Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Райгородский, Д. А. Шабанов, Задача Эрдеша–Хайнала о раскрасках гиперграфов, ее обобщения и смежные проблемы, *УМН*, 2011, том 66, выпуск 5, 109–182

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9443>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 17:10:58

УДК 519.112.7+519.174+519.179.1

Задача Эрдеша–Хайнала о раскрасках гиперграфов, ее обобщения и смежные проблемы

А. М. Райгородский, Д. А. Шабанов

Экстремальные задачи, посвященные раскраскам гиперграфов, впервые возникли в связи с классическими работами 20–30-х годов XX века, положившими начало теории Рамсея. С тех пор данная область исследований занимает одно из центральных мест в экстремальной комбинаторике. Настоящий обзор посвящен одной известной задаче о раскраске гиперграфа – задаче Эрдеша–Хайнала, впервые поставленной в 1961 г. Из этой проблемы выросло целое направление в теории гиперграфов, результаты и методы которого находят широкое применение в различных областях дискретной математики.

Библиография: 109 названий.

Ключевые слова: гиперграф, раскраски гиперграфов, хроматическое число, экстремальная теория множеств.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение.....	110
2. Задача Эрдеша–Хайнала.....	111
2.1. Задача для двух цветов.....	111
2.2. Задача для произвольного числа цветов.....	112
2.3. Задача для малых значений параметров.....	118
3. Обобщения задачи Эрдеша–Хайнала.....	121
3.1. Простые гиперграфы.....	121
3.2. Системы Штейнера и (n, l) -системы.....	129
3.3. Гиперграфы-клики.....	134
3.4. Гиперграфы с большим обхватом.....	138
3.5. Предписанные раскраски.....	139
3.6. Полноцветные раскраски.....	142
4. Смежные проблемы.....	147
4.1. Системы общих представителей.....	147
4.2. Задача о максимальной степени вершины.....	148
4.3. Оценки в теореме Ван дер Вардена.....	153

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-00294) и программы “Ведущие научные школы” (грант НШ-8784.2010.1); первый автор поддержан также грантом Президента РФ МД-8390.2010.1; второй автор поддержан также грантом Президента РФ МК-3429.2010.1.

5. Доказательства некоторых оценок в задаче Эрдеша–Хайнала.....	158
5.1. Оценки Эрдеша.....	158
5.2. Оценка Радхакришнана–Сринивасана и ее обобщение.....	161
5.3. Нижняя оценка Алона.....	168
5.4. Оценка Плухара и ее улучшение.....	169
6. Другие доказательства.....	171
6.1. Нижние оценки величины $m^*(n, r)$	171
6.2. Рекуррентные соотношения для $m(n)$	173
Список литературы.....	177

1. Введение

Теория гиперграфов – это один из самых современных и активно развивающихся разделов дискретной математики. Напомним, что *гиперграфом* называется пара $H = (V, E)$, где $V = V(H)$ – некоторое (как правило, конечное) множество, называемое *множеством вершин* гиперграфа, а $E = E(H)$ – произвольная совокупность подмножеств множества V , называемых *ребрами* гиперграфа. Гиперграф является *n -однородным*, если каждое его ребро содержит ровно n вершин. Частным случаем однородного гиперграфа служит, разумеется, обыкновенный граф (без петель, кратных ребер и ориентации), и это лишний раз свидетельствует о значимости науки о гиперграфах.

Практически все классические проблемы теории графов допускают естественные обобщения на случай произвольных гиперграфов. Одной из таких проблем служит проблема раскраски – отыскания хроматического числа.

Дадим основные определения. Во-первых, раскраска множества вершин $V(H)$ гиперграфа H называется *правильной*, если в этой раскраске все ребра из $E(H)$ неодноразноцветны. *Хроматическим числом* гиперграфа H называется минимальное число цветов, требуемое для правильной раскраски вершин этого гиперграфа. Мы будем обозначать хроматическое число гиперграфа H через $\chi(H)$.

В принципе, правильную раскраску ребер, каждое из которых содержит более двух вершин, можно понимать по-разному, и различным обобщениям понятия хроматического числа мы также уделим немало места в этой статье. Однако пока мы остановимся на указанном определении.

Как и в случае графа, вопрос о “двудольности” (т.е. вопрос о равенстве хроматического числа двум) играет исключительную роль в науке. Поэтому для гиперграфа была предложена даже специальная терминология. А именно, говорят, что гиперграф *обладает свойством B* , если его хроматическое число равно двум.

Благодаря исследованию гиперграфов, обладающих или не обладающих свойством B , и зародилась та многогранная, богатая идеями и приложениями наука, о которой мы поговорим в данном обзоре.

Прежде чем переходить к основной части статьи, приведем несколько ссылок на литературу о гиперграфах: [1], [2], [3], [4].

2. Задача Эрдеша–Хайнала

В данном разделе будет изложена история классической задачи Эрдеша–Хайнала о минимальном количестве ребер гиперграфа с большим хроматическим числом.

2.1. Задача для двух цветов. Довольно легко понять, что если при данном n количество ребер в n -однородном гиперграфе достаточно мало, то такой гиперграф заведомо двудолен (обладает свойством B). Например, любой граф с не более чем двумя ребрами имеет хроматическое число, не превосходящее двух. Отталкиваясь от этого простого соображения, П. Эрдеш и А. Хайнал в 1961 г. (см. [5]) поставили следующую задачу: *найти величину $m(n)$, равную минимально возможному числу ребер гиперграфа в классе n -однородных гиперграфов с хроматическим числом больше 2.* Формально определение $m(n)$ можно записать так:

$$m(n) = \min\{|E(H)| : H - n\text{-однородный гиперграф, } \chi(H) > 2\}.$$

Эрдеш и Хайнал показали, что

$$m(n) \leq \binom{2n-1}{n} \sim \frac{2^{2n-1}}{\sqrt{\pi n}}. \quad (1)$$

Однако порядок роста величины $m(n)$ оказался существенно меньше, чем у приведенной простой верхней оценки. Первые нетривиальные результаты относительно $m(n)$ были получены Эрдешем в 1963–64 гг. (см. [6], [7]). Он показал, что выполняются неравенства

$$2^{n-1} \leq m(n) \leq e(\ln 2)n^2 \cdot 2^{n-2}(1 + o(1)). \quad (2)$$

Доказательства данных оценок, которые можно найти, например, в книгах [8] и [9], основаны на применении простых вероятностных соображений. Теоремы Эрдеша о поведении величины $m(n)$ – это один из самых ярких примеров того, что простые вероятностные конструкции могут давать мощные результаты в экстремальных задачах комбинаторики.

Верхняя оценка из (2) так и не была улучшена в асимптотике. Нижняя же оценка улучшалась многократно. Первое повышение нижней оценки для $m(n)$ было получено В. Шмидтом (см. [10]). Он доказал, что для всех $n \geq 2$ выполнено

$$m(n) \geq 2^n \frac{n}{n+2}.$$

Как несложно понять, оценка Шмидта асимптотически лишь в 2 раза лучше оценки Эрдеша. В 1973 г. П. Эрдеш и Л. Ловас в знаменитой совместной работе [11] высказали следующую гипотезу о порядке роста величины $m(n)$.

ГИПОТЕЗА 1 (П. Эрдеш, Л. Ловас [11]). *При $n \rightarrow \infty$ выполнено $m(n)/2^n \rightarrow \infty$.*

Данное предположение было доказано в 1977 г. Й. Беком, которому удалось показать (см. [12]), что для всех $n \geq 2$ имеет место неравенство

$$m(n) \geq \frac{1}{5} (\log_2 n) \cdot 2^n.$$

Год спустя Бек (см. [13]) улучшил свой результат. Он обосновал существование для всякого $\delta > 0$ такого натурального числа $n(\delta)$, что при любом $n > n(\delta)$ выполнено

$$m(n) \geq n^{1/3-\delta} \cdot 2^n. \quad (3)$$

Фактически, Беком было доказано, что $m(n) \geq n^{1/3-\delta(n)} \cdot 2^n$, где $\delta(n) = o(1)$. Однако явный вид функции δ Бек не указывал, и найти его, исходя из выкладок Бека, практически невозможно. Дж. Спенсер (см. [14]) предложил более простой вариант доказательства данного результата Бека, основанный на применении так называемого “рандомизированного” алгоритма раскраски вершин гиперграфа. Эта вероятностная технология позволила получить явный вид величины δ , и оценка (3) в итоге приняла вид

$$m(n) \geq \text{const} \left(\frac{n}{\ln n} \right)^{1/3} \cdot 2^n.$$

Следующего улучшения нижней оценки величины $m(n)$ пришлось ждать почти двадцать лет. В 2000 г. Дж. Радхакришнан и А. Сринивасан опубликовали работу [15], в которой предложили усовершенствованный алгоритм случайной раскраски вершин гиперграфа. С помощью данного алгоритма им удалось доказать, что при всех $n \geq 2$ выполняется неравенство

$$m(n) \geq 0.1 \left(\frac{n}{\ln n} \right)^{1/2} \cdot 2^n. \quad (4)$$

Отметим, что константу 0.1 в (4) можно заменить на 0.7, если n достаточно велико.

На сегодняшний день оценка $m(n)$, полученная Радхакришнаном и Сринивасаном, является асимптотически наилучшей. Зазор между ней и верхней оценкой из (2) составляет по порядку $n^{3/2}(\ln n)^{1/2}$. В своей работе [7] Эрдеш высказал еще одно предположение о порядке роста $m(n)$.

ГИПОТЕЗА 2 (П. Эрдеш [7]). *Величина $m(n)$ имеет порядок роста $n \cdot 2^n$.*

Данную гипотезу пока не удалось ни доказать, ни опровергнуть. Вопрос об истинном асимптотическом поведении величины $m(n)$ по-прежнему остается открытым.

В пп. 5.1 и 5.2 мы докажем оценки (2) и (4) соответственно. Вернее, мы получим их как следствия более общих результатов, о которых речь пойдет в следующем пункте. В п. 5.2 мы также продемонстрируем развитие вероятностной технологии, позволившей перейти от оценки (3) к оценке (4).

2.2. Задача для произвольного числа цветов. Естественное обобщение задачи Эрдеша–Хайнала о нахождении величины $m(n)$ было предложено в 1972 г. М. Херцогом и Й. Шёнхаймом (см. [16]): *отыскать величину $m(n, r)$, равную минимально возможному числу ребер гиперграфа в классе n -однородных гиперграфов с хроматическим числом больше r .* По аналогии с $m(n)$, определение $m(n, r)$ можно формально записать в следующем виде:

$$m(n, r) = \min\{|E(H)| : H - n\text{-однородный гиперграф, } \chi(H) > r\}.$$

Ясно, что $m(n) = m(n, 2)$.

Легко показать, что величина $m(n, r)$ конечна при любых значениях $n \geq 2$, $r \geq 2$. Рассмотрим гиперграф $H = (V, E)$, где $V = \{1, 2, \dots, r(n-1) + 1\}$, а $E = \binom{V}{n}$ (т. е. E – совокупность всех n -элементных подмножеств множества V). Согласно принципу Дирихле, в любой r -цветной раскраске множества V найдутся n вершин, покрашенные в один цвет, т. е. найдется одноцветное ребро. Следовательно, $\chi(H) > r$ и

$$m(n, r) \leq |E| = \binom{r(n-1) + 1}{n}. \quad (5)$$

В частности, при $r = 2$ имеем простую первоначальную оценку Эрдеша–Хайнала $m(n) \leq \binom{2n-1}{n}$. Возникает естественный вопрос: является ли оценка (5) точной? Как отметил Эрдеш в [17], при $n = 2$ ответ положительный.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Для любого $r \geq 2$ выполнено $m(2, r) = \binom{r+1}{2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что 2-однородный гиперграф – это обыкновенный граф. Для доказательства утверждения достаточно показать, что для любого графа G с менее чем $\binom{r+1}{2}$ ребрами выполнено неравенство $\chi(G) \leq r$. Проведем рассуждение индукцией по числу вершин в графе.

Если $G = (V, E)$ и $|V| \leq r$, то очевидно, что $\chi(G) \leq r$.

Пусть для $v > r$ доказано, что любой граф $G = (V, E)$ с условиями $|V| < v$ и $|E| < \binom{r+1}{2}$ имеет хроматическое число, не превосходящее r . Рассмотрим произвольный граф $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ с условиями $|\tilde{V}| = v$ и $|\tilde{E}| < \binom{r+1}{2}$. В силу очевидных неравенств

$$v \min_{u \in \tilde{V}} \deg u \leq \sum_{u \in \tilde{V}} \deg u = 2|\tilde{E}| < r(r+1)$$

получаем, что $\tilde{G}$ содержит вершину $u \in \tilde{V}$ степени строго меньше r . Рассмотрим граф $G' = (V', E')$, где $V' = \tilde{V} \setminus \{u\}$, а $E' = \{e \in \tilde{E} : u \notin e\}$. По предположению индукции $\chi(G') \leq r$, следовательно, для G' существует правильная раскраска в r цветов. Коль скоро нам нужно из нее получить искомую раскраску для $\tilde{G}$, следует так подобрать цвет для вершины u , чтобы все ребра, содержащие u , были неоднородными. Но количество этих ребер строго меньше r , поэтому необходимый нам цвет найдется. Утверждение 1 доказано.

Однако в общем случае оценка (5) неточна. По аналогии с неравенствами (2) для $m(n)$, несложно доказать следующие оценки величины $m(n, r)$:

$$r^{n-1} \leq m(n, r) \leq \frac{e}{2} n^2 (r-1) r^{n-1} (\ln r) \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \quad (6)$$

Доказательства данных неравенств можно найти, например, в [18].

