$$

что доказывает теорему.

4.8. ТЕОРЕМА. $\text{sdet } S(u)$ *лежит в центре алгебры* $Y^\pm(N)$, *т.е. все его коэффициенты являются центральными элементами.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и при доказательстве теоремы 2.10, мы рассмотрим тензорное пространство $\mathcal{E}^{\otimes(N+1)}$, где копии пространства $\mathcal{E}$ занумерованы индексами $0, 1, \dots, N$. Положим

$$(1) \quad S_0 := S_0(v), \quad S_i := S_i(u - i + 1), \quad i = 1, \dots, N.$$

Тогда утверждение теоремы следует из равенства

$$(2) \quad S_0(v) \text{sdet } S(u) A_N = \text{sdet } S(u) S_0(v) A_N.$$

Чтобы доказать (2), мы используем фундаментальное тождество (4.2.1). Имеем

$$(3) \quad R(v, u, u - 1, \dots, u - N + 1) S_0 R'_{01} \dots R'_{0N} S_1 R'_{12} \dots R'_{1N} S_2 \dots S_{N-1} R'_{N-1, N} S_N \\ = S_N R'_{N, N-1} \dots R'_{N0} S_{N-1} \dots S_1 R'_{10} S_0 R(v, u, u - 1, \dots, u - N + 1).$$

В разделе 2.10 было доказано, что

$$R(v, u, u - 1, \dots, u - N + 1) = N! f(u, v) A_N,$$

где $f(u, v)$ определена в (2.10.8). Так как S_0 и A_N коммутируют, левая часть (3) имеет вид

$$(4) \quad N! f(u, v) S_0 A_N R'_{01} \dots R'_{0N} S_1 R'_{12} \dots R'_{1N} S_2 \dots S_N.$$

Однако, из (4.7.9) следует, что

$$A_N R'_{01} \dots R'_{0N} = A_N^2 R'_{01} \dots R'_{0N} = A_N R'_{0N} \dots R'_{01} A_N.$$

В силу замечания 1.15,

$$A_N R'_{0N} \dots R'_{01} A_N = A_N (\tilde{R}_{01} \dots \tilde{R}_{0N})^{t_0} A_N = (A_N \tilde{R}_{01} \dots \tilde{R}_{0N} A_N)^{t_0},$$

где $\tilde{R}_{0i} = R_{0i}(-v - u + i - 1)$. Повторяя рассуждения доказательства равенства (2.10.8), мы получаем, что

$$A_N \tilde{R}_{01} \dots \tilde{R}_{0N} A_N = g(u, v) A_N,$$

где $g(u, v)$ является ненулевым элементом алгебры $\mathbb{C}[u][[v^{-1}]]$. Таким образом, (4) имеет вид

$$N! f(u, v) g(u, v) S_0(v) \text{sdet } S(u) A_N.$$

Аналогичные преобразования позволяют нам переписать правую часть (3) как

$$N! f(u, v) g(u, v) \text{sdet } S(u) S_0(v) A_N,$$

что доказывает теорему.

4.9. ЗАМЕЧАНИЕ. Можно доказать теорему 4.8, используя вложение $Y^\pm(N) \hookrightarrow Y(N)$. Для этого заметим, что из теоремы 4.7 следует, что все коэффициенты $\text{sdet } S(u)$ принадлежат центру алгебры $Y(N)$ и, следовательно, центру ее подалгебры $Y^\pm(N)$.

4.10. При доказательстве теоремы 4.11 будет использовано следующее обобщение предложения 2.12. Пусть $\mathfrak{a}$ является алгеброй Ли и σ — ее инволютивный автоморфизм. Обозначим через $\mathfrak{a}_0$ (соответственно, $\mathfrak{a}_1$) множество элементов $a \in \mathfrak{a}$ таких, что $\sigma(a) = a$ (соответственно, $\sigma(a) = -a$). Пусть $\mathfrak{a}[x]^\sigma$ обозначает соответствующую алгебру Ли скрученных полиномиальных токов,

$$\mathfrak{a}[x]^\sigma = \mathfrak{a}_0 \oplus \mathfrak{a}_1 x \oplus \mathfrak{a}_0 x^2 \oplus \mathfrak{a}_1 x^3 \oplus \dots$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Предположим, что центр алгебры Ли $\mathfrak{a}_0$ тривиален и $\mathfrak{a}_0$ -модуль $\mathfrak{a}_1$ не имеет нетривиальных инвариантных элементов. Тогда центр универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{a}[x]^\sigma)$ тривиален.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{f_1, \dots, f_r\}$ и $\{e_1, \dots, e_n\}$ являются базисами, соответственно, в $\mathfrak{a}_0$ и $\mathfrak{a}_1$. Тогда для $1 \leq i \leq r$ и $1 \leq j \leq n$

$$[f_i, e_j] = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k e_k,$$

где c_{ij}^k — структурные константы. Как и при доказательстве предложения 2.12, достаточно проверить, что если элемент $A \in S(\mathfrak{a}[x]^\sigma)$ инвариантен относительно присоединенного действия алгебры $\mathfrak{a}[x]^\sigma$, то $A = 0$. Пусть m является максимальным целым, таким что элемент $e_i x^m$ присутствует в A для некоторого $i \in \{1, \dots, n\}$. Тогда A может быть переписано в виде

$$A = \sum_d A_d (e_1 x^m)^{d_1} \dots (e_n x^m)^{d_n},$$

где $d = (d_1, \dots, d_n)$, $d_1 \geq 0, \dots, d_n \geq 0$ и A_d являются полиномами по переменным $e_i x^s$, $s < m$, с коэффициентами из подалгебры $S(\mathfrak{a}_0[x^2])$. Точно так же, как и при доказательстве предложения 2.12, мы выводим равенства (2.12.2) и (2.12.3) из соотношений $\text{ad}(f_i x)(A) = 0$ для $i = 1, \dots, r$. Снова повторяя рассуждения доказательства предложения 2.12, мы заключаем, что $A_d = 0$ для любого $d \neq 0$, т.е. A принадлежит подалгебре $S(\mathfrak{a}_0[x^2])$. Для завершения доказательства остается применить предложение 2.12 к алгебре Ли $\mathfrak{a}_0$.

4.11. Из теоремы 4.7 следует, что детерминант Складина матрицы $S(u)$ удовлетворяет соотношению

$$\gamma_N(u) \text{sdet } S(-u + N - 1) = \gamma_N(-u + N - 1) \text{sdet } S(u).$$

Поэтому, в противоположность случаю $Y(N)$, коэффициенты $c_1, c_2, \dots$ для $\text{sdet } S(u)$ не являются алгебраически независимыми. Вместо теоремы 2.13 имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА. *Коэффициенты $c_2, c_4, c_6, \dots$ ряда $\text{sdet } S(u)$ являются алгебраически независимыми и порождают центр алгебры $Y^\pm(N)$. В частности, $c_1, c_3, \dots$ могут быть выражены в терминах $c_2, c_4, \dots$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы используем ту же идею, что и при доказательстве теоремы 2.13. Она состоит в сведении данного утверждения к его аналогу для алгебры $\mathrm{gr}_2 Y^\pm(N)$, которая изоморфна $U(\mathfrak{gl}(N)[x]^\sigma)$ по теореме 3.15. Как и в разделе 2.13, мы положим

$$Z = E_{-n, -n} + E_{-n+1, -n+1} + \cdots + E_{n, n}.$$

Шаг 1. Для любых $m = 1, 2, \dots$ коэффициент c_{2m} в $\mathrm{sdet} S(u)$ имеет степень $2m - 1$ относительно $\deg_2$, и его образ в $(2m - 1)$ -й компоненте алгебры $\mathrm{gr}_2 Y^\pm(N)$ совпадает с Zx^{2m-1} . В самом деле, из предложения 4.4 следует, что

$$(1) \quad \begin{aligned} \mathrm{sdet} S(u) A_N &= A_N \left(S_1(u) \cdots S_N(u - N + 1) \right. \\ &\quad + \frac{1}{2u - 1} S_1(u) Q_{12} S_2(u - 1) \cdots S_N(u - N + 1) + \cdots \\ &\quad \cdots + \frac{1}{2u - 2N + 3} S_1(u) \cdots S_{N-1}(u - N + 2) Q_{N-1, N} S_N(u - N + 1) + \cdots \\ &\quad \cdots + \prod_{1 \leq i < j \leq N} \frac{1}{2u - i - j + 1} S_1(u) Q_{12} \cdots Q_{1N} \\ &\quad \left. \times S_2(u - 1) Q_{23} \cdots Q_{2N} S_3(u - 2) \cdots S_N(u - N + 1) \right). \end{aligned}$$

Применим обе части (1) к вектору

$$v = e_{-n} \otimes e_{-n+1} \otimes \cdots \otimes e_n \in \mathcal{E}^{\otimes N}.$$

Сравнивая коэффициенты при $u^{-M} A_N v$ в левой и правой частях, мы находим, что c_M является линейной комбинацией мономов вида

$$(2) \quad s_{i_1 j_1}^{(M_1)} \cdots s_{i_N j_N}^{(M_N)}, \quad \text{где } M_1 + \cdots + M_N \leq M.$$

Более того, мономы (2) с $M_1 + \cdots + M_N = M$ возникают только из первого слагаемого из правой части (1). Ясно, что такие мономы имеют вид

$$s_{p(-n), -n}^{(M_1)} \cdots s_{p(n), n}^{(M_N)}, \quad p \in \mathfrak{S}_N.$$

Из определения 1.20 степени $\deg_2$ мы получаем следующую формулу:

$$c_M = s_{-n, -n}^{(M)} + \cdots + s_{n, n}^{(M)} + (\text{слагаемые степени } < M - 1),$$

которая является аналогом (2.13.3) для алгебры $Y^\pm(N)$. Это доказывает утверждение и тот факт, что элементы $c_2, c_4, \dots$ являются алгебраически независимыми.

Шаг 2. Теперь утверждение теоремы будет следовать из того факта, что центр алгебры $U(\mathfrak{gl}(N)[x]^\sigma)$ порожден элементами $Zx, Zx^3, Zx^5, \dots$. Чтобы увидеть это, мы заметим, что

$$U(\mathfrak{gl}(N)[x]^\sigma) = \mathbb{C}[Zx, Zx^3, \dots] \otimes U(\mathfrak{sl}(N)[x]^\sigma).$$

Поэтому остается доказать, что центр алгебры $U(\mathfrak{sl}(N)[x]^\sigma)$ тривиален. Но это следует из предложения 4.10, примененного к алгебре Ли $\mathfrak{a} = \mathfrak{sl}(N)$ и инволюции σ :

$$\sigma(E_{ij}) = -\theta_{ij} E_{-j, -i}.$$

Теорема доказана.

4.12. ЗАМЕЧАНИЕ. Из теорем 4.7 и 4.11 следует, что центр алгебры $Y^\pm(N)$ содержится в центре алгебры $Y(N)$. Более того, если N четное, то центры алгебр $Y^+(N)$ и $Y^-(N)$ совпадают друг с другом как подалгебры в $Y(N)$.

4.13. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Положим

$$SY^\pm(N) := SY(N) \cap Y^\pm(N).$$

Эту алгебру назовем *специальным скрученным янгианом*. Другими словами, $SY^\pm(N)$ можно понимать как подалгебру $Y^\pm(N)$, состоящую из элементов, устойчивых относительно автоморфизмов вида ν_g (см. раздел 3.10).