Сравним верхние оценки (5) и (6). Если r фиксировано, а $n \rightarrow \infty$, то верхняя оценка из (5) имеет асимптотику

$$\begin{aligned} \binom{rn}{n} &\geq \frac{1+o(1)}{\sqrt{2\pi n}} \cdot \left(\frac{r^r}{(r-1)^{r-1}} \right)^n = \frac{1+o(1)}{\sqrt{2\pi n}} \cdot (r-1)^n \left(1 - \frac{1}{r}\right)^{-rn} \\ &> \frac{1+o(1)}{\sqrt{2\pi n}} \cdot (r-1)^n e^n > \frac{1+o(1)}{\sqrt{2\pi n}} \cdot r^n (1.3)^n. \end{aligned}$$

В то же время верхняя оценка из (6) имеет порядок роста $r^n n^2$. Стало быть, оценка (6) в указанных предположениях значительно сильнее оценки (5).

Если же, наоборот, зафиксировать n и устремить r к бесконечности, то оценка из (5) будет иметь порядок роста r^n . Вместе с тем правая часть оценки (6) растет как $r^n \ln r$. Следовательно, в этом случае неравенство (5) уточняет неравенство (6).

В связи с указанными наблюдениями Эрдеш (см. [17]) предположил, что при больших значениях r достигается именно оценка (5).

ГИПОТЕЗА 3 (П. Эрдеш [17]). *Для любого $n \geq 3$ существует такое натуральное число $r_0(n)$, что для любого $r > r_0(n)$ выполняется равенство*

$$m(n, r) = \binom{r(n-1)+1}{n}.$$

Это предположение для почти всех значений n было опровергнуто в 1985 г. Н. Алоном, который в статье [19] доказал следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1 (Н. Алон [19]). *Для любых $n \geq 3$, $r \geq 2$ выполняется неравенство*

$$m(n, r) \leq \binom{rn}{n} \frac{\ln n}{\ln n - 1} \frac{1}{\lfloor n/\ln n \rfloor}. \quad (7)$$

Чтобы понять, почему данный факт опровергает гипотезу 3, рассмотрим отношение правых частей оценок (7) и (5) при фиксированном n и растущем r . Имеем

$$\frac{\binom{rn}{n} \frac{\ln n}{\ln n - 1} \frac{1}{\lfloor n/\ln n \rfloor}}{\binom{r(n-1)+1}{n}} \rightarrow \left(\frac{n}{n-1} \right)^n \frac{\ln n}{\ln n - 1} \frac{1}{\lfloor n/\ln n \rfloor}.$$

Начиная с $n = 13$, предел строго меньше 1, поэтому при всех достаточно больших r верхняя оценка (7) становится лучше, чем (5). Таким образом, теорема 1 опровергает гипотезу Эрдеша для $n \geq 13$. Вопрос Эрдеша о предельной точности тривиальной оценки (5) для $n \in [3, 12]$ остается открытым.

Еще один результат, полученный Алоном в [19], дает верхнюю оценку $m(n, r)$ в случае, когда $r/n \rightarrow \infty$.

ТЕОРЕМА 2 (Н. Алон [19]). *Пусть для функции $r = r(n)$ выполнено $r/n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда*

$$m(n, r) = O\left(n^{3/2}(\ln n) \left(\frac{3}{4}\right)^n \binom{r(n-1)+1}{n}\right). \quad (8)$$

Ясно, что (8) асимптотически лучше оценок (5) и (7) при выполнении условий теоремы 2. А если, к тому же, $\ln r = \Omega\left(\left(\frac{3e}{4}\right)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right)$,¹ то оценка (8) имеет вид

$$m(n, r) = O\left(n^{3/2}(\ln n) \left(\frac{3}{4}\right)^n \left(\frac{rne}{n}\right)^n\right) = O\left(n^{3/2}(\ln n) \left(\frac{3}{4}\right)^n (re)^n\right),$$

тогда как правая часть оценки из (6) имеет порядок

$$n^2 r^n \ln r = \Omega\left(n^{3/2}(\ln n) \left(\frac{3}{4}\right)^n (re)^n\right).$$

Иными словами, оценка (8) становится сильнее, чем оценка (6). Доказательства теорем 1 и 2 опираются на различные оценки многопараметрического числа Турана, полученные П. Франклом и В. Рёдлем в [20] (см. также [21] и п. 4.1).

Неравенства (5), (6), (7) и (8) – это наилучшие из известных асимптотических верхних оценок величины $m(n, r)$. Соотношения между ними являются достаточно сложными, поэтому мы отметим лишь некоторые основные моменты их сопоставления.

1. Если r фиксировано, а n растет, то наилучшей является оценка (6).
2. Если же, наоборот, n фиксировано, а r растет, то наилучшей является оценка (7). Только в случаях, когда $n \in [3, 12]$, оценка (5), возможно, уточняет оценку (6).
3. Если $r = r(n)$ удовлетворяет условию $\left(\frac{3e}{4}\right)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}} = o(\ln r)$ при $n \rightarrow \infty$, то асимптотически наилучшей является оценка (8).

Перейдем к обсуждению нижних оценок $m(n, r)$. Как мы знаем, при фиксированном n и растущем r величина $m(n, r)$ имеет порядок $O(r^n)$ (ср. (5)). Однако нижняя оценка (6) представляет собой всего лишь $\Omega(r^{n-1})$. Какой же порядок роста правильный? В 1985 г. Алон показал, что на самом деле $m(n, r) = \Omega(r^n)$. Этот факт вытекает из следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 3 (Н. Алон [19]). *Для всех $n \geq 2$, $r \geq 2$ выполняется неравенство*

$$m(n, r) > (n-1) \left\lfloor \frac{r}{n} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{n} r \right\rfloor^{n-1}. \quad (9)$$

Действительно, при фиксированном n и стремящемся к бесконечности r правая часть соотношения (9) эквивалентна $\text{const}(n) r^n$. Такая нижняя оценка долгое время оставалась асимптотически наилучшей для случая фиксированного размера ребра n и растущего числа цветов r (см. п. 5.3).

Дальнейшие результаты в данной задаче были получены уже в XXI веке. В 2004 г. А. В. Косточка доказал следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4 (А. В. Косточка [22]). *Если $r < \sqrt{\frac{1}{8} \ln \frac{\ln n}{2}}$, то при $a = \lfloor \log_2 r \rfloor$ выполняется неравенство*

$$m(n, r) \geq e^{-4r^2} \left(\frac{n}{\ln n}\right)^{a/(a+1)} r^n. \quad (10)$$

¹Мы пишем $f(n) = \Omega(g(n))$, если $g(n) = O(f(n))$, и $f(n) = \Theta(g(n))$, если $g(n) = O(f(n))$ и $f(n) = O(g(n))$.

Таким образом, если r растет как функция от n , то правая часть (10) принимает вид $(n/\ln n)^{1-o(1)}r^n$. Оценка, полученная Косточкой, безусловно, асимптотически лучше нижних оценок (6) и (9) величины $m(n, r)$, однако она выполняется лишь для $r = O(\sqrt{\ln \ln n})$. Доказательство теоремы 4 основано на анализе многоступенчатого алгоритма случайной раскраски множества вершин гиперграфа.

Еще ряд результатов был получен в 2009 г. Сперва Д. А. Шабанов (см. [23]) нашел обобщение результата Радхакришнана–Сринивасана (4) для произвольного значения параметра r .

ТЕОРЕМА 5 (Д. А. Шабанов [23]). *Для любых $n \geq 2$, $r \geq 2$ выполняется неравенство*

$$m(n, r) \geq (\sqrt{3} - 1) \left(\frac{n}{\ln n} \right)^{1/2} r^{n-1}. \quad (11)$$

Доказательство данной оценки также опирается на применение вероятностных методов (см. п. 5.2).

Затем в том же 2009 г. А. Плухаром (см. [24]) был предложен несколько иной подход, основанный на жадном алгоритме раскраски вершин гиперграфа. Этот подход позволил обосновать следующую нижнюю оценку величины $m(n, r)$.

ТЕОРЕМА 6 (А. Плухар [24]). *Для любых $n \geq 2$, $r \geq 2$ выполняется неравенство*

$$m(n, r) \geq \frac{1}{\sqrt{4\pi e}} n^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2r}} r^{n-1}. \quad (12)$$

Наконец, последнее неравенство было уточнено Шабановым в [25].

ТЕОРЕМА 7 (Д. А. Шабанов [25]). *Для любых $n \geq 2$, $r \geq 2$ выполняется неравенство*

$$m(n, r) \geq \left(\pi^{\frac{1}{r}} e^{-\frac{1}{12(n-1)}} \right) \frac{1}{e\sqrt{2\pi}} (n-1)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2r}} r^{n+\frac{2}{r}}. \quad (13)$$

Данный результат особо интересен тем, что из него следует, что для любой функции $r = r(n)$ выполнено: $m(n, r)/r^n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ (см. п. 5.4).

Уже в 2010 г. Шабановым была получена оценка для $m(n, r)$, улучшающая многие предыдущие результаты.

ТЕОРЕМА 8 (Д. А. Шабанов [26]). *Для любых $n \geq 2$, $r \geq 3$ выполняется неравенство*

$$m(n, r) \geq \frac{1}{4} n^{1/2} r^{n-1}. \quad (14)$$

Каковы соотношения между известными нижними оценками (6), (9), (10), (11), (12), (13) и (14)? Как и в других многопараметрических задачах, при различных соотношениях между параметрами оценки соотносятся по-разному. Мы будем изучать асимптотические соотношения между оценками, рассматривая r как функцию от n .

Заметим, что оценка (6) всегда хуже (11). Кроме того, результат (12) слабее (13), поэтому оценки (6) и (12) мы рассматривать не будем. Они не дадут нам асимптотически наилучшей нижней оценки ни в какой области изменения параметров.

Выясним, почему результат (9) слабее результата (13). Если $r \geq n$, то правая часть (9) оценивается сверху выражением

$$(n-1) \left\lceil \frac{r}{n} \right\rceil \left\lfloor \frac{n-1}{n} r \right\rfloor^{n-1} \leq 2r^n,$$

что, безусловно, слабее (13), начиная с некоторого фиксированного n . Если же $n^{4/5} < r < n$, то

$$(n-1) \left\lceil \frac{r}{n} \right\rceil \left\lfloor \frac{n-1}{n} r \right\rfloor^{n-1} = (n-1)(r-1)^{n-1} \leq nr^{n-1} \leq n^{1/5} r^n \leq n^{-1/20} n^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2r}} r^n.$$

Данная цепочка неравенств означает, что и в этом случае (13) асимптотически сильнее (9). Наконец, если $r \leq n^{4/5}$, то

$$\begin{aligned} (n-1) \left\lceil \frac{r}{n} \right\rceil \left\lfloor \frac{n-1}{n} r \right\rfloor^{n-1} &= (n-1)(r-1)^{n-1} \leq nr^n \left(1 - \frac{1}{r}\right)^n \\ &\leq nr^n e^{-n/r} \leq r^n n e^{-n^{1/5}}. \end{aligned}$$

Таким образом, существует такое n_0 , что для всех $n \geq n_0$ и $r \geq 2$ оценка (13) превосходит оценку (9).

Перейдем теперь непосредственно к сравнению оставшихся четырех оценок: (10), (11), (13) и (14).

Начнем со случая $r = 2$. Тогда, как уже было отмечено в п. 2.1, наилучшей асимптотической нижней оценкой является оценка (4). Отметим, что оценки (10) и (11) при $r = 2$ имеют тот же самый порядок роста, что и (4): $\sqrt{n/\ln n} \cdot 2^n$, – а результат (13) имеет вид $\text{const} \cdot n^{1/4} \cdot 2^n (1 + o(1))$.

Теперь рассмотрим случай $r = 3$. В этом случае оценки (10) и (11) имеют порядок роста $\sqrt{n/\ln n} \cdot 3^n$, что асимптотически слабее оценки (14), имеющей вид $(1/12)\sqrt{n} \cdot 3^n$. Оценка же (13) имеет вид $\text{const} \cdot n^{1/3} \cdot 3^n (1 + o(1))$. Таким образом, наилучшим является результат (14).

При $3 < r \leq \sqrt{\frac{1}{8} \ln \frac{\ln n}{2}}$ наилучшей является оценка (10). Действительно, (10) в этих условиях имеет вид $\Omega(n^{2/3+o(1)} r^n)$, в то время как правые части (11), (13), (14) мажорируются выражением $n^{1/2} r^n$.

В области $r > \sqrt{\frac{1}{8} \ln \frac{\ln n}{2}}$ оценка (10) не доказана, а потому в этой области нам следует сравнить оценки (13) и (14) (оценка (11), очевидно, слабее (14) при всех $r > 2$). Очевидно, что отношение правых частей (13) и (14) имеет порядок

$$rn^{-1/(2r)} = \exp \left\{ \ln r - \frac{\ln n}{2r} \right\}.$$

Если $r \leq c \frac{\ln n}{\ln \ln n}$, где c – некоторая константа из $(0, 1/2)$, то

$$\ln r - \frac{\ln n}{2r} \leq \left(1 - \frac{1}{2c}\right) (\ln \ln n) (1 + o(1)) \rightarrow -\infty, \quad n \rightarrow \infty,$$

и, следовательно, в этой области (14) сильнее (13). Если же, наоборот, $r \geq c \frac{\ln n}{\ln \ln n}$, где $c > \frac{1}{2}$ – некоторая константа, то

$$\ln r - \frac{\ln n}{2r} \geq \left(1 - \frac{1}{2c}\right)(\ln \ln n)(1 + o(1)) \rightarrow +\infty, \quad n \rightarrow \infty,$$

и соотношение между (14) и (13) будет обратным: (13) асимптотически сильнее.

Подведем итоги сравнения нижних оценок величины $m(n, r)$.

1. Если $r = 2$, то наилучшей является оценка Радхакришнана и Сринивасана (4).
2. Если $r = 3$, то наилучшей является оценка Шабанова (14).
3. Если $3 < r < \sqrt{\frac{1}{8} \ln \frac{\ln n}{2}}$, то асимптотически наилучшей является оценка Косточки (10).
4. Если $\sqrt{\frac{1}{8} \ln \frac{\ln n}{2}} \leq r \leq c \frac{\ln n}{\ln \ln n}$ при $c \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, то асимптотически наилучшей является оценка Шабанова (14).
5. Если $r \geq c \frac{\ln n}{\ln \ln n}$ при $c > \frac{1}{2}$, то асимптотически наилучшей является оценка Шабанова (13).

Завершим изложение асимптотических результатов в задаче Эрдеша–Хайнала формулировкой гипотезы, принадлежащей Алону.

ГИПОТЕЗА 4 (Н. Алон [19]). *Для любого $n \geq 2$ существует предел*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{m(n, r)}{r^n}.$$

Проблема Эрдеша–Хайнала является центральной задачей настоящего обзора. История получения результатов относительно величины $m(n, r)$ неразрывно связана с развитием вероятностных методов, которые затем нашли применение во многих других задачах теории гиперграфов. В разделе 5 будут представлены доказательства некоторых оценок $m(n, r)$. Эти доказательства мы считаем одними из наиболее красивых и содержательных примеров приложения вероятностных методов в задачах экстремальной комбинаторики. Нами будут доказаны оценки Эрдеша (6) (см. п. 5.1), Алона (9) (см. п. 5.3), Радхакришнана и Сринивасана (4) (точнее, ее общий случай – теорема 5; см. п. 5.2), а также Шабанова (13) (см. п. 5.4).

2.3. Задача для малых значений параметров. В п. 2.1 было рассказано об асимптотических оценках величины $m(n)$. Однако, когда значения параметра n невелики, соответствующие результаты и методы, с помощью которых они были получены, не дают хороших оценок.

На сегодняшний день известны только три первых значения функции $m(n)$ (см. [17], [18]). Ясно, что $m(1) = 1$, а $m(2) = 3$ (последний факт есть к тому же частный случай общего утверждения 1 для $m(n, r)$). Также легко доказать, что $m(3) = 7$. Верхнюю оценку для $m(3)$ дает 3-однородный гиперграф $H = (V, E)$ с семью вершинами и семью ребрами, задаваемый точками плоскости Фано:

у него $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ и

$$E = \left\{ \{1, 2, 3\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 6, 7\}, \{2, 4, 6\}, \right. \\ \left. \{2, 5, 7\}, \{3, 4, 7\}, \{3, 5, 6\} \right\}.$$

Приведенный гиперграф имеет хроматическое число, равное трем. Для обоснования оценки $m(3) \geq 7$ достаточно проверить, что любой 3-однородный гиперграф с шестью ребрами имеет хроматическое число, равное двум. Если такой гиперграф имеет не более шести вершин, то данный факт устанавливается с помощью простых вероятностных рассуждений. В случае же большего числа вершин можно воспользоваться следующим утверждением, доказательство которого приводится в работах различных авторов (см. [27]–[31]).

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть гиперграф $H = (V, E)$ не имеет одновершинных ребер и вершин нулевой степени. Пусть, кроме того, $\chi(H) > 2$. Тогда выполняется неравенство $|E| \geq |V|$.

Другие соотношения между числом ребер и числом вершин в гиперграфах из различных классов были получены в работах А. В. Косточки с соавторами (см. [32], [33]).

При $n > 3$ точное значение $m(n)$ неизвестно. Наилучшие верхние оценки для $m(4)$, $m(5)$, $m(6)$ и т. д. были получены с помощью рекуррентных неравенств для последовательности $m(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Первое подобное соотношение было установлено Х. Абботом и Л. Мозером (см. [34]) в 1964 г.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3 (Х. Аббот, Л. Мозер [34]). Для любых натуральных a, b выполнено неравенство

$$m(ab) \leq m(a)(m(b))^a. \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем a -однородный гиперграф $H = (V, E)$ с $\chi(H) > 2$, который имеет $m(a)$ ребер. Без ограничения общности будем считать, что $V = \{1, 2, \dots, v\}$. Пусть $H_1 = (V_1, E_1)$ – b -однородный гиперграф с $m(b)$ ребрами и условием $\chi(H_1) > 2$. Рассмотрим $H_i = (V_i, E_i)$, $i = 2, \dots, v$, – непересекающиеся копии гиперграфа H_1 . Построим ab -однородный гиперграф $\tilde{H} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ следующим образом. Положим $\tilde{V} = \bigcup_{i=1}^v V_i$. Пусть $h \in E$ – некоторое ребро гиперграфа H , $h = \{s_1, \dots, s_a\}$. Обозначим через $\tilde{E}_h$ совокупность всевозможных объединений ребер гиперграфов $H_{s_1}, \dots, H_{s_a}$, взятых по одному из каждого гиперграфа: $\tilde{E}_h = \{f_1 \cup \dots \cup f_a : f_i \in E_{s_i} \forall i = 1, \dots, a\}$. Получается $(m(b))^a$ подмножеств множества $\tilde{V}$, каждое из которых имеет мощность ab . Наконец, положим $\tilde{E} = \bigcup_{h \in E} \tilde{E}_h$. Из построения следует, что $\tilde{H} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ – ab -однородный гиперграф, у которого $m(a)(m(b))^a$ ребер. Проверим, что $\chi(\tilde{H}) > 2$.

Пусть ρ – произвольная раскраска множества $\tilde{V}$ в два цвета. Тогда ρ задает двухцветные раскраски на всех множествах V_i , $i = 1, \dots, v$. Поскольку $\chi(H_i) > 2$ для всех $i = 1, \dots, v$, в каждом из гиперграфов H_i найдется одноцветное в ρ ребро, которое мы обозначим e_i (если таких ребер несколько, то возьмем любое из них). Рассмотрим следующую раскраску множества V вершин гиперграфа H : вершине $i \in V = \{1, \dots, v\}$ сопоставляем цвет, в который

покрашено выбранное нами ребро e_i . Получается некоторая раскраска $\tilde{\rho}$ множества V в два цвета. Поскольку $\chi(H) > 2$, найдется одноцветное в $\tilde{\rho}$ ребро h_0 гиперграфа H . Из построения множества $\tilde{E}_{h_0}$ следует, что $\tilde{e} = \bigcup_{i \in h_0} e_i \in \tilde{E}_{h_0}$.

Ребро h_0 одноцветно в $\tilde{\rho}$, следовательно, все вершины ребер e_i , $i \in h_0$, покрашены в один и тот же цвет в раскраске ρ . Таким образом, мы предъявили одноцветное ребро $\tilde{e} \in \tilde{E}$. Значит, в силу произвольности ρ , $\chi(\tilde{H}) > 2$. Утверждение 3 доказано.

Из неравенства (15) получаем, что $m(4) \leq 27$, $m(6) \leq 147$. В 1969 г. Х. Абботом и Д. Хансенom были получены (см. [35]) следующие соотношения между элементами последовательности $m(n)$.

ТЕОРЕМА 9 (Х. Аббот, Д. Хансен [35]). *Имеют место неравенства*

$$m(n) \leq m(n-2)n + 2^{n-1}, \quad \text{если } n - \text{нечетное}, \quad (16)$$

$$m(n) \leq m(n-2)n + 2^{n-1} + 2^{n-2}, \quad \text{если } n - \text{четное}, \quad (17)$$

$$m(n) \leq (2n-1)(m(n-2) + 1).$$

Из теоремы 9 следует, что $m(4) \leq 24$, $m(5) \leq 51$, $m(7) \leq 421$. В 1975 г. Б. Тофт (см. [36], а также [37]) получил наилучшую из известных верхних оценок величины $m(4)$. Он доказал, что для четных n выполняется неравенство

$$m(n) \leq m(n-2)n + 2^{n-1} + \frac{1}{2} \binom{n}{n/2}, \quad (18)$$

из которого следует, что $m(4) \leq 23$. Отметим, что данная оценка была независимо получена П. Сеймуром в работе [38]. Большинство верхних оценок, получающихся с помощью неравенств (15)–(18), до сих пор не улучшены. Неравенства (16) и (18) мы докажем в п. 6.2.

Что известно про нижние оценки для $m(n)$ при малых n ? Наилучшие результаты получаются, как правило, следующим способом. Рассматривается величина $m_v(n)$, равная минимально возможному числу ребер гиперграфа в классе n -однородных гиперграфов с v вершинами и таких, что у каждого из них хроматическое число больше двух и любые две вершины соединены хотя бы одним ребром. Ясно, что

$$m(n) = \min_v m_v(n).$$

В итоге при фиксированном малом n отдельно оцениваются величины $m_v(n)$ при всех возможных значениях v .

Какие известны оценки величины $m_v(n)$? В силу того, что любые две вершины гиперграфа из рассматриваемого класса должны принадлежать некоторому ребру, степень каждой вершины не меньше, чем $\lceil (v-1)/(n-1) \rceil$. Отсюда следует, что

$$m_v(n) \geq \left\lceil \frac{v}{n} \left\lceil \frac{v-1}{n-1} \right\rceil \right\rceil.$$

В работе [39] Эрдеш нашел предел при $n \rightarrow \infty$ величины $m_v(n)$, если $v = (c + o(1))^n$, где c – некоторая положительная константа. Он показал, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (m_v(n))^{1/n} = \begin{cases} 2(c-2)^{(c-2)/2}(c-1)^{1-c}c^{c/2}, & \text{если } c > 2, \\ 4, & \text{если } c = 2, \\ 0, & \text{если } c < 2. \end{cases}$$

При $n = 4$ известно большое число оценок величины $m_v(n)$. Х. Аббот и А. Лью (см. [40]) обосновали неравенства $24 \leq m_9(4) \leq 26$. Дж. Экзо утверждал в [41], что $m_{10}(4) \leq 25$, но доказательство этого факта так и не было опубликовано. Наконец, опираясь на ранее известные результаты для $m_v(4)$, М. Гольдберг и Х. Рассел (см. [42]) доказали, что $m(4) \geq 17$. По-видимому, эта оценка является наилучшей из известных. В своей работе [43] П. Айсли и Дж. Селфридж утверждали, что $m(4) \geq 19$, но доказательство так и не было приведено. В 1995 г. Г. Мэннинг (см. [44]) с помощью компьютерного перебора показал, что $m(4) \geq 20$. Вопрос о том, насколько можно доверять такому результату, остается открытым. Подводя итоги, мы с твердой уверенностью можем лишь утверждать, что $17 \leq m(4) \leq 23$.

3. Обобщения задачи Эрдеша–Хайнала

В настоящем разделе будут представлены различные обобщения классической задачи Эрдеша–Хайнала (в этом контексте вариант задачи, принадлежащий Херцугу и Шёнхайму, мы также будем для краткости “приписывать” Эрдешу и Хайналу). Данные обобщения можно условно разделить на три класса: в первом накладываются дополнительные “геометрические” ограничения (помимо однородности) на класс рассматриваемых гиперграфов; во втором рассматривается другое множество “хороших” (в классической задаче – правильных) раскрасок; третий класс задач совмещает ограничения первых двух. Сначала (в пп. 3.1–3.4) мы рассмотрим обобщения первого типа, а затем (в пп. 3.5 и 3.6) – второго и третьего.

3.1. Простые гиперграфы. Одно из первых обобщений задачи Эрдеша–Хайнала возникло в знаменитой работе Эрдеша и Ловаса [11] в 1973 г. Авторы упомянутой работы предложили рассмотреть вопрос о нахождении минимального числа ребер n -однородного гиперграфа с хроматическим числом больше r на множестве простых гиперграфов. Напомним, что гиперграф называется *простым*, если любые два различных ребра этого гиперграфа имеют не более одной общей вершины. По аналогии с $m(n, r)$ через $m^*(n, r)$ Эрдеш и Ловас обозначили величину

$$m^*(n, r) = \min\{|E(H)| : H - n\text{-однородный простой гиперграф, } \chi(H) > r\}.$$

Ясно, что $m^*(2, r) = m(2, r) = \binom{r+1}{2}$ (см. утверждение 1), поскольку любой граф является простым гиперграфом. Но в случае произвольного n порядок роста у величины $m^*(n, r)$ оказался существенно больше, чем у величины $m(n, r)$. Как и в разделах, посвященных задаче Эрдеша–Хайнала, мы

построим наш рассказ следующим образом: сначала обсудим известные верхние оценки $m^*(n, r)$, а затем – нижние.

Сам по себе вопрос о существовании простого n -однородного гиперграфа с хроматическим числом больше r достаточно нетривиален. Положительный ответ в данной проблеме был получен Эрдешем и Ловасом (см. [11]), которые доказали следующую теорему.

ТЕОРЕМА 10 (П. Эрдеш, Л. Ловас [11]). *Пусть заданы натуральные числа $s \geq 2$, $n \geq 2$, $r \geq 2$. Введем обозначения*

$$v = 4 \cdot 20^{s-1} n^{3s-2} r^{(s-1)(n+1)}, \quad m = 4 \cdot 20^s n^{3s-2} r^{s(n+1)}, \quad d = 20n^2 r^{n+1}.$$

Тогда существует такое натуральное N , что для любого $n > N$ найдется n -однородный гиперграф $H = (V, E)$ с условиями: $|V| = rv$, $|E| \leq m$, степень каждой вершины H не превосходит d , H не содержит циклов длины, меньшей $s + 1$, и каждое подмножество V мощности v содержит хотя бы одно ребро из E .

Напомним, что *циклом* длины s в гиперграфе $H = (V, E)$ называется последовательность $(A_0, v_0, \dots, A_{s-1}, v_{s-1}, A_s)$, где $A_0, \dots, A_{s-1}$ – различные ребра H , ребро A_s совпадает с A_0 , а $v_0, \dots, v_{s-1}$ – различные вершины H , причем $v_i \in A_i \cap A_{i+1}$ для всех $i = 0, \dots, s-1$. *Обхватом* гиперграфа H называется длина $g(H)$ минимального цикла в H . Таким образом, теорема 10 говорит о том, что для любых r и s существует гиперграф H с $\chi(H) \geq r$, $g(H) \geq s$. Более того, максимальная степень вершины в таком гиперграфе не обязана быть слишком большой. Теорема 10 – это далеко идущее обобщение известного утверждения о том, что бывают графы со сколь угодно большими хроматическим числом и обхватом (см. [45]).