4.14. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Алгебра $Y^\pm(N)$ изоморфна тензорному произведению ее центра $Z^\pm(N)$ и подалгебры $SY^\pm(N)$:

$$(1) \quad Y^\pm(N) = Z^\pm(N) \otimes SY^\pm(N).$$

В частности, центр алгебры $SY^\pm(N)$ тривиален.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале докажем, что

$$(2) \quad Y^\pm(N) = Z^\pm(N) SY^\pm(N).$$

Мы будем использовать обозначения раздела 2.16. Рассмотрим ряд

$$\sigma_{ij}(u) = (\tilde{d}(u)\tilde{d}(-u))^{-1} s_{ij}(u), \quad -n \leq i, j \leq n;$$

в силу (3.5.2) он совпадает с

$$\sum_a \theta_{ja} \tau_{ia}(u) \tau_{-j, -a}(-u).$$

Проверим, что все коэффициенты ряда $\tilde{d}(u)\tilde{d}(-u)$ принадлежат $Z^\pm(N)$. По теореме 4.7,

$$\begin{aligned} \gamma_N(u)^{-1} \text{sdet } S(u) &= \text{qdet } T(u) \text{qdet } T(-u + N - 1) \\ &= (\tilde{d}(u)\tilde{d}(-u))(\tilde{d}(u-1)\tilde{d}(-u+1)) \cdots (\tilde{d}(u-N+1)\tilde{d}(-u+N-1)). \end{aligned}$$

Из предложения 2.15 следует, что все коэффициенты ряда $\tilde{d}(u)\tilde{d}(-u)$ могут быть записаны как полиномы от коэффициентов ряда $\text{sdet } S(u)$. По теореме 4.8, это доказывает, что $\tilde{d}(u)\tilde{d}(-u) \in Z^\pm(N)[[u^{-1}]]$. Заметим, что $\sigma_{ij}(u) \in SY^\pm(N)[[u^{-1}]]$, так как эти ряды являются устойчивыми относительно всех автоморфизмов ν_g (см. (2.16.1) и (3.10.1)). Теперь (2) следует из разложения

$$s_{ij}(u) = \tilde{d}(u)\tilde{d}(-u)\sigma_{ij}(u), \quad -n \leq i, j \leq n.$$

Наконец, разложение (1) является следствием предложения 2.16 и того факта, что $Z^\pm(N) \subset Z(N)$ и $SY^\pm(N) \subset SY(N)$.

4.15. СЛЕДСТВИЕ. *Подалгебра $\mathrm{SY}^\pm(N) \subset \mathrm{SY}(N)$ порождается всеми коэффициентами рядов $\sigma_{ij}(u)$, $-n \leq i, j \leq n$.*

Доказательство совпадает с доказательством следствия 2.17.

4.16. СЛЕДСТВИЕ. *Алгебра $\mathrm{SY}^\pm(N)$ изоморфна факторалгебре*

$$\mathrm{Y}^\pm(N)/(\mathrm{sdet} S(u) = 1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предложения 4.14 следует, что $\mathrm{Y}^\pm(N) = \mathrm{I}^\pm \oplus \mathrm{SY}^\pm(N)$, где $\mathrm{I}^\pm$ является идеалом в $\mathrm{Y}^\pm(N)$, порожденным всеми коэффициентами ряда $\mathrm{sdet} S(u)$. Это доказывает утверждение.

4.17. Скрученный янгиан $\mathrm{Y}^\pm(N)$, по-видимому, не обладает никакой естественной структурой алгебры Хопфа. Тем не менее, справедливо следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *$\mathrm{Y}^\pm(N)$ является левым коидеалом алгебры Хопфа $\mathrm{Y}(N)$, т.е.*

$$\Delta(\mathrm{Y}^\pm(N)) \subset \mathrm{Y}(N) \otimes \mathrm{Y}^\pm(N).$$

Более того,

$$(1) \quad \Delta(s_{ij}(u)) = \sum_{k,l} \theta_{lj} t_{ik}(u) t_{-j,-l}(-u) \otimes s_{kl}(u),$$

где $-n \leq i, j \leq n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать (1). Мы используем обозначения раздела 1.28. Ясно, что

$$\Delta(T^t(-u)) = T_{[2]}^t(-u) T_{[1]}^t(-u).$$

Поэтому

$$\Delta(S(u)) = \Delta(T(u) T^t(-u)) = T_{[1]}(u) T_{[2]}(u) T_{[2]}^t(-u) T_{[1]}^t(-u) = T_{[1]}(u) S_{[2]}(u) T_{[1]}^t(-u).$$

Переписывая это в терминах матричных элементов, мы получаем (1).

4.18. СЛЕДСТВИЕ. *$\mathrm{SY}^\pm(N)$ является левым коидеалом алгебры Хопфа $\mathrm{SY}(N)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам надо проверить, что

$$\Delta(\mathrm{SY}^\pm(N)) \subset \mathrm{SY}(N) \otimes \mathrm{SY}^\pm(N).$$

Используя следствие 2.20 и предложение 4.17, мы получаем

$$\begin{aligned} \Delta(\sigma_{ij}(u)) &= \Delta((\tilde{d}(u) \tilde{d}(-u))^{-1} s_{ij}(u)) \\ &= ((\tilde{d}(u) \tilde{d}(-u))^{-1} \otimes (\tilde{d}(u) \tilde{d}(-u))^{-1}) \sum_{k,l} \theta_{lj} t_{ik}(u) t_{-j,-l}(-u) \otimes s_{kl}(u) \\ &= \sum_{k,l} \theta_{lj} \tau_{ik}(u) \tau_{-j,-l}(-u) \otimes \sigma_{kl}(u). \end{aligned}$$

Тогда утверждение следует из следствия 4.15.

4.19. КОММЕНТАРИЙ. Результаты этого раздела, так же как и результаты раздела 3, были анонсированы Ольшанским [43]. В [43] детерминант Складина $\text{sdet } S(u)$ назывался “двойным квантовым детерминантом” и обозначался через $\text{ddet } S(u)$. Мы считаем, что новая терминология, примененная в настоящей работе, является более выразительной. Она мотивирована тем фактом, что Е. К. Складин был первым, кто определил новый тип детерминанта, в котором между матричными коэффициентами вставлены промежуточные множители (см. [49]). Одно из различий между алгебрами, изученными в [49], и скрученными янгианами состоит в том, что здесь мы должны использовать в качестве промежуточных множителей R' -матрицы вместо складинских R^{-1} .

§ 5. Квантовая контракция и квантовый аналог формулы Лиувилля для янгиана

Здесь мы развиваем другой подход к исследованию структуры янгиана. Этот подход основан на использовании одномерного проектора Q , отличного от A_N . Мы строим ряд $z(u)$ (называемый квантовой контракцией матрицы $T(u)$), чьи коэффициенты принадлежат центру алгебры $Y(N)$ и порождают его. Мы устанавливаем связь между квантовой контракцией и квантовым детерминантом матрицы $T(u)$ (квантовая формула Лиувилля). Затем мы вычисляем квадрат отображения антипода S .

5.1. Мы будем использовать обозначения § 1 и § 2. Здесь t будет обозначать обычное транспонирование, для которого положим $(E_{ij})^t = E_{ji}$. Положим

$$(1) \quad \widehat{T}(u) = (T^t(u))^{-1}, \quad \widehat{R}(u) = (R'(u))^{-1},$$

где $R'(u) := R^{t_1}(u) = R^{t_2}(u) = 1 - Qu^{-1}$, и

$$Q := P^{t_1} = P^{t_2} = \sum_{i,j} E_{ij} \otimes E_{ij}.$$

Простое вычисление (ср. с предложением 3.2) показывает, что

$$(2) \quad Q^2 = NQ \quad \text{и} \quad Q\mathcal{E}^{\otimes 2} = \mathbb{C}\eta,$$

где $\eta = e_1 \otimes e_1 + \cdots + e_N \otimes e_N$, так что $N^{-1}Q$ является одномерным проектором в $\mathcal{E}^{\otimes 2}$. Из первого равенства в (3) следует, что

$$(1 - Qu^{-1})(1 + Q(u - N)^{-1}) = 1.$$

Поэтому мы имеем $\widehat{R}(u) = 1 + Q(u - N)^{-1}$.

5.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Справедливо следующее тождество:*

$$(1) \quad Q\widehat{T}_1(u)T_2(u - N) = T_2(u - N)\widehat{T}_1(u)Q.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Начнем с тройного соотношения (1.8.1):

$$(2) \quad R_{12}T_1T_2 = T_2T_1R_{12},$$

где $R_{12} = R_{12}(u_1 - u_2)$, $T_1 = T_1(u_1)$, $T_2 = T_2(u_2)$. Далее, мы применяем транспонирование t_1 к обеим частям (2). В силу замечания 1.15, мы получаем

$$T_1^{t_1}R'_{12}T_2 = T_2R'_{12}T_1^{t_1}.$$

После умножения обеих частей последнего равенства на $(T_1^{t_1})^{-1}$ и $(R'_{12})^{-1}$ мы получаем, что

$$(3) \quad T_2\widehat{T}_1\widehat{R}_{12} = \widehat{R}_{12}\widehat{T}_1T_2.$$

Теперь умножим (3) на $u_1 - u_2 - N$ и положим $u_1 = u$, $u_2 = u - N$. Тогда (3) переходит в (1). (Другими словами, мы используем тот факт, что рациональная функция $\widehat{R}(u)$ от переменной u со значениями в $\text{End } \mathcal{E}^{\otimes 2}$ имеет простой полюс в точке $u = N$ и $\text{res}_{u=N} \widehat{R}(u) = Q$.)

5.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Существует формальный ряд*

$$z(u) = 1 + z_1u^{-1} + z_2u^{-2} + \dots \in Y(N)[[u^{-1}]]$$

такой, что (5.2.1) равно $z(u)Q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из второго равенства в (5.1.2) следует, что (5.2.1) равно произведению Q на некоторый формальный ряд $z(u)$ по u^{-1} с коэффициентами в $Y(N)$. Так как коэффициенты при u^0 рядов $\widehat{T}_1(u)$ и $T_2(u - N)$ равны 1, то же самое верно и для $z(u)$.

Мы будем называть ряд $z(u)$ *квантовой контракцией* (матрицы $T(u)$).

5.4. Пусть $t'_{ij}(u)$, $1 \leq i, j \leq N$, означает образ ряда $t_{ij}(u)$ при отображении антипода $S: T(u) \mapsto T^{-1}(u)$, т.е. $t'_{ij}(u)$ является матричным элементом матрицы $T^{-1}(u)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Для любых $i = 1, \dots, N$*

$$(1) \quad z^{-1}(u) = \sum_{a=1}^N t_{ai}(u)t'_{ia}(u - N)$$

$$(2) \quad = \sum_{a=1}^N t'_{ai}(u - N)t_{ia}(u),$$

и, следовательно,

$$z^{-1}(u) = \frac{1}{N} \text{tr}(T(u)T^{-1}(u - N)) = \frac{1}{N} \text{tr}(T^{-1}(u - N)T(u)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что

$$1 = \widehat{T}_1(u)T_2(u-N)T_2^{-1}(u-N)T_1^t(u) = T_1^t(u)T_2^{-1}(u-N)T_2(u-N)\widehat{T}_1(u).$$

Следовательно, в силу предложения 5.3,

$$Q = Q\widehat{T}_1(u)T_2(u-N)T_2^{-1}(u-N)T_1^t(u) = z(u)QT_2^{-1}(u-N)T_1^t(u).$$

Аналогично,

$$T_1^t(u)T_2^{-1}(u-N)Qz(u) = Q.$$

Таким образом,

$$(3) \quad QT_2^{-1}(u-N)T_1^t(u) = T_1^t(u)T_2^{-1}(u-N)Q = Qz^{-1}(u) = z^{-1}(u)Q.$$

С другой стороны, имеем

$$\begin{aligned} T_1^t(u)T_2^{-1}(u-N)Q(e_1 \otimes e_1) &= T_1^t(u)T_2^{-1}(u-N) \sum_a e_a \otimes e_a \\ &= \sum_{a,i,j} t_{ai}(u)t'_{ja}(u-N)(e_i \otimes e_j). \end{aligned}$$

Поэтому, в силу (3),

$$(4) \quad \delta_{ij}z^{-1}(u) = \sum_a t_{ai}(u)t'_{ja}(u-N),$$

что является легким обобщением (1) и будет использовано далее.

Чтобы доказать (2), мы применяем соотношение

$$z^{-1}(u)Q = QT_2^{-1}(u-N)T_1^t(u)$$

к вектору $e_i \otimes e_i$. Тогда вычисление, аналогичное приведенному выше, показывает, что коэффициенты вектора η (см. (5.1.4)) в левой и правой частях совпадают с теми же коэффициентами в (2).

5.5. ТЕОРЕМА. *Все коэффициенты ряда $z(u)$ принадлежат центру алгебры $Y(N)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим тензорное пространство $\mathcal{E}^{\otimes 3}$, в котором копии пространства $\mathcal{E}$ пронумерованы индексами 0, 1, 2, и положим $T_i = T_i(u_i)$, $i = 0, 1, 2$, для формальных переменных u_0, u_1, u_2 . Тогда утверждение теоремы будет следовать из тождества

$$(1) \quad T_0z(u_1)Q_{12} = z(u_1)T_0Q_{12}.$$

Шаг 1. Докажем вспомогательное тождество

$$(2) \quad R_{20}\widehat{R}_{10}\widehat{R}_{12} = \widehat{R}_{12}\widehat{R}_{10}R_{20},$$

где $R_{ij} = R_{ij}(u_i - u_j)$. Применяя транспонирование t_1 к обеим частям тождества Янга-Бакстера

$$R_{12}R_{10}R_{20} = R_{20}R_{10}R_{12},$$

мы получаем (см. замечание 1.15), что

$$R_{10}^{t_1} R_{12}^{t_1} R_{20} = R_{20} R_{12}^{t_1} R_{10}^{t_1}.$$

Чтобы получить (2), достаточно теперь умножить обе части этого тождества на каждую из матриц $(R_{10}^{t_1})^{-1}$ и $(R_{12}^{t_1})^{-1}$ слева и справа.

Нам также потребуется другое тождество

$$(3) \quad R_{20} \hat{R}_{10} Q_{12} = Q_{12} \hat{R}_{10} R_{20} = Q_{12} (1 - (u_0 - u_2)^{-2}), \quad u_1 - u_2 = N.$$

Чтобы доказать первое равенство в (3), мы возьмем вычеты в обеих частях (2) в точке $u_1 - u_2 = N$. В силу (5.1.4), чтобы проверить второе равенство в (3), достаточно применить $Q_{12} \hat{R}_{10} R_{20}$ к базисным векторам $e_i \otimes e_1 \otimes e_1$, $1 \leq i \leq N$. Имеем

$$\begin{aligned} & Q_{12} \hat{R}_{10} R_{20} (e_i \otimes e_1 \otimes e_1) \\ &= Q_{12} \hat{R}_{10} \left(e_i \otimes e_1 \otimes e_1 - \frac{1}{u_2 - u_0} e_1 \otimes e_1 \otimes e_i \right) \\ &= Q_{12} \left(e_i \otimes e_1 \otimes e_1 - \frac{1}{u_2 - u_0} e_1 \otimes e_1 \otimes e_i \right. \\ &\quad \left. + \frac{\delta_{i1}}{u_1 - u_0 - N} \sum_j e_j \otimes e_j \otimes e_1 - \frac{1}{(u_2 - u_0)(u_1 - u_0 - N)} \sum_j e_j \otimes e_j \otimes e_i \right) \\ &= e_i \otimes \eta - \frac{\delta_{i1}}{u_2 - u_0} e_1 \otimes \eta + \frac{\delta_{i1}}{u_1 - u_0 - N} e_1 \otimes \eta - \frac{1}{(u_2 - u_0)(u_1 - u_0 - N)} e_i \otimes \eta. \end{aligned}$$

Так как $u_1 - N = u_2$, это доказывает (3).

Шаг 2. Проверим, что для произвольных переменных u_0, u_1, u_2 справедливо следующее тождество:

$$(4) \quad R_{20} \hat{R}_{10} T_2 \hat{T}_1 \hat{R}_{12} T_0 = T_0 T_2 \hat{T}_1 \hat{R}_{12} \hat{R}_{10} R_{20}.$$

Заметим, что если $i \neq j, k$, то T_i и $\hat{T}_i$ коммутируют с R_{jk} и $\hat{R}_{jk}$. Поэтому левая часть (4) может быть преобразована следующим образом:

$$\begin{aligned} R_{20} \hat{R}_{10} T_2 \hat{T}_1 \hat{R}_{12} T_0 &= R_{20} T_2 (\hat{R}_{10} \hat{T}_1 T_0) \hat{R}_{12} \\ &= (R_{20} T_2 T_0) \hat{T}_1 \hat{R}_{10} \hat{R}_{12} \quad \text{в силу (5.2.3)} \\ &= T_0 T_2 R_{20} \hat{T}_1 \hat{R}_{10} \hat{R}_{12} \quad \text{в силу (1.8.1)} \\ &= T_0 T_2 \hat{T}_1 (R_{20} \hat{R}_{10} \hat{R}_{12}) \\ &= T_0 T_2 \hat{T}_1 \hat{R}_{12} \hat{R}_{10} R_{20} \quad \text{в силу (2),} \end{aligned}$$

что совпадает с правой частью (4).

Шаг 3. Возьмем вычеты в обеих частях (4) в точке $u_1 - u_2 = N$. Мы получаем:

$$R_{20} \hat{R}_{10} T_2 \hat{T}_1 Q_{12} T_0 = T_0 T_2 \hat{T}_1 Q_{12} \hat{R}_{10} R_{20}, \quad u_1 - u_2 = N.$$

В силу предложения 5.3, мы можем переписать это следующим образом:

$$R_{20} \hat{R}_{10} z(u_1) Q_{12} T_0 = T_0 z(u_1) Q_{12} \hat{R}_{10} R_{20}.$$

В силу (3), левая часть равна

$$z(u_1)T_0Q_{12}(1 - (u_0 - u_2)^{-2}),$$

в то время как правая часть равна

$$T_0z(u_1)Q_{12}(1 - (u_0 - u_2)^{-2}).$$

Таким образом, равенство (1) установлено, и теорема 5.5 доказана.

5.6. Пусть $\mathcal{A}$ – произвольная ассоциативная алгебра. Для любых $p = 1, 2, \dots, m$ мы вводим p -й частичный след как отображение

$$\mathrm{tr}_p: \mathcal{A} \otimes \mathrm{End} \mathcal{E}^{\otimes m} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathrm{End} \mathcal{E}^{\otimes (m-1)}$$

так, что

$$\mathrm{tr}_p: E_{i_1 j_1} \otimes \dots \otimes E_{i_p j_p} \otimes \dots \otimes E_{i_m j_m} \mapsto E_{i_1 j_1} \otimes \dots \otimes \delta_{i_p j_p} \otimes \dots \otimes E_{i_m j_m}.$$

Более того, для произвольного подмножества $\{p_1, \dots, p_k\} \subset \{1, \dots, m\}$ можно определить отображение

$$\mathrm{tr}_{p_1, \dots, p_k}: \mathcal{A} \otimes \mathrm{End} \mathcal{E}^{\otimes m} \mapsto \mathcal{A} \otimes \mathrm{End} \mathcal{E}^{\otimes (m-k)}$$

как композицию отображений $\mathrm{tr}_{p_1}, \dots, \mathrm{tr}_{p_k}$. Мы будем просто писать tr вместо $\mathrm{tr}_{1, \dots, m}$. Пусть

$$A_r = \sum_{i_1, \dots, i_m, j_1, \dots, j_m} a_{i_1 j_1 \dots i_m j_m}^{(r)} \otimes E_{i_1 j_1} \otimes \dots \otimes E_{i_m j_m}, \quad r = 1, 2,$$

– два произвольных элемента из $\mathcal{A} \otimes \mathrm{End} \mathcal{E}^{\otimes m}$. Из определения следа немедленно следует, что если элементы $a_{i_1 j_1 \dots i_m j_m}^{(1)}$ и $a_{j_1 i_1 \dots j_m i_m}^{(2)}$ коммутируют для любых наборов индексов $\{i_1, \dots, i_m\}$ и $\{j_1, \dots, j_m\}$, то

$$(1) \quad \mathrm{tr}(A_1 A_2) = \mathrm{tr}(A_2 A_1).$$

5.7. ТЕОРЕМА. *Имеем*

$$(1) \quad z(u) = \frac{\mathrm{qdet} T(u-1)}{\mathrm{qdet} T(u)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вспомогательную алгебру

$$(2) \quad Y(N)[[u^{-1}]] \otimes \text{End } \mathcal{E}^{\otimes(N+1)},$$

где копии пространства $\mathcal{E}$ занумерованы индексами $0, 1, \dots, N$. Как и в разделе 4.7, $A_m^{(i)}$ означает нормализованный антисимметризатор по индексам $\{i, i+1, \dots, m\}$.

Шаг 1. Мы доказываем тождество

$$(3) \quad P_{0N} A_N^{(1)} \text{qdet } T(u-1) T_N^{-1}(u-N) T_0(u) \\ = A_{N-1}^{(0)} P_{0N} T_{N-1}(u-N+1) \dots T_0(u) A_{N-1}^{(1)}.$$

В силу предложения 2.5,

$$A_N^{(1)} \text{qdet } T(u-1) = A_N^{(1)} T_1(u-1) \dots T_N(u-N).$$

Следовательно, левая часть (3) может быть переписана как

$$(4) \quad P_{0N} A_N^{(1)} T_1(u-1) \dots T_{N-1}(u-N+1) T_0(u).$$

Из предложения 2.3 и фундаментального тождества (2.1.2) следует, что

$$(5) \quad A_{N-1}^{(1)} T_1(u-1) \dots T_{N-1}(u-N+1) = T_{N-1}(u-N+1) \dots T_1(u-1) A_{N-1}^{(1)}.$$

Ясно, что $A_N^{(1)} = A_N^{(1)} A_{N-1}^{(1)}$, так что, используя (5), мы переписываем (4) следующим образом

$$P_{0N} A_N^{(1)} T_{N-1}(u-N+1) \dots T_1(u-1) A_{N-1}^{(1)} T_0(u).$$

Двигая $A_{N-1}^{(1)}$ направо и используя очевидное соотношение $P_{0N} A_N^{(1)} = A_{N-1}^{(0)} P_{0N}$, мы получаем правую часть (3).