Заметим, что в свете введенной терминологии отсутствие в гиперграфе циклов длины 2 влечет простоту этого гиперграфа. Поэтому следствием из теоремы 10 является верхняя оценка величины $m^*(n, r)$. Для ее получения достаточно применить теорему 10 в случае $s = 2$. Тогда теорема гарантирует существование простого n -однородного гиперграфа $H = (V, E)$ с хроматическим числом больше r и условием $|E| \leq m$. Таким образом, мы имеем неравенство

$$m^*(n, r) \leq 1600n^4 r^{2(n+1)}. \quad (19)$$

Ситуация с верхними оценками величины $m^*(n, r)$ устроена несколько лучше, нежели ситуация с аналогичными оценками величины $m(n, r)$: классический результат Эрдеша и Ловаса (19) был уточнен для многих значений параметров n и r .

Одно из первых подобных уточнений было получено в 1995 г. в статье [46] Д. Грейблом, К. Фелпсом и В. Рёдлем, которые доказали, что $m^*(n, r)$ удовлетворяет неравенству

$$m^*(n, r) \leq c \cdot 4^n n^2 r^{2n-2} \ln^2 r \quad (20)$$

для некоторого $c > 0$, для любого n и для бесконечно многих r . Ясно, что (20) становится лучше верхней оценки (19), только если $r^4 = \Omega(n^{-2} \cdot 4^n \ln^2 r)$, т. е. если r экспоненциально велико по сравнению с n . Оценка (20) Грейбла, Фелпса и Рёдля основана на результатах относительно систем Штейнера, о которых мы расскажем подробнее в следующем пункте.

Дальнейшее продвижение в задаче было сделано в 2001 г. в работе [47] А. В. Косточки, Д. Мубаи, В. Рёдля и П. Тетали. Они обосновали, что для всех $n \geq 3$ и $r \geq 2$ выполнено неравенство

$$m^*(n, r) \leq \frac{8n^{11}}{n-1} r^{2n-2} \ln^2(er). \quad (21)$$

Асимптотическое превосходство оценки (21) над предыдущей оценкой (20) очевидно. Улучшение же оценки (19) происходит при $r^4 > 0.01n^6 \ln^2(er)$, т. е. уже при

$$r = \Omega(n^{3/2} \ln^{1/2} n),$$

а не только при экспоненциальных по n значениях r , как это было у Грейбла и его соавторов.

Совсем недавно результат (21) был усилен Т. Боманом, А. Фризом и Д. Мубаи. В своей работе [48] 2010 г. они доказали, что для любого $n \geq 2$ и любого r , большего некоторого $r_0(n)$, выполнено

$$m^*(n, r) \leq 10\,000n^2(n-1)^4 r^{2n-2} \ln^2 r. \quad (22)$$

К сожалению, величина r_0 из неравенства (22) слабо поддается конкретизации. Поэтому в дальнейшем при сопоставлении различных оценок мы пренебрегаем ограничением $r \geq r_0$.

Отметим прежде всего, что оценка (22) в любом случае улучшает (19), если $r^4 > 6.25(n-1)^4 n^{-2} \ln^2 r$, т. е. уже при $r = \Omega(\sqrt{n \ln n})$. Улучшение же оценки (21) происходит, когда выполняется условие

$$\frac{n^9}{(n-1)^5} \geq 1250 \frac{\ln^2 r}{\ln^2(er)},$$

которое верно, например, при всех $n \geq 5$ и $r \geq 2$.

Последняя из известных верхних оценок была получена в 2010 г. Косточкой и Рёдлем в работе [49]. Они доказали, что для любого $r \geq 2$ существует такое $n_0 = n_0(r)$, что для всех $n > n_0$

$$m^*(n, r) \leq 16e^{2r} (n \ln r)^2 r^{2n}. \quad (23)$$

Данная оценка асимптотически улучшает классический результат Эрдеша и Ловаса (19) при фиксированных значениях параметра r (например, при $r = 2$). В самом деле, правая часть (19) тогда имеет вид $\text{const} \cdot n^4 r^{2n}$, а правая часть (23) превращается в $\text{const} \cdot n^2 r^{2n}$. В общем случае (23) улучшает (19), если

$$e^{2r} \ln^2 r < 100n^2 r^2, \quad (24)$$

т. е. если $r \leq \ln n + O(\ln \ln n)$. По-видимому, для данной области изменения параметров неравенство (23) верно. Несмотря на то что авторы оценки (23) никак не уточняют величину $n_0(r)$, из их доказательства следует, что $n_0(r)$ может быть не слишком большой. В связи с этим мы можем утверждать с большой долей уверенности, что неравенство (23) выполнено в области (24).

Отметим, что, как и неравенство (19), неравенства (21), (22) и (23) являются следствиями из более общих теорем, которые будут обсуждаться нами в п. 3.2.

Подведем итоги сравнения верхних оценок величины $m^*(n, r)$.

1. Если $e^{2r} \ln^2 r < 100n^2 r^2$ (т. е. $r = O(\ln n)$), то наилучшей является оценка Косточки и Рёдья (23).
2. Если $e^{2r} \ln^2 r \geq 100n^2 r^2$ и $r^4 \leq 6.25(n-1)^4 n^{-2} \ln^2 r$ (т. е. $r \in (\Omega(\ln n), O(\sqrt{n \ln n}))$), то наилучшей является оценка Эрдеша и Ловаса (19).
3. Если $r^4 > 6.25(n-1)^4 n^{-2} \ln^2 r$ (т. е. $r = \Omega(\sqrt{n \ln n})$) и $n \geq 5$, то наилучшей является оценка Бомана, Фриза и Мубаи (22).
4. Если $r^4 > 6.25(n-1)^4 n^{-2} \ln^2 r$, $n = 3, 4$, и $\ln r < (\sqrt{1250(n-1)^5/n^9} - 1)^{-1}$, то наилучшей также является оценка Бомана, Фриза и Мубаи (22). По существу, речь идет о случаях $n = 3$, $3 \leq r \leq 10$ и $n = 4$, $3 \leq r \leq 480\,630$. Подчеркнем, что выводы этого пункта наиболее уязвимы, коль скоро мы конкретизируем функцию r_0 из (22). Заведомо правильное писать: $n = 3$, $r_0(3) \leq r \leq 10$; $n = 4$, $r_0(4) \leq r \leq 480\,630$. Судя по всему, интервалы для r все-таки не пусты.
5. Если же $n = 3, 4$ и $\ln r > (\sqrt{1250(n-1)^5/n^9} - 1)^{-1}$, то наилучшей является оценка Косточки, Мубаи, Рёдья и Тетали (21). Здесь находятся случаи $n = 3$, $r > 10$ и $n = 4$, $r > 480\,630$.

Перейдем к обсуждению нижних оценок величины $m^*(n, r)$. Первая асимптотическая нижняя оценка $m^*(n, r)$ была получена Эрдешем и Ловасом все в той же работе [11] в 1973 г. Они обосновали неравенство

$$m^*(n, r) \geq \frac{r^{2n-4}}{16n(n-1)^2}. \quad (25)$$

Доказательство оценки (25) существенно опирается на следующую теорему, дающую достаточное условие r -раскрашиваемости n -однородного гиперграфа в терминах ограничений на максимальную степень ребра.

ТЕОРЕМА 11 (П. Эрдеш, Л. Ловас [11]). Пусть H — n -однородный гиперграф, $\chi(H) > r$. Тогда H содержит ребро, пересекающее не менее $0.25r^{n-1}$ других ребер H .

Доказательство теоремы 11 основано на применении знаменитого утверждения из теории вероятностей, носящего имя “Локальной леммы”. Эта лемма позволяет получить нижнюю оценку вероятности одновременного невыполнения событий из некоторого набора, если между событиями в этом наборе мало “зависимостей”. Локальная лемма впервые была доказана в работе Эрдеша и Ловаса [11], различные ее обобщения можно найти, например, в книге [9]. В разделе 6 нами будет показано, как именно оценка (25) выводится из теоремы 11 (см. п. 6.1).

Из неравенств (19) и (25) следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (m^*(n, r))^{1/n} = r^2$, коль скоро r — константа или не слишком быстро растущая функция от n . В свою очередь, неравенства (6) в тех же предположениях влекут соотношение $\lim_{n \rightarrow \infty} (m(n, r))^{1/n} = r$. Таким образом, величина $m^*(n, r)$ растет примерно как квадрат величины $m(n, r)$ при фиксированном r и растущем n .

Нижняя оценка из (25) может быть улучшена в $n/2$ раз с помощью некоторых простых рассуждений (подробнее см. [18]). В итоге оценка принимает вид

$$m^*(n, r) \geq \frac{r^{2(n-2)}}{32(n-1)^2}. \quad (26)$$

Оценка (26) неоднократно и существенно уточнялась. Так, в 1991 г. улучшение получил З. Сабо в работе [50] для случая $r = 2$. Он доказал следующее утверждение, усиливающее теорему 11 для простых гиперграфов.

ТЕОРЕМА 12 (З. Сабо [50]). *Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $n_0(\varepsilon)$, что при $n > n_0(\varepsilon)$ произвольный n -однородный простой гиперграф с хроматическим числом, равным 3, обладает вершиной, степень которой не меньше, чем $n^{-\varepsilon} \cdot 2^n$.*

С помощью данного утверждения и техники Эрдеша и Ловаса из [11] можно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $n_0(\varepsilon)$, что для всех $n > n_0(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$m^*(n, 2) \geq 2^{2n-5} n^{-\varepsilon}. \quad (27)$$

Альтернативное доказательство результата (27), основанное на применении метода случайной раскраски, было предложено Радхакришнаном и Сринивасаном в работе [15].

В работе Косточки, Мубаи, Рёдля и Тетали [47] 2001 г. не только была получена верхняя оценка (21), но и были найдены асимптотические нижние оценки, существенно прояснившие порядок роста величины $m^*(n, r)$ при фиксированном n и растущем r . Во-первых, для четных значений r и произвольного $n > 2$ авторы статьи [47] обосновали неравенство

$$m^*(n, r) \geq \frac{n-1}{2^{2n-2} n^3 e^2} r^{2n-2}. \quad (28)$$

Во-вторых, для произвольного (не обязательно четного) значения r Косточка с соавторами доказали (см. [47]) следующую теорему.

ТЕОРЕМА 13 (А. В. Косточка, Д. Мубай, В. Рёдль, П. Тетали [47]). *Существуют такие положительные функции $c = c(n)$ и $r_0 = r_0(n)$, $n \geq 2$, что для всех $r > r_0$ выполняется неравенство*

$$m^*(n, r) \geq c r^{2n-2} \ln^2 r. \quad (29)$$

В оценке (29) остается невыясненным порядок роста функции $c = c(n)$, однако из доказательства теоремы 13 видно, что $c(n)$ убывает экспоненциально по n . Также ввиду неравенства (28) понятно, что $c(n) < 2^{-2n}$. Ничего более конкретного сказать о величине $c(n)$ не представляется возможным.

Вместе с результатом (21) соотношение (29) показывает, что при фиксированном n и растущем r величина $m^*(n, r)$ имеет порядок роста $r^{2n-2} \ln^2 r$ (в то время как величина $m(n, r)$ в задаче Эрдеша–Хайнала имела порядок роста r^n). Отметим, что, как и (21), оценки (28) и (29) являются частными случаями более общих результатов, которые будут обсуждаться нами в следующем пункте.

Поймем, как соотносятся неравенства (28) и (29) с более ранней оценкой (26). Несложно проверить, что (28) становится лучше (26), если

$$r^2 > \left(\frac{n}{n-1} \right)^3 \cdot 2^{2n-7} e^2 \geq \frac{e^2}{16} 4^n,$$

т. е. r должно быть экспоненциально велико по сравнению с n . То же самое верно и для оценки (29), потому что константа $c = c(n)$ в теореме 13 экспоненциально убывает с ростом n .

В 2009 г. оценка Сабо (27) была обобщена А. В. Косточкой и М. Кумбхатом (см. [51]) на случай произвольного числа цветов r . Они показали, что при любых фиксированных $r \geq 2$ и $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное $n_0 = n_0(r, \varepsilon)$, что для любого $n > n_0$ выполнено

$$m^*(n, r) > r^{2n} n^{-\varepsilon}. \quad (30)$$

Доказательство оценки (30) опирается на технику, предложенную Сабо в работе [50] для раскраски простых гиперграфов.

Стоит отметить, что все нижние оценки, которые были получены после классической работы Эрдеша и Ловаса (а именно (27), (28), (29) и (30)), улучшали нижнюю оценку (26) либо при малых по сравнению с n значениях r (неравенства (27) и (30) выполнены при фиксированном r и больших n), либо при очень больших r (неравенства (28) и (29) улучшают (26), коль скоро r экспоненциально растет как функция от n). А в “средней” области значений r никаких улучшений не было. Данный недостаток был устранен А. П. Розовской и Д. А. Шабановым в работе [52]. В 2009 г. им удалось доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 14 (А. П. Розовская, Д. А. Шабанов [52]). *Для любых $n \geq 3$, $r \geq 2$ выполняется неравенство*

$$m^*(n, r) \geq \frac{(\sqrt{6} - 2)^2}{32} \frac{r^{2n-4}}{n \ln n}. \quad (31)$$

Легко видеть, что оценка (31) асимптотически лучше (26) при всех $r \geq 2$. Доказательство (31) основано на применении случайной r -цветной раскраски, предложенной в [23].