Шаг 2. Теперь вычислим след обеих частей (3). Чтобы сделать это, мы применим обе части (3) к вектору

$$v = e_{i_0} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_N} \in \mathcal{E}^{\otimes(N+1)}$$

и разложим полученный результат по каноническому базису в пространстве $\mathcal{E}^{\otimes(N+1)}$. Нас интересует в этом разложении коэффициент при v . Ясно, что след равен сумме этих коэффициентов по всем векторам v . Для левой части имеем:

$$\text{tr}(P_{0N} A_N^{(1)} \text{qdet } T(u-1) T_N^{-1}(u-N) T_0(u)) \\ = \text{qdet } T(u-1) \text{tr}(P_{0N} A_N^{(1)} T_N^{-1}(u-N) T_0(u)),$$

что в силу (5.6.1) равно

$$\text{qdet } T(u-1) \text{tr}(A_N^{(1)} T_N^{-1}(u-N) T_0(u) P_{0N}).$$

Более того,

$$A_N^{(1)} T_N^{-1}(u-N) T_0(u) P_{0N} v = A_N^{(1)} T_N^{-1}(u-N) T_0(u) (e_{i_N} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_{N-1}} \otimes e_{i_0}) \\ = \sum_{a,b} A_N^{(1)} t'_{bi_0}(u-N) t_{ai_N}(u) (e_a \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_{N-1}} \otimes e_b).$$

Следовательно, коэффициент при v равен нулю, если только $(i_1, \dots, i_N)$ не является перестановкой индексов $(1, \dots, N)$. В последнем случае коэффициент равен

$$(6) \quad \frac{1}{N!} t'_{i_N i_0}(u - N) t_{i_0 i_N}(u).$$

Используя (5.4.2), мы получаем, что сумма элементов (6) по всем векторам v равна $z^{-1}(u)$. Таким образом, след левой части (3) равен $\text{qdet } T(u - 1) z^{-1}(u)$.

Теперь, снова используя (5.6.1), для правой части (3) имеем:

$$\begin{aligned} \text{tr}(A_{N-1}^{(0)} P_{0N} T_{N-1}(u - N + 1) \dots T_0(u) A_{N-1}^{(1)}) \\ = \text{tr}(T_{N-1}(u - N + 1) \dots T_0(u) A_{N-1}^{(1)} A_{N-1}^{(0)} P_{0N}). \end{aligned}$$

Так как $A_{N-1}^{(1)} A_{N-1}^{(0)} = A_{N-1}^{(0)}$, мы преобразуем это следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{tr}(T_{N-1}(u - N + 1) \dots T_0(u) A_{N-1}^{(0)} P_{0N}) &= \text{tr}(\text{qdet } T(u) A_{N-1}^{(0)} P_{0N}) \\ &= \text{qdet } T(u) \text{tr}(A_{N-1}^{(0)} P_{0N}). \end{aligned}$$

Здесь мы использовали предложение 2.5. Далее,

$$A_{N-1}^{(0)} P_{0N} v = A_{N-1}^{(0)} (e_{i_N} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_{N-1}} \otimes e_{i_0}).$$

Коэффициент при v в этом разложении равен нулю, кроме тех случаев, когда $i_0 = i_N$ и $(i_0, \dots, i_{N-1})$ является перестановкой индексов $(1, \dots, N)$. В последнем случае он равен $(N!)^{-1}$. Вычисляя теперь сумму по всем векторам v , мы находим, что след правой части (3) равен $\text{qdet } T(u)$, что доказывает теорему.

5.8. ЗАМЕЧАНИЕ. Соотношение (5.7.1) можно понимать как “квантовый аналог” классической формулы Лиувилля для производной детерминанта матричнозначной функции. Чтобы увидеть это, рассмотрим для любого $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ алгебру $Y(N, h)$, введенную в разделе 1.25. Определим производящие ряды $t_{ij}(u)$ для элементов $t_{ij}^{(1)}, t_{ij}^{(2)}, \dots \in Y(N, h)$ так же, как это было сделано в разделе 1.6 для алгебры $Y(N)$; после этого построим матрицу $T(u)$. Квантовый детерминант и квантовая контракция для новой алгебры даются следующими выражениями:

$$(1) \quad \text{qdet } T(u) = \sum_{p \in \mathfrak{S}_N} \text{sgn}(p) t_{p(1),1}(u) t_{p(2),2}(u - h) \dots t_{p(N),N}(u - Nh + h),$$

$$(2) \quad z(u) = \left(\frac{1}{N} \text{tr}(T(u) T^{-1}(u - Nh)) \right)^{-1}.$$

Рассуждения, аналогичные тем, которые использовались в разделах 2.10 и 5.5, показывают, что $\text{qdet } T(u)$ и $z(u)$ являются центральными элементами в $Y(N, h)$. Равенство (5.7.1) в этом случае обобщается так:

$$z(u) = \frac{\text{qdet } T(u - h)}{\text{qdet } T(u)}.$$

По определению (2) это равенство может быть переписано как

$$(3) \quad \operatorname{tr} \left(T^{-1}(u - Nh) \cdot \frac{T(u) - T(u - Nh)}{Nh} \right) = \frac{1}{\operatorname{qdet} T(u - h)} \cdot \frac{\operatorname{qdet} T(u) - \operatorname{qdet} T(u - h)}{h}.$$

В пределе при $h \rightarrow 0$ матричные элементы матрицы $T(u)$ становятся коммутативными, в то время как квантовый детерминант (1) стремится к обычному детерминанту $\det T(u)$. В этом пределе мы получаем из (3) равенство

$$\operatorname{tr} \left(T^{-1}(u) \frac{d}{du} T(u) \right) = \frac{1}{\det T(u)} \cdot \frac{d}{du} \det T(u),$$

которое и является формулой Лиувилля. По этой причине мы будем называть соотношение (5.7.1) *квантовой формулой Лиувилля* для T -матрицы.

Заметим также, что при доказательстве теоремы 5.7 не использовался тот факт, что $z(u)$ является центральным элементом (теорема 5.5). Таким образом, теорема 5.5 также может быть получена из теорем 2.10 и 5.7.

5.9. СЛЕДСТВИЕ. *Коэффициенты $z_2, z_3, \dots$ ряда $z(u)$ являются алгебраически независимыми и порождают весь центр алгебры $Y(N)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 5.7

$$(1 + z_1 u^{-1} + z_2 u^{-2} + \dots)(1 + d_1 u^{-1} + d_2 u^{-2} + \dots) = 1 + d_1(u-1)^{-1} + d_2(u-1)^{-2} + \dots.$$

Так как

$$(u-1)^{-k} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{k+i-1}{i} u^{-k-i},$$

мы получаем, что $z_1 = 0$ и

$$z_k + d_k + \sum_{i=1}^{k-1} z_{k-i} d_i = d_k + \sum_{j=1}^{k-1} \binom{k-1}{j} d_{k-j}$$

для $k \geq 2$. Простая индукция показывает, что для каждого $n \geq 1$ коэффициент d_n является полиномом от переменных $z_2, \dots, z_{n+1}$, а коэффициент z_{n+1} может быть записан как $z_{n+1} = n d_n + (\dots)$, где $(\dots)$ обозначает полином от переменных $d_1, \dots, d_{n-1}$. По теореме 2.13 это доказывает утверждение.

5.10. ЗАМЕЧАНИЕ. Все рассуждения и результаты разделов 5.1–5.9, в частности, построение квантовой контракции $z(u)$ и теорема 5.7, остаются справедливыми и в том случае, когда транспонирование t заменяется на транспонирование по отношению к формам $\langle \cdot, \cdot \rangle_+$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle_-$ на пространстве $\mathcal{E}$, введенное в разделе 3.1.

5.11. Мы закончим этот параграф теоремой, которая устанавливает связь между антиподом S и квантовой контракцией $z(u)$.

ТЕОРЕМА. *Имеем*

$$S^2 = \sigma_N \circ \mu_{z(u)},$$

где σ_N и $\mu_{z(u)}$ – автоморфизмы алгебры $Y(N)$, определенные формулами (1.12.1) и (1.12.2), соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства $T(u)T^{-1}(u) = 1$ следует, что

$$(1) \quad \sum_{a=1}^N t_{ia}(u)t'_{aj}(u) = \delta_{ij}.$$

Применяя антиавтоморфизм S к обеим частям (1), мы получаем

$$(2) \quad \sum_{a=1}^N t''_{aj}(u)t'_{ia}(u) = \delta_{ij},$$

где $t''_{ij}(u)$ означает образ элемента $t_{ij}(u)$ при действии автоморфизма S^2 . С другой стороны, в силу соотношения (5.4.4),

$$(3) \quad \sum_{a=1}^N t_{aj}(u+N)t'_{ia}(u) = \delta_{ij}z^{-1}(u+N).$$

Сравнивая (2) и (3), мы находим, что

$$t''_{ij}(u) = t_{ij}(u+N)z(u+N),$$

и теорема доказана.

5.12. КОММЕНТАРИЙ. Подход к описанию центра янгиана $Y(N)$, представленный в настоящем параграфе, был предложен вторым из авторов в [38]. Теоремы 5.5, 5.7, 5.11 и наброски их доказательств содержатся в [38] (фактически, они сформулированы там в более общем виде – для янгиана супералгебры Ли $\mathfrak{gl}(N | M)$).

§ 6. Квантовая контракция и квантовая формула Лиувилля для скрученного янгиана

В этом параграфе мы распространяем результаты, полученные в § 5, на скрученный янгиан $Y^\pm(N)$. В начале мы вводим “накрывающую” алгебру $\tilde{Y}^\pm(N)$, исключив из определения скрученного янгиана $Y^\pm(N)$ условие симметрии (3.6.3). Затем мы строим некоторый ряд $\delta(u)$, чьи коэффициенты являются центральными элементами “накрывающей” алгебры, и доказываем, что условие симметрии для S -матрицы может быть выражено в виде равенства $\delta(u) = 1$ (теорема 6.4). Используя ряд $\delta(u)$, мы определяем аналог квантовой контракции $z(u)$ для скрученного янгиана. Это новый ряд $y(u)$, чьи коэффициенты дают новую систему образующих для центра. Мы описываем соотношение между $y(u)$, $z(u)$ и детерминантом Складина $\text{sdet}(u)$, см. теоремы 6.7, 6.8. Последняя теорема является аналогом квантовой формулы Лиувилля для скрученного янгиана.

6.1. Обозначим через $\tilde{Y}^{\pm}(N)$ комплексную ассоциативную алгебру с образующими $\tilde{s}_{ij}^{(1)}, \tilde{s}_{ij}^{(2)}, \dots$, где $-n \leq i, j \leq n$; последние удовлетворяют следующим соотношениям. Введем производящий ряд $\tilde{s}_{ij}(u)$ и построим матрицу $\tilde{S}(u)$ тем же способом, как это было сделано в (3.5.3) и (3.5.2) для образующих $s_{ij}^{(1)}, s_{ij}^{(2)}, \dots$. Наложим на матрицу $\tilde{S}(u)$ четверное соотношение, но не условие симметрии (см. раздел 3.6):

$$(1) \quad R(u-v)\tilde{S}_1(u)R'(-u-v)\tilde{S}_2(v) = \tilde{S}_2(v)R'(-u-v)\tilde{S}_1(u)R(u-v).$$

В следующих разделах мы установим некоторые факты относительно структуры алгебры $\tilde{Y}^{\pm}(N)$.