Вероятностный подход, предложенный Радхакришнаном и Сринивасаном в работе [15] для раскрашивания простых гиперграфов, был обобщен Д. А. Шабановым на случай произвольных значений r , что позволило получить дальнейшее улучшение нижней оценки величины $m^*(n, r)$. В 2010 г. в работе [53] Шабановым была доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 15 (Д. А. Шабанов [53]). *Существует такое натуральное число n_0 , что для всех $n > n_0$ и всех $r \geq 2$, удовлетворяющих соотношению*

$$r \leq n^{1/9}, \quad (32)$$

выполнено неравенство

$$m^*(n+1, r) \geq \frac{1}{2} r^{2n-2} n^{-6/t}, \quad (33)$$

где

$$t = t(n+1, r) = \left\lfloor \sqrt{\min\left(\frac{\ln n}{\ln r}, \frac{\ln n}{2 \ln((4/3) \ln n)}\right)} \right\rfloor.$$

Сформулируем следствие данной теоремы, проясняющее порядок роста правой части оценки (33) при различных значениях r .

СЛЕДСТВИЕ 1. *Имеют место две ситуации.*

1) *Существует такое натуральное число n_0 , что для всех $n \geq n_0$ и для всех r , удовлетворяющих неравенству*

$$r \leq \frac{16}{9} \ln^2(n-1), \quad (34)$$

выполнено

$$m^*(n, r) \geq \frac{1}{2} r^{2n-4} (n-1)^{-6} \left\lfloor \sqrt{\frac{\ln(n-1)}{2 \ln((4/3) \ln(n-1))}} \right\rfloor^{-1}. \quad (35)$$

2) *Существует такое натуральное число n_0 , что для всех $n \geq n_0$ и для всех r , удовлетворяющих соотношениям*

$$\frac{16}{9} \ln^2(n-1) \leq r \leq (n-1)^{1/9}, \quad (36)$$

выполнено

$$m^*(n, r) \geq \frac{1}{2} r^{2n-4} (n-1)^{-6} \left\lfloor \sqrt{\frac{\ln(n-1)}{\ln r}} \right\rfloor^{-1}. \quad (37)$$

Сравним оценки (35) и (37) следствия 1 с предыдущими результатами, т. е. с неравенствами (26)–(31). Сразу же ясно, что, поскольку в областях (34) и (36), к которым в рамках оценок (35) и (37) относится величина r , оценки (28) и (29) заведомо слабее оценок (26), (27), (30), (31), достаточно проводить сравнение новых результатов лишь с последними четырьмя. При этом неравенство (26) всегда слабее неравенства (31), так что остаются лишь (27), (30), (31) против (35), (37). Рассмотрим сперва (35).

Из результата (27) вытекает, что $m^*(n, 2) \geq 2^n n^{-\varepsilon(n)}$, где $\varepsilon(n) = o(1)$, но порядок малости не уточняется. Из выкладок, приведенных в доказательстве оценки (27) (см. [50]), следует, что $\varepsilon(n) = \Omega((\ln n)^{-1/4})$. Оценка (35) при $r = 2$ тоже имеет вид $m^*(n, 2) \geq 2^n n^{-\varepsilon(n)}$, но здесь

$$\varepsilon(n) = O\left(\sqrt{\frac{\ln \ln n}{\ln n}}\right) = o\left(\frac{1}{(\ln n)^{1/4}}\right).$$

Следовательно, оценка (35) асимптотически лучше (27).

Теперь сравним (35) и (30). Прежде всего заметим, что (30) применима только при постоянных r , тогда как (35) работает и при не слишком быстро растущих $r = r(n)$. Пусть, однако, (30) применима, т. е. r – константа. Тогда обе оценки – и (30), и (35) – имеют величину $r^{2n} n^{-\varepsilon(n)}$ с подходящим $\varepsilon = o(1)$. В случае неравенства (30) его авторы в заключительном комментарии в статье [51] написали, что можно было бы положить

$$\varepsilon(n) = \frac{\ln \ln \ln n}{\ln \ln n}.$$

Однако строгого доказательства они не привели. Что же до неравенства (35), то тут мы знаем, что

$$\varepsilon(n) = \Theta\left(\sqrt{\frac{\ln \ln n}{\ln n}}\right) = o\left(\frac{\ln \ln \ln n}{\ln \ln n}\right).$$

Таким образом, (35) всегда асимптотически сильнее (30).

Наконец, оценка (31) также, очевидно, слабее в асимптотике, нежели (35).

Теперь перейдем к рассмотрению оценки (37). Ее уже нужно сравнивать только с неравенством (31), ведь в силу ограничения (36) величина r константой не является.

Итак, если r удовлетворяет неравенству

$$\left\lfloor \sqrt{\frac{\ln(n-1)}{\ln r}} \right\rfloor \geq 6 \quad (\text{т. е. } r \leq (n-1)^{1/36}),$$

то правая часть оценки (37) не меньше, чем $\frac{1}{2} r^{2n-4} (n-1)^{-1}$, что асимптотически лучше, нежели (31). Но если

$$\left\lfloor \sqrt{\frac{\ln(n-1)}{\ln r}} \right\rfloor \leq 5 \quad (\text{т. е. } r > (n-1)^{1/36}),$$

то правая часть оценки (37) не превосходит выражения $\frac{1}{2} r^{2n-4} (n-1)^{-6/5}$, что, конечно, асимптотически хуже оценки (31).

Завершают обзор нижних оценок величины $m^*(n, r)$ еще две теоремы, доказанные Шабановым в работе [26].

ТЕОРЕМА 16 (Д. А. Шабанов [26]). *Для всех $n \geq 3$, $r \geq 3$ выполняется неравенство*

$$m^*(n, r) \geq \frac{1}{392} r^{2n-4} n^{-1}. \quad (38)$$

ТЕОРЕМА 17 (Д. А. Шабанов [26]). *Пусть $n \geq 3$, а r – четное, $r \geq 4$. Тогда выполняется неравенство*

$$m^*(n, r) \geq \frac{n-1}{2^{2n-2} n^2 \cdot 196} r^{2n-2}. \quad (39)$$

Оценка (38) при всех $n \geq 12$ и $r \geq 3$ строго лучше оценки (31). Аналогично, оценка (39) при всех $n \geq 27$ и четных $r \geq 4$ сильнее оценки (28).

Доказательства теорем 16 и 17 существенно опираются на следующую теорему о достаточном условии r -раскрашиваемости n -однородного гиперграфа, которая улучшает классическую теорему 11 Эрдеша и Ловаса.

ТЕОРЕМА 18. *Пусть $n \geq 3$, $r \geq 3$. Пусть, далее, H – n -однородный гиперграф, $\chi(H) > r$. Тогда H содержит ребро, пересекающее не менее $n^{1/2} r^{n-1} / 14$ других ребер H .*

Если

$$\frac{16}{9} \ln^2(n-1) \leq r \leq (n-1)^{1/36},$$

то, как мы помним, оценка (37) имеет, по сути, величину $r^{2n-4} (n-1)^{-1} / 2$. Понятно, что в указанных условиях оценка (37) сильнее неравенства (38), т. е. в этой ситуации (37) асимптотически самая точная. При меньших значениях r точнее всех по-прежнему оценка (35). Таким образом, в асимптотике оценка (33) остается наилучшей, коль скоро $r \leq (n-1)^{1/36}$. При $r > (n-1)^{1/36}$ и достаточно большом n сравнивать нужно только (38) и (39), ведь в этой

области оценка (31) превосходит оценку (37), но (31), как мы уже заметили, слабее (38) при $n \geq 12$. Ясно, что (39) уточняет (38) лишь при

$$r^2 > \frac{1}{2} 2^{2n-2} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-1}.$$

В заключение пункта подведем итоги сравнения приведенных нижних оценок в задаче Эрдеша–Ловаса о простых гиперграфах.

1. Если $r \leq (n-1)^{1/36}$, то асимптотически наилучшей является оценка Шабанова (33).
2. Если $(n-1)^{1/36} < r \leq \frac{1}{\sqrt{2}} 2^{n-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-1/2}$, то асимптотически наилучшей является оценка Шабанова (38).
3. Если $r > \frac{1}{\sqrt{2}} 2^{n-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-1/2}$ и n растет, то асимптотически наилучшей является оценка Шабанова (39).
4. При фиксированном n и сильно растущем r асимптотически наилучшей является оценка (29) Косточки, Мубай, Рёдья и Тетали.
5. При $n < 12$ и некоторых r наилучшей является оценка Розовской и Шабанова (31).

3.2. Системы Штейнера и (n, l) -системы. В данном пункте мы рассмотрим задачи типа Эрдеша–Хайнала для гиперграфов с верхним ограничением на мощности попарных пересечений ребер. Естественным обобщением понятия простого гиперграфа является понятие l -простого гиперграфа. Будем говорить, что гиперграф является l -простым, если любые два различных ребра этого гиперграфа имеют не более l общих вершин. Ясно, что 1-простой гиперграф – это в точности простой гиперграф.

Свойство простоты гиперграфа, которое рассматривалось в предыдущем пункте, можно переформулировать следующим образом: *гиперграф является простым, если любые две вершины этого гиперграфа содержатся (как подмножество) не более чем в одном ребре*. Подобное свойство гиперграфов может быть обобщено естественным образом для l -подмножеств множества вершин гиперграфа. Назовем (n, l) -системой n -однородный гиперграф, каждые l вершин которого содержатся (как подмножество) не более чем в одном ребре гиперграфа. Из этого определения следует, что l -простой n -однородный гиперграф – это в точности $(n, l+1)$ -система.

Частным случаем (n, l) -систем являются так называемые системы Штейнера.

Системой Штейнера $S(l, n, m)$ называется n -однородный гиперграф на m вершинах, любые l вершин которого содержатся (как подмножество) ровно в одном ребре. Таким образом, система Штейнера $S(l, n, m)$ является (n, l) -системой и, в частном случае $l = 2$, простым гиперграфом. Впервые понятие системы Штейнера появилось еще в 1853 г. в работе самого Дж. Штейнера [54]. Совокупности подмножеств, образующие системы Штейнера, часто возникают в различных задачах теории кодирования. Подробнее об этом можно прочитать в обзоре [55] и книге [56]. Нас же в первую очередь интересуют приложения

результатов относительно систем Штейнера к экстремальным задачам о раскрасках гиперграфов.

В работах В. Рёдля с различными соавторами [57], [58] и [46] были построены примеры систем Штейнера с малым числом независимости. Напомним, что *числом независимости* гиперграфа $H = (V, E)$ называется мощность наибольшего подмножества множества вершин V , не содержащего ни одного ребра из E . Мы будем обозначать число независимости гиперграфа H через $\alpha(H)$. Хорошо известно, что для любого гиперграфа $H = (V, E)$ выполнено следующее соотношение между хроматическим числом, числом вершин и числом независимости:

$$\chi(H) \geq \frac{|V|}{\alpha(H)}.$$

Из данного неравенства следует, что в работах [57], [58] и [46] фактически было доказано существование систем Штейнера с определенными ограничениями на число ребер и хроматическое число, и это, в частности, позволило Грейблу, Фелпсу и Рёдлю получить верхнюю оценку (20) для величины $m^*(n, r)$.

В работе А. В. Косточки, Д. Мубай, В. Рёдля и П. Тетали [47] 2001 г. была поставлена задача об отыскании величины $m^*(n, r, l)$, равной *минимально возможному числу ребер в (n, l) -системе с хроматическим числом, большим r* . Ясно, что в частном случае $l = 2$ данная задача совпадает с задачей Эрдеша–Ловаса о простых гиперграфах, а при $l = n$ она превращается в классическую задачу Эрдеша–Хайнала, ведь формально (n, n) -система – это n -однородный гиперграф без кратных ребер. Таким образом,

$$m^*(n, r, 2) = m^*(n, r), \quad m^*(n, r, n) = m(n, r).$$

Кроме того, поскольку простой гиперграф является (n, l) -системой при всех $l \geq 2$, имеют место неравенства

$$m(n, r) \leq m^*(n, r, l) \leq m^*(n, r). \quad (40)$$

Стало быть, для $m^*(n, r, l)$ верны все нижние оценки величины $m(n, r)$ и все верхние оценки величины $m^*(n, r)$. Перечислим нетривиальные результаты для $m^*(n, r, l)$, которые по существу используют свойства (n, l) -системы. Сначала обсудим верхние оценки.

В 2001 г. А. В. Косточка с соавторами получили (см. [47]) следующую верхнюю оценку величины $m^*(n, r, l)$.

ТЕОРЕМА 19 (А. В. Косточка, Д. Мубай, В. Рёдль, П. Тетали [47]). *Для любых $n \geq 3$, $l \geq 2$, $r \geq 2$ выполняется неравенство*

$$m^*(n, r, l) \leq 2 \frac{(2n^{3l})^{l/(l-1)}}{(n)_l} (r^{n-1} \ln(er))^{l/(l-1)}. \quad (41)$$

В формуле (41) через $(n)_l$ обозначено число размещений без повторения: $(n)_l = n(n-1) \cdots (n-l+1)$. Если в теореме 19 положить $l = 2$, то получится оценка

$$m^*(n, r) = m^*(n, r, 2) \leq 2 \frac{(2n^6)^2}{n(n-1)} (r^{n-1} \ln(er))^2 = \frac{8n^{11}}{n-1} r^{2n-2} \ln^2(er),$$

которая представляет собой оценку (21). Если же, напротив, взять $l = n$, то мы получим

$$m(n, r) = m^*(n, r, n) \leq 2 \frac{(2n^{3n})^{n/(n-1)}}{n!} (r^{n-1} \ln(er))^{n/(n-1)}.$$

Последняя величина заведомо больше, чем $n^{2n} r^n \ln r$, и это значит, что неравенство (41) нет смысла использовать в качестве оценки величины $m(n, r)$ (ср. (5)–(8)). С одной стороны, последнее обстоятельство свидетельствует о том, что возможны дальнейшие усиления оценки из теоремы 19. С другой стороны, мы помним, что оценка (21), которая является следствием из неравенства (41), не была исторически первой оценкой для $m^*(n, r)$. До нее еще была оценка (19) Эрдеша–Ловаса, которую она уточняла. Как ни странно, здесь аналог теоремы Эрдеша–Ловаса возник позже, и на сей раз именно он в определенном смысле улучшает результат Косточки и др.