6.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Существует формальный ряд*

$$\delta(u) = 1 + \delta_1 u^{-1} + \delta_2 u^{-2} + \dots \in \tilde{Y}^{\pm}(N)[[u^{-1}]]$$

такой, что

$$(1) \quad Q\tilde{S}_1(u)R(2u)\tilde{S}_2^{-1}(-u) = \tilde{S}_2^{-1}(-u)R(2u)\tilde{S}_1(u)Q = \left(1 \mp \frac{1}{2u}\right)\delta(u)Q.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножая обе части четверного соотношения (6.1.1) на $\tilde{S}_2^{-1}(v)$, мы получаем тождество

$$(2) \quad \tilde{S}_2^{-1}(v)R(u-v)\tilde{S}_1(u)R'(-u-v) = R'(-u-v)\tilde{S}_1(u)R(u-v)\tilde{S}_2^{-1}(v).$$

Заметим, что рациональная функция $R'(-u) = 1 + Qu^{-1}$ имеет простой полюс при $u = 0$ и $\text{res}_{u=0} R'(-u) = Q$. Беря вычеты в обеих частях (2) в точке $u + v = 0$, мы получаем первое равенство в (1). Теперь, в силу предложения 3.2, утверждение следует из того факта, что коэффициенты при u^0 в рядах $\tilde{S}_1(u)$, $R(2u)$, $\tilde{S}_2^{-1}(-u)$ и $(1 \mp (2u)^{-1})$ равны 1.

6.3. ТЕОРЕМА. *Все коэффициенты ряда $\delta(u)$ принадлежат центру алгебры $\tilde{Y}^{\pm}(N)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вполне аналогично доказательству теоремы 5.5. Рассмотрим тензорное пространство $\mathcal{E}^{\otimes 3}$, где копии пространства $\mathcal{E}$ занумерованы индексами 0, 1, 2, и положим

$$\begin{aligned} \tilde{S}_i &= \tilde{S}_i(u_i), \quad i = 0, 1, 2; \\ R_{ij} &= R_{ij}(u_i - u_j), \quad R'_{ij} = R'_{ij}(-u_i - u_j), \quad 0 \leq i < j \leq 2, \end{aligned}$$

где u_0, u_1, u_2 — формальные переменные. Мы докажем тождество

$$(1) \quad \tilde{S}_0\delta(u_1)Q_{12} = \delta(u_1)\tilde{S}_0Q_{12},$$

из которого следует утверждение теоремы.

Шаг 1. Проверим, что при условии $u_1 + u_2 = 0$ справедливы следующие вспомогательные тождества:

$$(2) \quad Q_{12}R'_{01}R_{02} = R_{02}R'_{01}Q_{12} = Q_{12}(1 - (u_0 + u_1)^{-2}),$$

$$(3) \quad Q_{12}R'_{02}R_{01} = R_{01}R'_{02}Q_{12} = Q_{12}(1 - (u_0 - u_1)^{-2}).$$

В самом деле, в силу (4.2.3)

$$R'_{12}R'_{01}R_{02} = R_{02}R'_{01}R'_{12}.$$

Беря вычет в точке $u_1 + u_2 = 0$, мы получаем первое равенство в (2). В силу предложения 3.2, для того, чтобы проверить второе равенство в (2), достаточно применить $Q_{12}R'_{01}R_{02}$ к базисным векторам $e_i \otimes e_{-1} \otimes e_1$, $i = -n, -n+1, \dots, n$. Имеем

$$\begin{aligned} & Q_{12}R'_{01}R_{02}(e_i \otimes e_{-1} \otimes e_1) \\ &= Q_{12}R'_{01}\left(e_i \otimes e_{-1} \otimes e_1 - \frac{1}{u_0 - u_2}e_1 \otimes e_{-1} \otimes e_i\right) \\ &= Q_{12}\left(e_i \otimes e_{-1} \otimes e_1 + \frac{\delta_{i1}}{u_0 + u_1}\sum_j \theta_{ji}e_j \otimes e_{-j} \otimes e_1 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{u_0 - u_2}e_1 \otimes e_{-1} \otimes e_i - \frac{1}{(u_0 - u_2)(u_0 + u_1)}\sum_j \theta_{j1}e_j \otimes e_{-j} \otimes e_i\right) \\ &= e_i \otimes \xi + \frac{\delta_{i1}\theta_{i1}}{u_0 + u_1}e_1 \otimes \xi - \frac{\delta_{i1}}{u_0 - u_2}e_1 \otimes \xi - \frac{1}{(u_0 - u_2)(u_0 + u_1)}e_i \otimes \xi. \end{aligned}$$

Так как $u_2 = -u_1$, из этого следует (2). Доказательство формулы (3) вполне аналогично.

Шаг 2. Докажем, что для произвольных формальных переменных u_0, u_1, u_2 справедливо следующее тождество:

$$(4) \quad R_{01}R'_{02}\tilde{S}_0R_{02}R'_{01}\tilde{S}_2^{-1}R_{12}\tilde{S}_1R'_{12} = \tilde{S}_2^{-1}R_{12}\tilde{S}_1R'_{12}R'_{01}R_{02}\tilde{S}_0R'_{02}R_{01}.$$

Мы используем тот факт, что $\tilde{S}_i$ и $\tilde{S}_i^{-1}$ коммутируют с R_{jk} и R'_{jk} , если $i \neq j, k$. Преобразуем левую часть (4) следующим образом:

$$\begin{aligned} R_{01}(R'_{02}\tilde{S}_0R_{02}\tilde{S}_2^{-1})R'_{01}R_{12}\tilde{S}_1R'_{12} &= R_{01}\tilde{S}_2^{-1}R_{02}\tilde{S}_0(R'_{02}R'_{01}R_{12})\tilde{S}_1R'_{12} \quad \text{в силу (6.2.2)} \\ &= R_{01}\tilde{S}_2^{-1}R_{02}\tilde{S}_0R_{12}R'_{01}R'_{02}\tilde{S}_1R'_{12} \quad \text{в силу (4.2.3)} \\ &= \tilde{S}_2^{-1}(R_{01}R_{02}R_{12})\tilde{S}_0R'_{01}\tilde{S}_1R'_{02}R'_{12} \\ &= \tilde{S}_2^{-1}R_{12}R_{02}(R_{01}\tilde{S}_0R'_{01}\tilde{S}_1)R'_{02}R'_{12} \quad \text{в силу (1.5.2)} \\ &= \tilde{S}_2^{-1}R_{12}R_{02}\tilde{S}_1R'_{01}\tilde{S}_0(R_{01}R'_{02}R'_{12}) \quad \text{в силу (6.1.1)} \\ &= \tilde{S}_2^{-1}R_{12}R_{02}\tilde{S}_1R'_{01}\tilde{S}_0R'_{12}R'_{02}R_{01} \quad \text{в силу (4.2.3)} \\ &= \tilde{S}_2^{-1}R_{12}\tilde{S}_1(R_{02}R'_{01}R'_{12})\tilde{S}_0R'_{02}R_{01}, \end{aligned}$$

что совпадает с правой частью (4) в силу (4.2.3).

Шаг 3. Возьмем вычеты в обеих частях (4) в точке $u_1 + u_2 = 0$. Мы получим равенство

$$R_{01}R'_{02}\tilde{S}_0R_{02}R'_{01}(\tilde{S}_2^{-1}R_{12}\tilde{S}_1Q_{12}) = (\tilde{S}_2^{-1}R_{12}\tilde{S}_1Q_{12})R'_{01}R_{02}\tilde{S}_0R'_{02}R_{01},$$

при условии $u_1 + u_2 = 0$. В силу предложения 6.2 это может быть переписано следующим образом:

$$(5) \quad R_{01}R'_{02}\tilde{S}_0R_{02}R'_{01}Q_{12}\delta(u_1) = \delta(u_1)Q_{12}R'_{01}R_{02}\tilde{S}_0R'_{02}R_{01}.$$

В силу (2) и (3), левая часть равна

$$(1 - (u_0 + u_1)^{-2})R_{01}R'_{02}Q_{12}\tilde{S}_0\delta(u_1) = (1 - (u_0 + u_1)^{-2})(1 - (u_0 - u_1)^{-2})\tilde{S}_0\delta(u_1)Q_{12}.$$

Аналогично, правая часть (5) равна

$$(1 - (u_0 + u_1)^{-2})(1 - (u_0 - u_1)^{-2})\delta(u_1)\tilde{S}_0Q_{12},$$

что доказывает (1) и теорему.

6.4. ТЕОРЕМА. *Соотношение $\delta(u) = 1$ эквивалентно условию симметрии*

$$(1) \quad \tilde{S}(-u) = \tilde{S}(u) \pm \frac{\tilde{S}(u) - \tilde{S}(-u)}{2u}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы воспользуемся предложением 6.2. Применим обе части равенства

$$\left(1 \mp \frac{1}{2u}\right)\delta(u)Q = Q\tilde{S}_1(u)R(2u)\tilde{S}_2^{-1}(-u)$$

к вектору $e_{-i} \otimes e_j \in \mathcal{E}^{\otimes 2}$. В силу предложения 3.2, мы имеем

$$\left(1 \mp \frac{1}{2u}\right)\delta(u)Q(e_{-i} \otimes e_j) = \delta_{ij}\left(1 \mp \frac{1}{2u}\right)\theta_{i1}\delta(u)\xi.$$

Обозначим через $s'_{ij}(u)$, $-n \leq i, j \leq n$, матричные элементы матрицы $\tilde{S}^{-1}(u)$. Тогда

$$\begin{aligned} & Q\tilde{S}_1(u)R(2u)\tilde{S}_2^{-1}(-u)(e_{-i} \otimes e_j) \\ &= Q\tilde{S}_1(u)R(2u) \sum_k s'_{kj}(-u)(e_{-i} \otimes e_k) \\ &= Q\tilde{S}_1(u) \sum_k s'_{kj}(-u) \left(e_{-i} \otimes e_k - \frac{1}{2u} e_k \otimes e_{-i} \right) \\ &= Q \left(\sum_{k,l} \tilde{s}_{l,-i}(u) s'_{kj}(-u) (e_l \otimes e_k) - \frac{1}{2u} \sum_{k,l} \tilde{s}_{kl}(u) s'_{kj}(-u) (e_l \otimes e_{-i}) \right) \\ &= \left(\sum_k \theta_{k1} \tilde{s}_{-k,-i}(u) s'_{kj}(-u) - \frac{1}{2u} \theta_{-i,1} \sum_k \tilde{s}_{ik}(u) s'_{kj}(-u) \right) \xi. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\delta_{ij} \left(1 \mp \frac{1}{2u}\right) \delta(u) = \sum_k \left(\theta_{ik} \tilde{s}_{-k, -i}(u) \mp \frac{1}{2u} \tilde{s}_{ik}(u) \right) s'_{kj}(-u).$$

С другой стороны,

$$\delta_{ij} = \sum_k \tilde{s}_{ik}(-u) s'_{kj}(-u).$$

Сравнивая последние два равенства, мы получаем, что

$$(2) \quad \left(1 \mp \frac{1}{2u}\right) \tilde{s}_{ij}(-u) \delta(u) = \theta_{ij} \tilde{s}_{-j, -i}(u) \mp \frac{1}{2u} \tilde{s}_{ij}(u).$$

Следовательно, из соотношения $\delta(u) = 1$ следует

$$\theta_{ij} \tilde{s}_{-j, -i}(u) = \tilde{s}_{ij}(-u) \pm \frac{\tilde{s}_{ij}(u) - \tilde{s}_{ij}(-u)}{2u},$$

что в точности совпадает с (6.4.1), см. соотношение (3.6.4).

Обратно, если выполнено условие симметрии (6.4.1), тогда (2) для $i = j = -1$ принимает вид

$$\left(1 \mp \frac{1}{2u}\right) \tilde{s}_{-1, -1}(-u) \delta(u) = \tilde{s}_{1, 1}(u) \mp \frac{1}{2u} \tilde{s}_{-1, -1}(u) = \left(1 \mp \frac{1}{2u}\right) \tilde{s}_{-1, -1}(-u).$$

Так как $\tilde{s}_{-1, -1}(-u)$ обратима, из этого следует, что $\delta(u) = 1$. Теорема доказана.

6.5. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Отображение*

$$\text{inv}: \tilde{S}(u) \mapsto \tilde{S}^{-1}\left(-u - \frac{N}{2}\right)$$

определяет инволютивный автоморфизм алгебры $\tilde{Y}^{\pm}(N)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обращая левую и правую часть четвертого соотношения (6.1.1), мы получаем

$$(1) \quad \begin{aligned} \tilde{S}_2^{-1}(v) (R'(-u - v))^{-1} \tilde{S}_1^{-1}(u) R^{-1}(u - v) \\ = R^{-1}(u - v) \tilde{S}_1^{-1}(u) (R'(-u - v))^{-1} \tilde{S}_2^{-1}(v). \end{aligned}$$

Более того, заметим, что

$$\begin{aligned} R^{-1}(u - v) &= \frac{(u - v)^2}{(u - v)^2 - 1} R(v - u), \\ (R'(-u - v))^{-1} &= R'(u + v - N). \end{aligned}$$

Поэтому, заменяя (u, v) на $(-u - N/2, -v - N/2)$, мы преобразуем (1) к четвертому соотношению для матрицы $\tilde{S}^{-1}(-u - N/2)$.

Остается проверить, что $\text{inv} \circ \text{inv} = 1$. Применим inv к обеим частям соотношения

$$(\text{inv} \tilde{S}(u)) \tilde{S}\left(-u - \frac{N}{2}\right) = 1.$$

Мы получаем, что

$$(\text{inv} \circ \text{inv})(\tilde{S}(u))\tilde{S}^{-1}(u) = 1, \quad \text{т.е.} \quad (\text{inv} \circ \text{inv})(\tilde{S}(u)) = \tilde{S}(u).$$

6.6. Рассмотрим образ $\text{inv}(\delta(u))$ элемента $\delta(u)$ при автоморфизме inv алгебры $\tilde{Y}^{\pm}(N)$. Обозначим через $y(u)$ образ элемента $\text{inv}(\delta(u - N/2))$ при отображении факторизации $\tilde{Y}^{\pm}(N) \rightarrow Y^{\pm}(N)$. По теореме 6.3, все коэффициенты ряда $\text{inv}(\delta(u))$ принадлежат центру алгебры $\tilde{Y}^{\pm}(N)$, следовательно, все коэффициенты $y(u)$ являются центральными элементами в алгебре $Y^{\pm}(N)$. Мы будем называть ряд $y(u)$ *квантовой контракцией* (матрицы $S(u)$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Справедливо следующее тождество в алгебре $Y^{\pm}(N)$:*

$$(1) \quad QS_1^{-1}(-u)R(2u - N)S_2(u - N) = S_2(u - N)R(2u - N)S_1^{-1}(-u)Q \\ = \left(1 \mp \frac{1}{2u - N}\right)y(u)Q.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно применить автоморфизм inv к каждой части тождества (6.2.1), заменить u на $u - N/2$ и взять их образы в алгебре $Y^{\pm}(N)$.

6.7. Определим квантовую контракцию $z(u)$, соответствующую транспонированию t , которое использовалась в §3: $(E_{ij})^t = \theta_{ij}E_{-j, -i}$; см. предложение 5.3 и замечание 5.10. Тогда мы получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА. *Имеем равенство $y(u) = z(u)z^{-1}(-u + N)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что $S(u) = T(u)T^t(-u)$. Из предложения 6.6 следует, что

$$(1) \quad \left(1 \mp \frac{1}{2u - N}\right)y(u)Q = Q(T_1(-u)T_1^t(u))^{-1}R(2u - N)T_2(u - N)T_2^t(-u + N) \\ = Q\hat{T}_1(u)T_1^{-1}(-u)R(2u - N)T_2(u - N)T_2^t(-u + N),$$

где $\hat{T}(u)$ означает матрицу $(T^t(u))^{-1}$. Однако,

$$T_1^{-1}(-u)R(2u - N)T_2(u - N) = T_2(u - N)R(2u - N)T_1^{-1}(-u),$$

что является непосредственным следствием тройного соотношения, записанного в виде

$$R(u - v)T_2(u)T_1(v) = T_1(v)T_2(u)R(u - v).$$

В самом деле, достаточно умножить обе части последнего соотношения на $T_1^{-1}(v)$ слева и справа и заменить (u, v) на $(u - N, -u)$. Следовательно, правая часть (1) принимает вид:

$$Q\hat{T}_1(u)T_2(u - N)R(2u - N)T_1^{-1}(-u)T_2^t(-u + N).$$

В силу предложения 5.3 (см. замечание 5.10) последнее выражение равно

$$Qz(u)R(2u - N)T_1^{-1}(-u)T_2^t(-u + N) = z(u)QR(2u - N)T_1^{-1}(-u)T_2^t(-u + N).$$

Теперь, используя (3.2.4), мы получаем

$$QR(2u - N) = Q \left(1 - \frac{P}{2u - N} \right) = \left(1 \mp \frac{1}{2u - N} \right) Q.$$

Следовательно, в силу (5.4.3),

$$\begin{aligned} \left(1 \mp \frac{1}{2u - N} \right) y(u) Q &= \left(1 \mp \frac{1}{2u - N} \right) z(u) Q T_1^{-1}(-u) T_2^t(-u + N) \\ &= \left(1 \mp \frac{1}{2u - N} \right) z(u) z^{-1}(-u + N) Q, \end{aligned}$$

что доказывает утверждение.

6.8. Теперь мы докажем аналог квантовой формулы Лиувилля для скрученного янгиана.

ТЕОРЕМА. В алгебре $Y^\pm(N)$ мы имеем

$$(1) \quad y(u) = \varepsilon_N(u) \frac{\text{sdet } S(u - 1)}{\text{sdet } S(u)},$$

где $\varepsilon_N(u) \equiv 1$ для $Y^+(N)$ и $\varepsilon_N(u) = \frac{(2u + 1)(2u - N - 1)}{(2u - 1)(2u - N + 1)}$ для $Y^-(N)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теорем 6.7 и 5.7 следует, что

$$y(u) = \frac{\text{qdet } T(u - 1)}{\text{qdet } T(u)} \frac{\text{qdet } T(-u + N)}{\text{qdet } T(-u + N - 1)}.$$

Более того, по теореме 4.7 мы получаем

$$y(u) = \frac{\gamma_N(u)}{\gamma_N(u - 1)} \frac{\text{sdet } S(u - 1)}{\text{sdet } S(u)} = \varepsilon_N(u) \frac{\text{sdet } S(u - 1)}{\text{sdet } S(u)},$$

и теорема доказана.

6.9. СЛЕДСТВИЕ. Коэффициенты $y_1, y_2, \dots$ квантовой контракции $y(u)$ порождают центр алгебры $Y^\pm(N)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя теорему 4.11 и повторяя те же рассуждения, что и при доказательстве следствия 5.9, мы получаем, что коэффициенты ряда $\text{sdet } S(u - 1)(\text{sdet } S(u))^{-1}$ порождают центр алгебры $Y^\pm(N)$. Так как $\varepsilon_N(u)$ имеет вид $1 + a_1 u^{-1} + a_2 u^{-2} + \dots$, $a_i \in \mathbb{C}$, то же самое верно и для ряда $y(u)$.

6.10. КОММЕНТАРИЙ. Теорема 6.4 была анонсирована Ольшанским в [43]; она имеет некоторое сходство с теоремой 6 из работы Дринфельда [14].

§ 7. Квантовый детерминант и детерминант Складина блочных матриц

Здесь мы соберем некоторые результаты, связанные с разбиением T - и S -матриц на прямоугольные блоки.

7.1. Зафиксируем разбиение числа N в сумму двух неотрицательных целых $N = r + s$. Для любой $(N \times N)$ -матрицы A мы будем обозначать через ^{11}A , ^{12}A , ^{21}A , ^{22}A блоки матрицы A по отношению к вышеуказанному разбиению, так что

$$A = \begin{pmatrix} ^{11}A & ^{12}A \\ ^{21}A & ^{22}A \end{pmatrix}.$$

7.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Матричные элементы матриц $^{11}T(u)$ и $^{22}(T^{-1}(v))$ коммутируют друг с другом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножая обе части тройного соотношения (1.8.1) на $T_2^{-1}(v)$ слева и справа, мы получаем

$$T_2^{-1}(v)R(u-v)T_1(u) = T_1(u)R(u-v)T_2^{-1}(v).$$

Так как $R(u-v) = 1 - P(u-v)^{-1}$, это может быть выражено как

$$[T_1(u), T_2^{-1}(v)] = \frac{1}{u-v} (T_1(u)PT_2^{-1}(v) - T_2^{-1}(v)PT_1(u)).$$

Переписывая это в терминах матричных элементов (см. доказательство предложения 1.8), мы получаем, что

$$[t_{ij}(u), t'_{kl}(v)] = \frac{1}{u-v} \left(\delta_{kj} \sum_a t_{ia}(u)t'_{al}(v) - \delta_{il} \sum_a t'_{ka}(v)t_{aj}(u) \right),$$

где, как и ранее, $t'_{ij}(u)$ обозначает матричный элемент матрицы $T^{-1}(u)$. Таким образом, если $1 \leq i, j \leq r$ и $r < k, l \leq N$, то $[t_{ij}(u), t'_{kl}(v)] = 0$, и это доказывает предложение.

7.3. Для обратимой $(N \times N)$ -матрицы A над полем $\mathbb{C}$ имеется следующая формула для детерминанта A :

$$\det A \det ^{11}(A^{-1}) = \det ^{22}A.$$

Здесь мы доказываем аналог этой формулы для квантового детерминанта T -матрицы. Обозначим через $t_{ij}^*(u)$, $1 \leq i, j \leq N$, образ ряда $t_{ij}(u)$ при автоморфизме inv алгебры $Y(N)$. Это значит, что $t_{ij}^*(u)$ является матричным элементом матрицы $T^*(u) := T^{-1}(-u)$. Так как $T^*(u)$ удовлетворяет тройному соотношению (см. раздел 1.12), мы можем повторить построение квантового детерминанта из § 2 для матрицы $T^*(u)$. В частности, формулы, аналогичные формулам (2.8.1) и (2.8.2), справедливы для $\text{qdet } T^*(u)$. Одну из них мы используем ниже: для $q \in \mathfrak{S}_N$

$$(1) \quad \text{qdet } T^*(u) = \text{sgn}(q) \sum_{p \in \mathfrak{S}_N} \text{sgn}(p) t_{p(1), q(1)}^*(u) \cdots t_{p(N), q(N)}^*(u - N + 1).$$

ТЕОРЕМА. *Имеем*

$$\text{qdet } T(u) \text{ qdet}^{11}(T^*)(-u + N - 1) = \text{qdet}^{22}T(u).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 2.5,

$$(2) \quad \text{qdet } T(u) A_N = A_N T_1 \dots T_N,$$

где $T_i = T_i(u - i + 1)$ для $i = 1, \dots, N$. Умножим обе части (2) на $T_N^{-1} \dots T_{s+1}^{-1}$ справа. Тогда (2) принимает вид

$$(3) \quad \text{qdet } T(u) A_N T_N^{-1} \dots T_{s+1}^{-1} = A_N T_1 \dots T_s.$$

Теперь применим обе части (3) к базисному вектору

$$v_0 = e_{r+1} \otimes \dots \otimes e_N \otimes e_1 \otimes \dots \otimes e_r \in \mathcal{E}^{\otimes N}.$$

Для правой части (3) мы имеем

$$A_N T_1 \dots T_s v_0 = A_N \sum_{i_1, \dots, i_s} t_{i_1, r+1}(u) \dots t_{i_s, N}(u - s + 1) e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_s} \otimes e_1 \otimes \dots \otimes e_r.$$

Коэффициент при v_0 в этом разложении равен

$$\frac{1}{N!} \sum_p \text{sgn}(p) t_{p(r+1), r+1}(u) \dots t_{p(N), N}(u - s + 1),$$

где p пробегает все перестановки множества индексов $\{r + 1, \dots, N\}$. В силу (2.7.1), это не что иное, как $(N!)^{-1} \text{qdet}^{22}T(u)$.