Собственно, в 2009 г. сам Косточка вернулся к задаче, и в его совместной с М. Кумбхатом работе [51] была доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 20 (А. В. Косточка, М. Кумбхат [51]). *Для любых $r \geq 2$ и $l \geq 2$ существует такое число $n_0 = n_0(r, l)$, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство*

$$m^*(n, r, l) \leq 10r^2(2r^n n^2)^{l/(l-1)}. \quad (42)$$

При $l = 2$ неравенство (42) принимает вид

$$m^*(n, r) \leq 40n^4 r^{2n+2}.$$

Любопытно, что такая оценка даже лучше оценки (19). Правда, всего в 40 раз, причем, в отличие от Эрдеша и Ловаса, у которых величина n была любой, Косточка и Кумбхат вынуждены полагать $n > n_0$. Ввиду указанных обстоятельств, новый результат мало отличается от старого, и именно поэтому мы не стали цитировать его в предыдущем пункте.

При $l = n$ теорема, очевидно, неприменима.

Еще два результата были получены в 2010 г. Первый из них принадлежит Косточке и Рёдлю (см. [49]).

ТЕОРЕМА 21 (А. В. Косточка, В. Рёдль [49]). *Для любых $r \geq 2$ и $l \geq 2$ существует такое число $n_1 = n_1(r, l)$, что для всех $n > n_1$ выполняется неравенство*

$$m^*(n, r, l) \leq (4e^r)^l (nr^n \ln r)^{l/(l-1)}. \quad (43)$$

При $l = 2$ эта теорема влечет оценку (23), при $l = n$ она тоже неприменима.

Второй результат 2010 г. получили Т. Боман, А. Фриз и Д. Мубай в работе [48].

ТЕОРЕМА 22 (Т. Боман, А. Фриз, Д. Мубай [48]). *Существует такая функция $r_0 = r_0(n, l)$, что для всех $n > l \geq 2$ и $r > r_0$ выполняется неравенство*

$$m^*(n, r, l) \leq 2 \left(\frac{100(n)_l^2}{l!} \right)^{1/(l-1)} \left(\frac{10(n-1)}{l-1} \right)^{l/(l-1)} (r^{n-1} \ln r)^{l/(l-1)}. \quad (44)$$

При $l = 2$ имеем оценку

$$m^*(n, r) \leq 2 \frac{100n^2(n-1)^2}{2} (100(n-1)^2)r^{2n-2} \ln^2 r = 10\,000 n^2(n-1)^4 r^{2n-2} \ln^2 r,$$

т. е. оценку (22). Случай $l = n$ из условий теоремы снова выпадает.

Перейдем к сравнению верхних оценок величины $m^*(n, r, l)$. Оценка (43) улучшает результат (41), а также оценку (42) при фиксированных l и r и растущем n . Несложно понять, что в этих условиях на параметры правая часть (43) есть

$$O(r^{nl/(l-1)} n^{l/(l-1)}),$$

в то время как правая часть оценки (41) имеет вид

$$\Omega(r^{nl/(l-1)} n^{(2l^2+l)/(l-1)}),$$

а правая часть (42) – вид

$$\Omega(r^{nl/(l-1)} n^{2l/(l-1)}).$$

В свою очередь, оценка (44) улучшает оценку (41), если

$$\left(\frac{100(n)_l^2}{l!}\right)^{1/(l-1)} \left(\frac{10(n-1)}{l-1}\right)^{l/(l-1)} < \frac{(2n^{3l})^{l/(l-1)}}{(n)_l}.$$

Несложно проверить, что данное неравенство выполняется для всех $l \geq 3$, $n \geq 3$:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{100(n)_l^2}{l!}\right)^{1/(l-1)} \left(\frac{10(n-1)}{l-1}\right)^{l/(l-1)} < \left(\frac{100n^{2l}}{6}\right)^{1/(l-1)} \left(\frac{10n}{2}\right)^{l/(l-1)} \\ & \leq \left(\frac{50}{3}\right)^{1/2} 5^{3/2} n^3 < 50n^3 < n^{21/2} \leq (n^7)^{l/(l-1)} \leq (n^{2l+1})^{l/(l-1)} \\ & = \frac{(n^{3l})^{l/(l-1)}}{n^l} < \frac{(2n^{3l})^{l/(l-1)}}{(n)_l}. \end{aligned}$$

Таким образом, оценка (44) всегда лучше (41), если выполнены условия теоремы 22.

К сожалению, величины $n_0(r, l)$, $n_1(r, l)$ и $r_0(n, l)$ из условий теорем 20, 21 и 22 трудно поддаются явному вычислению. Поэтому, подводя итоги сравнения верхних оценок величины $m^*(n, r, l)$, мы отметим лишь следующее.

1. При фиксированных $l \geq 3$, $r \geq 2$ и растущем n наилучшей асимптотической верхней оценкой является оценка Косточки и Рёдля (43).
2. При фиксированных $n > l \geq 3$ и растущем r наилучшей асимптотической верхней оценкой является оценка Бомана, Фриза и Мубаи (44).
3. В остальных случаях наилучшей верхней оценкой служит результат Косточки, Мубаи, Рёдля и Тетали (41).

Случай $l = 2$ был подробно рассмотрен в п. 3.1.

Нетривиальные нижние оценки $m^*(n, r, l)$ на сегодняшний день найдены лишь в достаточно узких областях значений параметров. Первые из них были получены в 2001 г. Косточкой, Мубаи, Рёдлем и Тетали в работе [47]. Для четных значений r и произвольных $n > l \geq 2$ они обосновали следующую нижнюю оценку величины $m^*(n, r, l)$.

ТЕОРЕМА 23 (А. В. Косточка, Д. Мубай, В. Рёдль, П. Тетали [47]). Для любых $n > l \geq 2$ и четных $r \geq 4$ выполняется неравенство

$$m^*(n, r, l) \geq \left(\frac{(n-1)_{l-1}}{en} \right)^{1/(l-1)} e^{-1} n^{-2} \left(\frac{r}{2} \right)^{(n-1)l/(l-1)}. \quad (45)$$

Для произвольного (не обязательно четного) значения r те же авторы доказали следующую теорему.

ТЕОРЕМА 24 (А. В. Косточка, Д. Мубай, В. Рёдль, П. Тетали [47]). Существуют такие функции $c = c(n, l)$ и $r_0 = r_0(n, l)$, что для всех $n > l \geq 2$ и $r > r_0$ выполняется неравенство

$$m^*(n, r, l) \geq c(r^{n-1} \ln r)^{l/(l-1)}. \quad (46)$$

Заметим сперва, что при $l = 2$ неравенства (45) и (46) превращаются в оценки (28), (29). Заметим, далее, что при $l = n$ теоремы 23, 24 неприменимы, а потому получить из них новые нижние оценки для $m(n, r)$ нельзя. Заметим, наконец, что с учетом результата (41) из теоремы 24 следует, что при фиксированных n и l величина $m^*(n, r, l)$ имеет порядок роста $(r^{n-1} \ln r)^{l/(l-1)}$ при $r \rightarrow \infty$.

Исследования нижних оценок величины $m^*(n, r, l)$ были продолжены в работе [51] 2009 г. Косточкой и Кумбхатом. Они доказали следующую теорему.

ТЕОРЕМА 25 (А. В. Косточка, М. Кумбхат [51]). Для любых $r \geq 2$, $l \geq 2$ и $\varepsilon > 0$ существует такое число $n_0 = n_0(r, l, \varepsilon)$, что для всех $n > n_0$ выполнено неравенство

$$m^*(n, r, l) \geq r^{nl/(l-1)} n^{-\varepsilon}. \quad (47)$$

Опять-таки, при $l = n$ теорема не работает, а при $l = 2$ она дает неравенство (30). Как мы уже отмечали в п. 3.1, доказательство оценки (47) опирается на идеи Сабо из работы [50], в которой доказана теорема 12 и оценка (27).

В заключительном комментарии в статье [51] Косточка и Кумбхат отметили, что условие теоремы 25 можно ослабить: рассматривать параметры r и l как медленно растущие функции от n , а ε – как медленно убывающую функцию от n . В частности, они утверждали, что $\varepsilon = \varepsilon(n)$ можно взять равным $\ln \ln \ln n / \ln \ln n$, но никаких выкладок, обосновывающих данное утверждение, проведено не было (ср. п. 3.1).

Последний на сегодняшний день результат получен в работе [26] Д. А. Шабанова.

ТЕОРЕМА 26 (Д. А. Шабанов [26]). Для любых $n > l \geq 2$ и четных $r \geq 6$ выполняется неравенство

$$m^*(n, r, l) \geq \left(\frac{(n-1)_{l-1}}{14\sqrt{n}} \right)^{1/(l-1)} \frac{1}{14} n^{-3/2} \left(\frac{r}{2} \right)^{(n-1)l/(l-1)}. \quad (48)$$

Во-первых, при $l = 2$ имеем неравенство (39). Во-вторых, сразу видно, что теорема 26 является прямым аналогом теоремы 23. Однако новый результат сильнее старого в большинстве ситуаций. В самом деле, отношение правых частей неравенств (48) и (45) равно $(\sqrt{n}e/14)^{l/(l-1)}$, и это больше единицы при

$n \geq 27$. Таким образом, (48) улучшает (45) для всех $n \geq 27$, $2 \leq l < n$ и четных $r \geq 6$.

Подчеркнем, что доказательство оценки (45) существенным образом опиралось на классическое достаточное условие r -раскрашиваемости однородных гиперграфов, а именно, на теорему 11 Эрдеша и Ловаса (см. [11]). В то же время при доказательстве теоремы 18 (см. [26]) было получено улучшение теоремы 11, в связи с чем и удалось улучшить результат (45).

Поймем теперь, в чем нетривиальность оценок (46), (47) и (48) по сравнению с известными нижними оценками величины $m(n, r)$, так как в силу (40) нижние оценки $m(n, r)$ являются и нижними оценками для $m^*(n, r, l)$. Все нижние оценки величины $m(n, r)$ не превосходят nr^n (см. (10), (13) и (14)). Ввиду этого факта оценка (46) нетривиальна, коль скоро r достаточно быстро растет с ростом n . Более того, подобного результата просто нет для $m(n, r)$. Далее, если выполнено неравенство

$$r^{n-l} \geq 2^{(n-1)l} (n^{5/2} \cdot 14)^{l-1} \frac{14\sqrt{n}}{(n-1)_{l-1}}, \quad (49)$$

то правая часть оценки (48) больше, чем nr^n , т. е. больше правой части любой из оценок (10), (13) и (14). В свою очередь, неравенство (49) выполнено, например, начиная с некоторого n , если l фиксировано, а $r > 2^l$. Наконец, при любом фиксированном $l \geq 2$ правая часть оценки (47) как минимум в экспоненциальное по n число раз больше величины nr^n .

В заключение сравним нижние оценки величины $m^*(n, r, l)$.

1. Если l и r фиксированы, а n стремится к бесконечности, то наилучшей асимптотической нижней оценкой является оценка Косточки и Кумбхата (47).
2. Если выполнено неравенство (49) и не выполнены условия теоремы 25, то наилучшей асимптотической оценкой является оценка Шабанова (48).
3. Если l и n фиксированы, а r стремится к бесконечности, то наилучшей асимптотической нижней оценкой является оценка Косточки, Мубай, Рёдла и Тетали (46).

Разумеется, “тривиальные” оценки (т. е. те, которые вытекают из неравенства $m^*(n, r, l) \geq m^*(n, r)$) мы здесь уже не обсуждаем.

3.3. Гиперграфы-клики. В предыдущем пункте рассматривалась задача типа Эрдеша–Хайнала для класса гиперграфов с верхним ограничением на мощности попарных пересечений ребер. В настоящем пункте мы изучим возможные постановки подобной задачи для класса гиперграфов с нижним ограничением на мощности попарных реберных пересечений.

Нас будет интересовать класс гиперграфов, для которых выполняется свойство, “обратное” к свойству простоты: для любых различных ребер e и f выполнено $|e \cap f| \geq 1$. Такие гиперграфы принято называть *кликами*. Таким образом, клика – это гиперграф, у которого любые два ребра пересекаются. Легко показать, что если у клики нет одновершинных ребер, то ее хроматическое число равно либо двум, либо трем. В 1973 г. Эрдеш и Ловас в работе [11] поставили задачу о нахождении величины $m^{**}(n)$, равной минимально возможному числу ребер гиперграфа в классе n -однородных клик с хроматическим числом, равным трем. К сожалению, об асимптотическом поведении данной величины

практически ничего не известно. Ясно, что в силу определения величины $m(n)$ (см. п. 2.1) выполнена нижняя оценка

$$m^{**}(n) \geq m(n).$$

Если рассмотреть полный n -однородный гиперграф на множестве из $2n - 1$ вершин, то, конечно, такой гиперграф будет кликой и его хроматическое число будет равно 3, поэтому

$$m^{**}(n) \leq \binom{2n-1}{n}.$$

Имеется также верхняя оценка величины $m^{**}(n)$, доказанная Эрдешем и Ловасом (см. [11]).

ТЕОРЕМА 27 (П. Эрдеш, Л. Ловас [11]). *Если $n = 3^k$, то*

$$m^{**}(n) \leq (\sqrt{7})^{n-1}.$$

Доказательство теоремы 27 имеет конструктивный характер и основано на “перемножении” непересекающихся 3-однородных гиперграфов – плоскостей Фано (см. определение в п. 2.3). По-видимому, с помощью аналогичных соображений можно получать и другие подобные оценки. Однако авторам обзора такие результаты не попадались.

Вообще, на сегодняшний день остаются открытыми многие вопросы, поставленные Эрдешем и Ловасом в [11]. Верно ли, что $\liminf_n \sqrt[n]{m^{**}(n)} > 2$? Выполнено ли неравенство $m^{**}(n) > m(n)$ хоть для каких-то n (из результатов п. 2.3 следует, что $m(2) = m^{**}(2) = 3$, $m(3) = m^{**}(3) = 7$)?