Аналогично, для левой части (3) мы получаем

$$\begin{aligned} & A_N T_N^{-1} \dots T_{s+1}^{-1} v_0 \\ &= A_N \sum_{i_{s+1}, \dots, i_N} t'_{i_N, r}(u - N + 1) \dots t'_{i_{s+1}, 1}(u - s) e_{r+1} \otimes \dots \otimes e_N \otimes e_{i_{s+1}} \otimes \dots \otimes e_{i_N}. \end{aligned}$$

Ясно, что коэффициент при v_0 в этом выражении равен

$$\begin{aligned} (4) \quad & \frac{1}{N!} \sum_{p \in \mathfrak{S}_r} \text{sgn}(p) t'_{p(r), r}(u - N + 1) \dots t'_{p(1), 1}(u - s) \\ &= \frac{1}{N!} \sum_{p \in \mathfrak{S}_r} \text{sgn}(p) t_{p(r), r}^*(-u + N - 1) \dots t_{p(1), 1}^*(-u + s). \end{aligned}$$

Из (1) немедленно следует, что (4) совпадает с $(N!)^{-1} \text{qdet}^{11}(T^*)(-u + N - 1)$, и теорема доказана.

7.4. Теперь мы докажем аналог предложения 7.2 и теоремы 7.3 для скрученного янгиана $Y^\pm(N)$. Мы будем сохранять обозначения §§ 3, 4 и 6.

Зафиксируем неотрицательное целое $M \leq N$ такое, что $N - M$ четное. Положим $m = [M/2]$. Для $(N \times N)$ -матрицы A обозначим через ^{11}A и ^{22}A подматрицы в A , чьи строки и столбцы занумерованы индексами $\{-m, -m + 1, \dots, m\}$ и $\{-n, -n + 1, \dots, -m - 1, m + 1, \dots, n\}$, соответственно.

7.5. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Матричные элементы матриц $^{11}S(u)$ и $^{22}(S^{-1}(v))$ коммутируют друг с другом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножая обе части четверного соотношения (3.6.2) на $S_2^{-1}(v)$ слева и справа, мы получаем соотношение

$$S_2^{-1}(v)R(u-v)S_1(u)R'(-u-v) = R'(-u-v)S_1(u)R(u-v)S_2^{-1}(v).$$

Используя равенства

$$R(u-v) = 1 - \frac{P}{u-v} \quad \text{и} \quad R'(-u-v) = 1 + \frac{Q}{u+v},$$

мы переписываем последнее соотношение следующим образом:

$$\begin{aligned} [S_1(u), S_2^{-1}(v)] &= \frac{1}{u-v}(S_1(u)PS_2^{-1}(v) - S_2^{-1}(v)PS_1(u)) \\ &\quad - \frac{1}{u+v}(QS_1(u)S_2^{-1}(v) - S_2^{-1}(v)S_1(u)Q) \\ &\quad + \frac{1}{u^2-v^2}(QS_1(u)PS_2^{-1}(v) - S_2^{-1}(v)PS_1(u)Q), \end{aligned}$$

или, в терминах матричных элементов:

$$\begin{aligned} [s_{ij}(u), s'_{kl}(v)] &= \frac{1}{u-v} \left(\delta_{kj} \sum_a s_{ia}(u)s'_{al}(v) - \delta_{il} \sum_a s'_{ka}(v)s_{aj}(u) \right) \\ &\quad - \frac{1}{u+v} \left(\delta_{i,-k} \sum_a \theta_{ak}s_{-a,j}(u)s'_{al}(v) - \delta_{j,-l} \sum_a \theta_{al}s'_{ka}(v)s_{i,-a}(u) \right) \\ &\quad + \frac{1}{u^2-v^2} \left(\delta_{i,-k} \theta_{kj} \sum_a s_{-j,a}(u)s'_{al}(v) - \delta_{j,-l} \theta_{il} \sum_a s'_{ka}(v)s_{a,-i}(u) \right). \end{aligned}$$

Таким образом, если $-m \leq i, j \leq m$ и $m < |k|, |l| \leq n$, то $[s_{ij}(u), s'_{kl}(v)] = 0$, и предложение доказано.

7.6. Положим $S^*(u) := \text{inv}(\tilde{S}(u)) = \tilde{S}^{-1}(-u - N/2)$ и обозначим через $s_{ij}^*(u)$ матричные элементы матрицы $S^*(u)$. Заметим, что при доказательстве фундаментального тождества (4.2.1) и, следовательно, при построении детерминанта Складина S -матрицы (предложения 4.3 и 4.4) мы пользовались только четверным соотношением (3.6.2) и нигде не использовали условие симметрии (3.6.3). Поэтому эти результаты остаются справедливыми для алгебры $\tilde{Y}^\pm(N)$; см. раздел 6.1. В частности, все коэффициенты в $\text{sdet } \tilde{S}(u)$ принадлежат центру алгебры $\tilde{Y}^\pm(N)$. Так как inv является автоморфизмом алгебры $\tilde{Y}^\pm(N)$, мы можем повторить конструкцию детерминанта Складина для матрицы $S^*(u)$ и получить аналог предложений 4.3 и 4.4 для этой матрицы. Применяя отображение факторизации $\tilde{Y}^\pm(N) \rightarrow Y^\pm(N)$ к равенству (1), мы получим аналог теоремы 7.3 для скрученного янгиана.

ТЕОРЕМА. В алгебре $\tilde{Y}^\pm(N)$ мы имеем

$$(1) \quad \text{sdet } \tilde{S}(u) \text{sdet } ^{22}(S^*) \left(-u + \frac{N}{2} - 1 \right) = \text{sdet } ^{11}\tilde{S}(u).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу аналога предложения 4.3 для матриц $\tilde{S}(u)$, мы имеем

$$(2) \quad \text{sdet } \tilde{S}(u) A_N = A_N \tilde{S}_1 R'_{12} \dots R'_{1N} \tilde{S}_2 \dots \tilde{S}_{N-1} R'_{N-1,N} \tilde{S}_N,$$

где $\tilde{S}_i = \tilde{S}_i(u-i+1)$ для $1 \leq i \leq N$ и $R'_{ij} = R'_{ij}(-2u+i+j-2)$ для $1 \leq i, j \leq N, i \neq j$. Используя тот факт, что $\tilde{S}_i$ и R'_{jk} коммутируют при условии $i \neq j, k$, мы переписываем правую часть (2) в виде

$$\begin{aligned} & A_N \tilde{S}_1 R'_{12} \dots R'_{1M} \tilde{S}_2 \dots \tilde{S}_{M-1} R'_{M-1,M} \tilde{S}_M R'_{1,M+1} \dots R'_{1N} \dots R'_{M,M+1} \dots R'_{MN} \\ & \quad \times \tilde{S}_{M+1} R'_{M+1,M+2} \dots R'_{M+1,N} \tilde{S}_{M+2} \dots \tilde{S}_{N-1} R'_{N-1,N} \tilde{S}_N. \end{aligned}$$

Так как все матрицы $\tilde{S}_i$ и R'_{ij} являются обратимыми, соотношение (2) эквивалентно следующему:

$$(3) \quad \begin{aligned} & \text{sdet } \tilde{S}(u) A_N \tilde{S}_N^{-1} (R'_{N-1,N})^{-1} \tilde{S}_{N-1}^{-1} \dots \tilde{S}_{M+2}^{-1} (R'_{M+1,N})^{-1} \dots (R'_{M+1,M+2})^{-1} \tilde{S}_{M+1}^{-1} \\ & = A_N \tilde{S}_1 R'_{12} \dots R'_{1M} \tilde{S}_2 \dots \tilde{S}_{M-1} R'_{M-1,M} \tilde{S}_M R'_{1,M+1} \dots R'_{1N} \dots R'_{M,M+1} \dots R'_{MN}. \end{aligned}$$

Теперь сравним диагональные элементы матриц в левой и правой частях (3), соответствующих вектору

$$v_0 = e_{-m} \otimes e_{-m+1} \otimes \dots \otimes e_m \otimes e_{-n} \otimes \dots \otimes e_{-m-1} \otimes e_{m+1} \otimes \dots \otimes e_n \in \mathcal{E}^{\otimes N}.$$

Ясно, что $R'_{ij} v_0 = v_0$, если $i \leq M$ и $j > M$. Таким образом, для правой части (3) имеем:

$$(4) \quad \begin{aligned} & A_N \tilde{S}_1 R'_{12} \dots R'_{1M} \tilde{S}_2 \dots \tilde{S}_{M-1} R'_{M-1,M} \tilde{S}_M R'_{1,M+1} \dots R'_{1N} \dots R'_{M,M+1} \dots R'_{MN} v_0 \\ & = A_N \tilde{S}_1 R'_{12} \dots R'_{1M} \tilde{S}_2 \dots \tilde{S}_{M-1} R'_{M-1,M} \tilde{S}_M v_0 \\ & = A_N \sum_{i_1, \dots, i_M} a_{i_1, \dots, i_M}(u) e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_M} \otimes e_{-n} \otimes \dots \otimes e_{-m-1} \otimes e_{m+1} \otimes \dots \otimes e_n, \end{aligned}$$

где $a_{i_1, \dots, i_M}(u)$ — некоторые элементы из алгебры $\tilde{Y}^\pm(N)[[u^{-1}]]$. Для того чтобы вычислить коэффициент при v_0 в этом разложении, мы можем принимать в расчет только те слагаемые, для которых последовательность $(i_1, \dots, i_M)$ получается перестановкой индексов $(-m, -m+1, \dots, m)$. Нетрудно видеть, что это позволяет нам заменить в (4) матрицу $\tilde{S}$ на ее подматрицу $^{11}\tilde{S}$; оператор A_N на антисимметризатор $(N!)^{-1} M! A_M$ в пространстве $(\mathbb{C}^M)^{\otimes M}$, где $\mathbb{C}^M$ является линейной оболочкой векторов $e_{-m}, e_{-m+1}, \dots, e_m$; а R' на ее сужение на пространство $\mathbb{C}^M \otimes \mathbb{C}^M$. Поэтому, в силу предложения 4.3, коэффициент при v_0 в (4) равен $(N!)^{-1} \text{sdet } ^{11}\tilde{S}(u)$.