Любопытно, что если во всех предыдущих задачах вопрос о нахождении максимального числа ребер не имел смысла, то в задаче о кликах с хроматическим числом три он также нетривиален. Обозначим через $M(n)$ *максимально возможное число ребер гиперграфа в классе n -однородных клик без кратных ребер и с хроматическим числом, равным трем*. Задача о нахождении величины $M(n)$ была поставлена опять-таки Эрдешем и Ловасом в работе [11]. В той же статье были доказаны следующие оценки.

ТЕОРЕМА 28 (П. Эрдеш, Л. Ловас [11]). *Для любого $n \geq 2$ выполнены неравенства*

$$n! \left(1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) \leq M(n) \leq n^n. \quad (50)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем нижнюю оценку. Мы построим индуктивно некоторую последовательность клик $H_n = (V_n, E_n)$ с хроматическим числом 3.

Пусть $H_2 = (V_2, E_2)$ – полный граф K_3 на трех вершинах. Его хроматическое число равно трем, и ребер у него $3 = 2!(1 + 1/2!)$. База индукции есть.

Пусть теперь построен гиперграф $H_n = (V_n, E_n)$ – n -однородная клика с хроматическим числом 3, а множество T мощности $n + 1$ не пересекается с V_n . Тогда H_{n+1} положим равным (V_{n+1}, E_{n+1}) , где

$$V_{n+1} = V_n \cup T, \quad E_{n+1} = \{T\} \cup \{e \cup \{t\} : e \in E_n, t \in T\}.$$

Легко видеть, что в этом случае H_{n+1} — это $(n+1)$ -однородная клика с хроматическим числом 3. Посчитаем количество ребер у этого гиперграфа. Очевидно, что

$$\begin{aligned} |E_{n+1}| &= (n+1)|E_n| + 1 = (n+1)! \left(1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) + 1 \\ &= (n+1)! \left(1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n+1)!} \right). \end{aligned}$$

Нижняя оценка в (50) доказана.

Обоснуем верхнюю оценку, используя рассуждение от противного. Пусть $H = (V, E)$ — n -однородная клика с хроматическим числом 3 и условием $|E| > n^n$. В силу того, что гиперграф H — клика, в нем найдется вершина x_1 степени больше, чем n^{n-1} . Действительно, для любого ребра $e \in E$ выполнено

$$\sum_{v \in e} \deg v \geq |E| - 1 + n > n^n.$$

Пусть теперь набор вершин $x_1, \dots, x_i$, $i < n$, таков, что более n^{n-i} ребер гиперграфа H содержат все эти вершины одновременно. Например, при $i = 1$ мы такой набор нашли (база индукции). В силу того, что $\chi(H) = 3$, существует ребро $e_i \in E$, не содержащее ни одной вершины из множества $\{x_1, \dots, x_i\}$. Но любое ребро, содержащее все вершины $x_1, \dots, x_i$, пересекает e_i . Таких ребер, как мы знаем, больше, чем n^{n-i} , и, стало быть, в e_i найдется вершина x_{i+1} , которая содержится более чем в n^{n-i-1} ребрах указанного вида. Следовательно, мы построили такой набор вершин $x_1, \dots, x_{i+1}$, что более n^{n-i-1} ребер гиперграфа H содержат все эти вершины одновременно. Продолжая описанную процедуру, в конце мы получим набор вершин $\{x_1, \dots, x_n\}$, одновременно содержащихся по крайней мере в двух ребрах. Противоречие с условием отсутствия кратных ребер у H . Верхняя оценка в (50), а с ней и теорема 28 доказаны.

Из неравенств (50), в частности, вытекает асимптотика логарифма величины $M(n)$: $\ln M(n) \sim n \ln n$ при $n \rightarrow \infty$. Другие результаты относительно величины $M(n)$ авторам настоящего обзора неизвестны.

Мы рассмотрели задачу типа Эрдеша–Хайнала для клик. Естественно было бы далее рассмотреть вопрос о минимальном числе ребер в еще более узком классе гиперграфов. Например, в классе гиперграфов со следующим свойством: для любых различных ребер e и f гиперграфа выполнено $|e \cap f| \geq 2$. Однако оказывается, что в таком классе задача не имеет смысла, что сразу вытекает из следующего хорошо известного утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Пусть $H = (V, E)$ — гиперграф без одновершинных ребер. Если для любых различных ребер e и f гиперграфа H выполнено

$$|e \cap f| \neq 1,$$

то $\chi(H) = 2$.

Доказательство утверждения 4 весьма несложное. Мы выведем его в качестве простого следствия из критерия раскрашиваемости гиперграфа, недавно полученного А. Плухаром (см. [24]).

Пусть $H = (V, E)$ – произвольный гиперграф без одновершинных ребер, а σ – некоторая нумерация множества вершин V . Точнее, будем считать, что σ – это некоторое биективное отображение V в $\{1, 2, \dots, |V|\}$. Будем говорить, что набор ребер $(A_1, A_2, \dots, A_r)$ гиперграфа H образует *упорядоченную r -цепь* относительно нумерации σ , если для любого $i = 1, \dots, r-1$ выполнено $|A_i \cap A_{i+1}| = 1$, для любых i, j с условием $|i - j| > 2$ выполнено $A_i \cap A_j = \emptyset$ и, наконец, $\sigma(v) \leq \sigma(u)$ для всех $v \in A_i$, $u \in A_{i+1}$, $i = 1, \dots, r-1$. Имеет место следующая теорема о связи r -раскрашиваемости гиперграфа и наличия упорядоченных r -цепей в нем.

ТЕОРЕМА 29 (А. Плухар [24]). *Пусть $H = (V, E)$ – произвольный гиперграф без одновершинных ребер. H является r -раскрашиваемым тогда и только тогда, когда для некоторой нумерации σ множества вершин V в гиперграфе H нет упорядоченных r -цепей.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем необходимость. Пусть H – r -раскрашиваемый, а раскраска (т. е. разбиение множества вершин V) $V = V_1 \sqcup \dots \sqcup V_r$ является правильной для H . Рассмотрим любую нумерацию σ , которую индуцирует эта раскраска, т. е. сначала мы произвольно присваиваем номера с 1 по $|V_1|$ элементам V_1 , потом – номера с $|V_1| + 1$ по $|V_1| + |V_2|$ элементам V_2 и т. д. В такой нумерации, если $\sigma(v) < \sigma(u)$, то номер цвета v не превосходит номера цвета u . Предположим, что в данной нумерации существует упорядоченная r -цепь $(A_1, A_2, \dots, A_r)$. Тогда в силу неодноразветности всех ребер получаем, что вершина из пересечения $A_1 \cap A_2$ имеет цвет с номером не меньше 2, вершина из пересечения $A_2 \cap A_3$ имеет цвет с номером не меньше 3 и т. д. Вершина из пересечения $A_{r-1} \cap A_r$ имеет цвет с номером не меньше r , а точнее, имеет цвет r . Получается, что все ребро A_r должно быть покрашено в цвет r . Противоречие. Значит, упорядоченных r -цепей относительно построенной нумерации σ нет.

Докажем достаточность. Пусть в нумерации σ нет упорядоченных r -цепей. Введем обозначение $f(A)$ для первой относительно нумерации σ вершины ребра $A \in E$ и $l(A)$ – для последней вершины ребра A . Рассмотрим следующий жадный алгоритм раскраски вершин H .

- Сначала все вершины покрасим в цвет 1.
- Будем рассматривать вершины по очереди согласно нумерации σ . Если текущая вершина является первой вершиной в некотором ребре, то будем ее перекрашивать. Новый цвет будем стараться брать с как можно меньшим номером, но так, чтобы не было одноцветных ребер. Если подобный выбор цвета невозможен, то покрасим вершину в цвет r .
- Если текущая вершина не является первой вершиной в некотором ребре, то не будем ее перекрашивать.

Покажем, что такой алгоритм дает в итоге правильную раскраску вершин гиперграфа H . Пусть алгоритм не приводит к успеху и A_r – одноцветное ребро. Тогда оно обязательно покрашено в цвет r . Раз вершине $f(A_r)$ алгоритм присвоил цвет r , то существует ребро A_{r-1} , в котором $f(A_r)$ является последней, а все остальные вершины покрашены в цвет $r-1$. Если бы такого ребра не было, то алгоритм присвоил бы вершине $f(A_r)$ цвет $r-1$. Рассуждая аналогично относительно вершины $f(A_{r-1})$, получаем, что существует ребро A_{r-2} с условием $f(A_{r-1}) = l(A_{r-2})$ и все вершины $A_{r-2} \setminus A_{r-1}$ покрашены в цвет $r-2$. Далее, по индукции получаем набор ребер A_k , $k = 1, \dots, r$, удовлетворяющий

следующим условиям: для всех $k = 1, \dots, r-1$ выполнено $l(A_k) = f(A_{k+1})$ и все вершины $A_k \setminus A_{k+1}$ покрашены в цвет k . Подобный набор ребер $(A_1, A_2, \dots, A_r)$ является r -цепью, что противоречит изначальному свойству нумерации σ . Следовательно, алгоритм приведет к правильной r -цветной раскраске вершин гиперграфа H . Теорема 29 доказана.

Выведем из теоремы 29 утверждение 4. Пусть гиперграф $H = (V, E)$ удовлетворяет условию утверждения 4. Тогда для любой нумерации вершин в H не будет упорядоченных 2-цепей, и поэтому хроматическое число H будет равно двум. Таким образом, в классе гиперграфов без единичных попарных пересечений ребер задача типа Эрдеша–Хайнала не имеет смысла, все гиперграфы из этого класса являются двудольными.

3.4. Гиперграфы с большим обхватом. В п. 3.1 мы давали определение обхвата $g(H)$ гиперграфа H и даже формулировали теорему 10, говорящую о том, что бывают гиперграфы со сколько угодно большими обхватом и хроматическим числом одновременно. В то же время ясно, что условие $g(H) > 2$ равносильно условию простоты гиперграфа. Поэтому задача типа Эрдеша–Хайнала о гиперграфах с большим обхватом также осмысленна, и ее уместно рассмотреть в текущем разделе.

Итак, обозначим через $m(n, r, s)$ минимально возможное число ребер гиперграфа в классе n -однородных гиперграфов с хроматическим числом больше r и с обхватом больше s . Формально определение $m(n, r, s)$ можно записать так:

$$m(n, r, s) = \min\{|E(H)| : H - n\text{-однородный гиперграф, } \chi(H) > r, g(H) > s\}.$$

Из данного определения следует, во-первых, что

$$m(n, r, 1) = m(n, r), \quad m(n, r, 2) = m^*(n, r),$$

а во-вторых, что для любого $s \geq 2$ выполнены неравенства

$$m(n, r, s+1) \geq m(n, r, s) \geq m^*(n, r).$$

Единственная известная верхняя оценка величины $m(n, r, s)$ при $s \geq 3$ была получена в уже упоминавшейся теореме 10:

$$m(n, r, s) \leq 4 \cdot 20^s n^{3s-2} r^{s(n+1)}. \quad (51)$$

Строго говоря, задача о нахождении величины $m(n, r, s)$ была поставлена лишь в работе А. В. Косточки и М. Кумбхата 2009 г. (см. [51]). Однако, по сути, задача в неявном виде уже была сформулирована Эрдешем и Ловасом в 1973 г. Косточка и Кумбхат доказали (см. [51]) следующую теорему.

ТЕОРЕМА 30 (А. В. Косточка, М. Кумбхат [51]). *Для любых $r \geq 2$, $s \geq 1$ и $\varepsilon > 0$ существует такое число $n_0 = n_0(r, s, \varepsilon)$, что для всех $n > n_0$ выполняются неравенства*

$$m(n, r, 2s) \geq r^{n(s+1)} n^{-\varepsilon}, \quad (52)$$

$$m(n, r, 2s+1) \geq r^{n(s+1)} n^{1-\varepsilon}. \quad (53)$$

Отметим, что при $s = 1$ оценка (52) величины $m(n, r, 2) = m^*(n, r)$ совпадает с оценкой (30). Ясно, что при $s \geq 2$ полученные в теореме 30 оценки (52) и (53) в экспоненциальное число раз больше всех нижних (и даже верхних) оценок величины $m^*(n, r)$.

Сопоставление нижних оценок Косточки и Кумбхата (52) и (53) с верхней оценкой (51) Эрдеша и Ловаса показывает, что в данной задаче не понятен даже правильный порядок роста экспоненты. Верно ли, что при фиксированных r и s выполнено

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (m(n, r, s))^{1/n} = r^s?$$

Задача о нахождении величины $m(n, r, s)$, несомненно, требует дальнейшего исследования.

Завершим пункт рассмотрением класса гиперграфов, вообще не содержащих циклов. Хорошо известен тот факт (см., например, главу 12 в книге [59]), что граф, не содержащий циклов, является двудольным. Любой гиперграф, не содержащий циклов и одновершинных ребер, можно “обрезать” до графа (в каждом ребре нужно оставить лишь по две вершины). Получившийся граф не будет содержать циклов, а значит, будет двудольным. Следовательно, и исходный гиперграф был двудольным.

На этом мы завершаем обзор результатов в обобщениях задачи Эрдеша–Хайнала для классов гиперграфов с различными “геометрическими” свойствами.

3.5. Предписанные раскраски. Одной из характеристик гиперграфа, тесно связанной с хроматическим числом, является *предписанное хроматическое число* гиперграфа. Напомним ряд определений.

Пусть $H = (V, E)$ – гиперграф с множеством вершин V и множеством ребер E , а C – некоторое множество, элементы которого называются *цветами*. *Вершинным предписанием* A называется отображение, которое каждой вершине v ставит в соответствие некоторое (непустое) подмножество $A(v) \subseteq C$. Если $|A(v)| = r$ для любой вершины $v \in V$, то говорят, что *мощность* предписания A равна r .