Более того, положим $\tilde{u}_i = -u + i - \frac{N}{2} - 1$ для $i = M+1, \dots, N$. Так как

$$(R'_{ij})^{-1} = R'_{ij}(2u - i - j + N + 2),$$

мы можем представить левую часть (3) следующим образом:

$$(5) \quad \text{sdet } \tilde{S}(u) A_N S_N^* R_{N,N-1}^* \dots R_{N,M+1}^* S_{N-1}^* \dots S_{M+2}^* R_{M+2,M+1}^* S_{M+1}^*,$$

где $S_i^* = S_i^*(\tilde{u}_i)$ и $R_{ij}^* = R_{ij}^*(\tilde{u}_i - \tilde{u}_j)$. Повторяя те же рассуждения, что и для правой части (3), и используя замечание 4.6, мы получаем, что матричный элемент оператора (5) на базисном векторе v_0 равен $(N!)^{-1} \text{sdet } \tilde{S}(u) \text{sdet } ^{22}(S^*)(\tilde{u}_N)$, что доказывает теорему.

7.7. КОММЕНТАРИЙ. Предложение 7.2 (которое фактически справедливо даже для более общих R -матриц) доказано Чередником [6, теорема 2.4]. Использование квантовых детерминантов некоторых подматриц матрицы $T(u)$ было существенным в работах Дринфельда [16], Назарова–Тарасова [41], Молева [36].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Berezin F. A. Introduction to Superalgebra. Dordrecht–Boston: D. Reidel, 1987.
- [2] Bracken A. J., Green H. S. Vector operators and a polynomial identity for $SO(n)$ // J. Math. Phys. 1971. V. 12. P. 2099–2106.
- [3] O’Brien D. M., Cant A., Carey A. L. On characteristic identities for Lie algebras // Ann. Inst. Henri Poincaré. 1977. V. A26. P. 405–429.
- [4] Белавин А. А., Дринфельд В. Г. О решениях классического уравнения Янга–Бакстера для простых алгебр Ли // Функцион. анализ и его прил. 1982. Т. 16. №3. С. 1–29.
- [5] Белавин А. А., Дринфельд В. Г. О классическом уравнении Янга–Бакстера для простых алгебр Ли // Функцион. анализ и его прил. 1983. Т. 17. №3. С. 69–70.
- [6] Чередник И. В. Факторизующиеся частицы на полупрямой и системы корней // ТМФ. 1984. Т. 61. №1. С. 35–44.
- [7] Cherednik I. V. A new interpretation of Gelfand–Tsetlin bases // Duke Math. J. 1987. V. 54. P. 563–577.
- [8] Cherednik I. V. Quantum groups as hidden symmetries of classic representation theory // Differential Geometric Methods in Physics / ed. A. I. Solomon. Singapore: World Scientific, 1989. P. 47–54.
- [9] Capelli A. Über die Zurückführung der Cayley’schen Operation Ω auf gewöhnliche Polar-Operationen // Math. Ann. 1887. V. 29. P. 331–338.
- [10] Capelli A. Sur les opérations dans la théorie des formes algébriques // Math. Ann. 1890. V. 37. P. 1–37.
- [11] Carter R. W., Lusztig G. On the modular representations of the general linear and symmetric groups // Math. Z. 1974. V. 136. P. 193–242.
- [12] Chari V., Pressley A. Yangians and R -matrices // L’Enseign. Math. 1990. V. 36. P. 267–302.
- [13] Chari V., Pressley A. Fundamental representations of Yangians and singularities of R -matrices // J. Reine Angew. Math. 1991. V. 417. P. 87–128.
- [14] Дринфельд В. Г. Алгебры Хопфа и квантовое уравнение Янга–Бакстера // ДАН СССР. 1985. Т. 283. №5. С. 1060–1064.
- [15] Дринфельд В. Г. Вырожденные аффинные алгебры Гекке и янгианы // Функцион. анализ и его прил. 1986. Т. 20. №1. С. 69–70.
- [16] Дринфельд В. Г. Новая реализация янгианов и квантованных аффинных алгебр // ДАН СССР. 1987. Т. 296. №1. С. 13–17.
- [17] Drinfeld V. G. Quantum Groups // Proc. Int. Congress Math., Berkeley, 1986. Providence RI: Amer. Math. Soc., 1987. P. 798–820.
- [18] Faddeev L. D., Takhtajan L. A. Spectrum and scattering of excitations in the one-dimensional isotropic Heisenberg model // J. Soviet Math. 1984. V. 24. P. 241–267.
- [19] Gould M. D. Characteristic identities for semi-simple Lie algebras // J. Austral. Math. Soc. 1985. V. B26. P. 257–283.
- [20] Green H. S. Characteristic identities for generators of $GL(n)$, $O(n)$ and $Sp(n)$ // J. Math. Phys. 1971. V. 12. P. 2106–2113.
- [21] Howe R. Remarks on classical invariant theory // Trans. Amer. Math. Soc. 1989. V. 313. P. 539–570.
- [22] Howe R., Umeda T. The Capelli identity, the double commutant theorem, and multiplicity-free actions // Math. Ann. 1991. V. 290. P. 569–619.
- [23] Изергин А. Г., Корепин В. Е. Решеточная модель, связанная с нелинейным уравнением Шрёдингера // ДАН СССР. 1981. Т. 259. №1. С. 76–79.

- [24] Kirillov A. N., Reshetikhin N. Yu. Yangians, Bethe ansatz and combinatorics // *Lett. Math. Phys.* 1986. V. 12. P. 199–208.
- [25] Koornwinder T. H., Kuznetsov V. B. Gauss hypergeometric function and quadratic R -matrix algebras // *Алгебра и анализ*. 1994. Т. 6. №3. С. 161–184.
- [26] Kostant B. On the tensor product of a finite and an infinite dimensional representations // *J. Funct. Anal.* 1975. V. 20. P. 257–285.
- [27] Кулиш П. П., Решетихин Н. Ю. О GL_3 -инвариантных решениях уравнения Янга–Бакстера и ассоциированных квантовых системах // *Записки научн. семин. ЛОМИ*. 1982. Т. 120. С. 92–121.
- [28] Kulish P. P., Reshetikhin N. Yu., Sklyanin E. K. Yang–Baxter equation and representation theory // *Lett. Math. Phys.* 1981. V. 5. P. 393–403.
- [29] Kulish P. P., Sklyanin E. K. On the solutions of the Yang–Baxter equation // *J. Soviet Math.* 1982. V. 19. P. 1596–1620.
- [30] Kulish P. P., Sklyanin E. K. Quantum spectral transform method: recent developments // *Lect. Notes in Phys. Integrable Quantum Field Theories*. V. 151. Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1982. P. 61–119.
- [31] Kulish P. P., Sklyanin E. K. Algebraic structures related to reflection equations // *J. Phys.* 1992. V. A25. P. 5963–5975.
- [32] Kulish P. P., Sasaki R., Schwiebert G. Constant solutions of reflection equations and quantum groups // *J. Math. Phys.* 1993. V. 34. P. 286–304.
- [33] Levendorskiĭ S. Z. On PBW bases for Yangians // *Lett. Math. Phys.* 1993. V. 27. P. 37–42.
- [34] Levendorskiĭ S. Z. On generators and defining relations of Yangians // *J. Geom. Phys.* 1993. V. 12. P. 1–11.
- [35] Molev A. I. Representations of twisted Yangians // *Lett. Math. Phys.* 1992. V. 26. P. 211–218.
- [36] Molev A. I. Gelfand–Tsetlin bases for representations of Yangians // *Preprint CMA-MR19-93*. Canberra, 1993; V. 30, 1994. P. 53–60.
- [37] Molev A. I. Yangians and classical Lie algebras, Part II. Sklyanin determinant, Laplace operators, and characteristic identities for classical Lie algebras // *Preprint CMA MRR 024-94*. Canberra, 1994; V. 36, 1995. P. 923–945.
- [38] Nazarov M. L. Quantum Berezinian and the classical Capelli identity // *Lett. Math. Phys.* 1991. V. 21. P. 123–131.
- [39] Nazarov M. L. Yangians of the ‘strange’ Lie superalgebras. *Quantum Groups* // *Lecture Notes in Math.* / ed. P. P. Kulish. V. 1510. Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1992. P. 90–97.
- [40] Noumi M. Macdonald’s symmetric polynomials as zonal spherical functions on some quantum homogeneous spaces // *Preprint UTMS 93-42*. Tokyo, June 1993.
- [41] Nazarov M., Tarasov V. Yangians and Gelfand–Zetlin bases // *Preprint RIMS*, Kyoto Univ., February 1993; // *Proc. RIMS*, Kyoto Univ. V. 30, 1994. P. 459–478.
- [42] Olshanskiĭ G. I. Representations of infinite-dimensional classical groups, limits of enveloping algebras, and Yangians. *Topics in Representation Theory* // *Adv. in Soviet Math.* / ed. A. A. Kirillov. V. 2. Providence RI: Amer. Math. Soc., 1991. P. 1–66.
- [43] Olshanskiĭ G. I. Twisted Yangians and infinite-dimensional classical Lie algebras. *Quantum Groups* // *Lect. Notes in Math.* / ed. P. P. Kulish. V. 1510. Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1992. P. 103–120.
- [44] Переломов А. М., Попов В. С. Операторы Казимира для полупростых алгебр Ли // *Изв. АН СССР*. 1968. Т. 32. №6. С. 1368–1390.
- [45] Решетихин Н. Ю. Интегрируемые модели квантовых одномерных магнетиков с $O(n)$ - и $Sp(2k)$ -симметрией // *ТМФ*. 1985. Т. 63. №3. С. 347–366.
- [46] Reshetikhin N. Yu., Semenov-Tian-Shansky M. A. Central extensions of quantum current groups // *Lett. Math. Phys.* 1990. V. 19. P. 133–142.
- [47] Решетихин Н. Ю., Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Квантование групп Ли и алгебр Ли // *Алгебра и анализ*. 1989. Т. 1. №1. С. 178–206.

- [48] Sklyanin E. K. Quantum version of the method of inverse scattering problem // J. Soviet. Math. 1982. V. 19. P. 1546–1596; // Записки научн. семин. ЛОМИ. 1980. Т. 95. С. 55–128.
- [49] Sklyanin E. K. Boundary conditions for integrable quantum systems // J. Phys. 1988. V. A21. P. 2375–2389.
- [50] Тарасов В. О. О строении квантовых L -операторов для R -матрицы XXZ -модели // ТМФ. 1984. Т. 61. №2. С. 1065–1071.
- [51] Тарасов В. О. Неприводимые матрицы монодромии для R -матрицы XXZ -модели и решеточные локальные квантовые гамильтонианы // ТМФ. 1985. Т. 63. №2. С. 175–196.
- [52] Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Квантовый метод обратной задачи и XYZ -модель Гейзенберга // УМН. 1979. Т. 34. №5. С. 13–63.
- [53] Weyl H. Classical Groups, their Invariants and Representations. Princeton NJ: Princeton Univ. Press, 1946.

School of Mathematical Sciences

Australian National University

Canberra 0200, Australia;

Mathematics Department

University of Wales

Swansea SA2 8PP, United Kingdom;

Institute for Problems of Information Transmission

Moscow 101447, Russia.

Поступила в редакцию

23.03.1995