Раскраской f вершин графа G , соответствующей предписанию A , называется такое однозначное отображение $f: V \rightarrow C$, что $f(v) \in A(v)$. При этом говорят, что каждая вершина v окрашена в цвет $f(v)$. Как и раньше, раскраска называется *правильной* для гиперграфа H , если в ней все ребра из E неодноразноцветны. Гиперграф называется *предписанно r -раскрашиваемым*, если для любого множества цветов C и любого вершинного предписания A мощности r найдется правильная раскраска, соответствующая данному предписанию. *Предписанным хроматическим числом* гиперграфа H называется минимальное натуральное число r такое, что H является предписанно r -раскрашиваемым. Мы будем обозначать предписанное хроматическое число гиперграфа H через $ch(H)$, как это принято в мировой литературе. Из приведенного определения следует, что для любого гиперграфа H выполняется неравенство

$$ch(H) \geq \chi(H). \quad (54)$$

Изучение предписанных хроматических чисел графов и гиперграфов было инициировано в работе В. Г. Визинга [60], а также в статье П. Эрдеша, А. Л. Рубина и Х. Тейлора [61].

В статьях [18] и [22] А. В. Косточка сформулировал следующее обобщение задачи Эрдеша–Хайнала для предписанных раскрасок. Он предложил отыскать величину $m_{\text{list}}(n, r)$, равную *минимально возможному количеству ребер гиперграфа в классе n -однородных гиперграфов, предписанное хроматическое число каждого из которых превышает r* . Формально данное определение можно записать следующим образом:

$$m_{\text{list}}(n, r) = \min\{|E(H)| : H - n\text{-однородный гиперграф, } ch(H) > r\}.$$

Ввиду неравенства (54) соотношение между новой величиной $m_{\text{list}}(n, r)$ и классической величиной $m(n, r)$ будет обратным, т. е.

$$m_{\text{list}}(n, r) \leq m(n, r). \quad (55)$$

Таким образом, для величины $m_{\text{list}}(n, r)$ верны все верхние оценки величины $m(n, r)$, а именно, оценки (5)–(8). Никакие верхние оценки $m_{\text{list}}(n, r)$, не следующие напрямую из неравенства (55), авторам данного обзора не известны.

Обсудим теперь нижние оценки для $m_{\text{list}}(n, r)$. Разумеется, неравенство (55) не позволяет сразу перенести нижние оценки величины $m(n, r)$ на случай величины $m_{\text{list}}(n, r)$, необходимо смотреть их доказательства и проверять, проходят ли они для произвольного вершинного предписания мощности r .

Несложно убедиться в том, что доказательство нижней оценки в (6) (см. подробнее теорему 52 в разделе 5) проходит и для предписанных раскрасок, т. е. для любых $n \geq 2$, $r \geq 2$ будет выполнено неравенство

$$m_{\text{list}}(n, r) \geq r^{n-1}. \quad (56)$$

Также легко понять, что для графов ответ в задаче тот же самый, что и в классической задаче Эрдеша–Хайнала:

$$m_{\text{list}}(2, r) = \binom{r+1}{2}.$$

Доказательство данного равенства практически полностью повторяет рассуждения утверждения 1.

А. В. Косточка отметил (см. [22]), что доказательство оценки Радхакришнана–Сринивасана (4) проходит и в случае предписанных раскрасок, а вот методы, с помощью которых были обоснованы оценки Алона (9) и Косточки (10) для величины $m(n, r)$, не позволяют получить оценки величины $m_{\text{list}}(n, r)$. Таким образом,

$$m_{\text{list}}(n, 2) \geq 0.1 \left(\frac{n}{\ln n} \right)^{1/2} \cdot 2^n. \quad (57)$$

Мы, в свою очередь, заметим, что доказательства оценок Плухара (12) и Шабанова (13) (см. теорему 55 в разделе 5) также не могут быть применены для случая произвольного вершинного предписания мощности r . В рассуждениях, с помощью которых обосновывались оценки (9), (10), (12) и (13), существенно использовался тот факт, что у нас есть всего r цветов и все вершины могут краситься во все цвета.

Первое улучшение простой оценки (56) для $n \geq 3$ и $r \geq 3$ было получено А. П. Розовской и Д. А. Шабановым, которые доказали (см. [52] и [62]) следующую теорему, обобщающую результат (57) на случай произвольного значения параметра r .

ТЕОРЕМА 31 (А. П. Розовская, Д. А. Шабанов [52]). *Для любых $n \geq 3$ и $r \geq 2$ выполняется неравенство*

$$m_{\text{list}}(n, r) \geq (\sqrt{3} - 1) \left(\frac{n}{\ln n} \right)^{1/2} r^{n-1}. \quad (58)$$

Отметим, что оценка (11) величины $m(n, r)$ (см. теорему 53 из раздела 5) может быть, в силу неравенства (55)), сразу получена из (58).

Из нижних оценок $m(n, r)$ нам осталось рассмотреть только результат Шабанова (14). Доказательство данной оценки использует метод случайной перекраски, который легко переносится на случай произвольного вершинного предписания мощности r . Следовательно, мы можем утверждать, что для всех $n \geq 3$ и $r \geq 3$ выполнено

$$m_{\text{list}}(n, r) \geq \frac{1}{4} n^{1/2} r^{n-1}. \quad (59)$$

Результат (59) улучшает оценку (58) для всех $n \geq 5295$ и $r \geq 3$.

Не только задачу Эрдеша–Хайнала можно обобщить для предписанных раскрасок. Например, подобную проблему можно сформулировать и для простых гиперграфов. Проводя аналогию с задачей Эрдеша–Ловаса (см. п. 3.1), обозначим через $m_{\text{list}}^*(n, r)$ минимально возможное количество ребер гиперграфа в классе n -однородных простых гиперграфов, предписанное хроматическое число каждого из которых превышает r . Ясно, что из (54) вытекает соотношение

$$m_{\text{list}}^*(n, r) \leq m^*(n, r), \quad (60)$$

поэтому для $m_{\text{list}}^*(n, r)$ верны все верхние оценки величины $m^*(n, r)$, приведенные в п. 3.1, а именно оценки (19)–(23). С нижними оценками ситуация такая же, как и в случае оценок величины $m_{\text{list}}(n, r)$: доказательства некоторых оценок естественным образом проводятся для предписанных раскрасок, а некоторых – нет.

На самом деле, большая часть нижних оценок $m^*(n, r)$, приведенных нами в п. 3.1 (т. е. оценок (26)–(31), (33), (38), (39)), выполнена и для $m_{\text{list}}^*(n, r)$. Среди них оценки Эрдеша и Ловаса (26), Сабо (27), Шабанова (33) и (38). Особо выделим те результаты, которые авторы обосновали для $m_{\text{list}}^*(n, r)$ непосредственно в своих статьях.

Во-первых, в работе Розовской и Шабанова [52] было доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 32 (А. П. Розовская, Д. А. Шабанов [52]). *Для любых $n \geq 3$, $r \geq 2$ выполняется неравенство*

$$m_{\text{list}}^*(n, r) \geq \frac{(\sqrt{6} - 2)^2}{32} \frac{r^{2n-4}}{n \ln n}. \quad (61)$$

Заметим, что оценка (31) величины $m^*(n, r)$ была получена как простое следствие (см. соотношение (60)) результата (61).

Во-вторых, в заключительных комментариях статьи [51] А. В. Косточка и М. Кумбхат заметили, что неравенство (30) имеет место и для $m_{\text{list}}^*(n, r)$, а также написали ряд пояснений к тому, каким образом доказательство можно адаптировать к случаю предписанных раскрасок. Таким образом, можно утверждать, что при любых фиксированных $r \geq 2$ и $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное $n_0 = n_0(r, \varepsilon)$, что для любого $n > n_0$ выполнено

$$m_{\text{list}}^*(n, r) > r^{2n} n^{-\varepsilon}.$$

Соотношения между известными нижними оценками для $m_{\text{list}}^*(n, r)$ остаются теми же, что и для $m^*(n, r)$ (см. п. 3.1).

Перечислим теперь результаты, доказательства которых не проходят для $m_{\text{list}}^*(n, r)$. Это оценки Косточки, Мубаи, Рёдли и Тетали (28), (29), а также Шабанова (39). Например, в доказательстве оценки (28) применяется идея разделения множества из r цветов на два непересекающихся подмножества. Осуществляется случайная раскраска одной части вершин (вершин малой степени) в цвета из первого подмножества, а оставшейся части – в цвета из второго подмножества. Ясно, что условие одинаковости множества допустимых цветов для всех вершин в таком рассуждении существенно и для произвольного вершинного предписания мощности r оно не может быть соблюдено.

В заключение отметим, что нижние оценки величин $m^*(n, r)$ и $m(n, r)$, которые наиболее сильны при больших значениях r (т. е. оценки (28), (29) и (39) для $m^*(n, r)$ и оценки (9), (12) и (13) для $m(n, r)$), не переносятся, как мы знаем, на случай предписанных раскрасок. В связи с этим остается неизвестным порядок роста величин $m_{\text{list}}^*(n, r)$ и $m_{\text{list}}(n, r)$ при фиксированном n и растущем r . Напомним, что в данных условиях $m(n, r) = \Theta(r^n)$, $m^*(n, r) = \Theta(r^{2n-2} \ln^2 r)$. Теперь же мы лишь можем утверждать (см., например, (58), (61)), что

$$\begin{aligned} m_{\text{list}}(n, r) &= \Omega(r^{n-1}), & m_{\text{list}}(n, r) &\leq m(n, r) = O(r^n), \\ m_{\text{list}}^*(n, r) &= \Omega(r^{2n-4}), & m_{\text{list}}^*(n, r) &\leq m^*(n, r) = O(r^{2n-2} \ln^2 r). \end{aligned}$$

В этом ключе становится еще более интересным найти нетривиальную (т. е. не вытекающую из (55)) верхнюю оценку величины $m_{\text{list}}(n, r)$.

Задачи типа Эрдеша–Хайнала для предписанных раскрасок могут быть поставлены, конечно, и для других классов гиперграфов, рассматривавшихся в настоящем разделе (гиперграфы с большим обхватом, (n, l) -системы, гиперграфы-клики). Однако до сих пор остается непоясненным вопрос об отличии подобного рода задач от классических задач для обыкновенных раскрасок. Верно ли, что в общем случае (например, при $n > 2$) справедливо строгое неравенство

$$m_{\text{list}}(n, r) < m(n, r)?$$

3.6. Полноцветные раскраски. Правильные раскраски гиперграфов в два цвета допускают несколько различных интерпретаций и, следовательно, много различных обобщений на случаи большего числа цветов. Первое естественное обобщение – это правильные r -цветные раскраски, в которых все ребра гиперграфа неоднородны, и именно этими обобщениями мы до сих

пор занимались. Другое обобщение правильной двухцветной раскраски – это понятие *полноцветной r -раскраски*.

Раскраска множества вершин гиперграфа $H = (V, E)$ в r цветов (r -раскраска) называется *полноцветной* для H , если в ней каждое ребро из E содержит вершины всех цветов. Ясно, что полноцветная 2-раскраска является правильной двухцветной раскраской и, наоборот, любая правильная двухцветная раскраска является полноцветной 2-раскраской.

Один из первых результатов относительно полноцветных r -раскрасок n -однородных гиперграфов был получен в 1973 г. П. Эрдемем и Л. Ловасом в работе [11], где была доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 33 (П. Эрдеш, Л. Ловас [11]). *Пусть $2 \leq r \leq n$ и H – n -однородный гиперграф. Если каждое ребро гиперграфа H пересекает не более $r^{n-1}/(4(r-1)^n)$ других ребер H , то для H существует полноцветная r -раскраска.*

Другие достаточные условия существования полноцветных раскрасок у однородных гиперграфов можно найти, например, в работе [63].

Дальнейший интерес к изучению полноцветных раскрасок возник в 2002 г. в связи с работой [64] А. В. Косточки, где была поставлена задача об отыскании величины $p(n, r)$, равной *минимальному числу ребер гиперграфа в классе n -однородных гиперграфов, для которых не существует полноцветных r -раскрасок*. Ясно, что величина $p(n, 2)$ совпадает с классической величиной $m(n)$ (см. п. 2.1). В общем же случае выполнены соотношения

$$p(n, r+1) \leq p(n, r) \leq p(n, 2) = m(n), \quad p(n, n+1) = 1.$$

Из теоремы 33 следует, что $p(n, r) \geq r^{n-1}/(4(r-1)^n)$, однако совсем несложно показать, что выполнено чуть более сильное неравенство

$$p(n, r) \geq \frac{r^{n-1}}{(r-1)^n} = \frac{1}{r} \left(\frac{r}{r-1} \right)^n. \quad (62)$$

Доказательство этого соотношения основано на применении простых вероятностных соображений, полностью аналогичных тем, с помощью которых Эрдеш обосновал нижнюю оценку (2) величины $m(n)$.

Задача о нахождении величины $p(n, r)$ имеет тесную связь с задачей о предписанных раскрасках полных r -дольных графов. В работе [61] Эрдеша, Рубина и Тейлора 1979 г. была сформулирована проблема нахождения величины $N(r, n)$, равной *минимальному числу вершин графа в классе полных r -дольных графов, предписанное хроматическое число каждого из которых превышает n* . Эрдеш, Рубин и Тейлор доказали соотношения, проясняющие связь между величинами $N(2, n)$ и $m(n)$:

$$m(n) \leq N(2, n) \leq 2m(n).$$

Косточка в статье [64] обосновал обобщения данных неравенств для произвольного значения r .

ТЕОРЕМА 34 (А. В. Косточка [64]). *Для любых $2 \leq r \leq n$ выполнено неравенство*

$$p(n, r) \leq N(r, n) \leq rp(n, r). \quad (63)$$

Опираясь на неравенства (63), а также на оценки предписанного хроматического числа графа K_{m*r} (полного r -дольного графа с одинаковым размером долей m) из работы [65] Н. Алона, Косточка получил (см. [64]) следующие оценки для $p(n, r)$:

$$\frac{1}{r} e^{c_1 n/r} \leq p(n, r) \leq r e^{c_2 n/r}, \quad (64)$$

где c_1 и c_2 – некоторые абсолютные положительные константы, причем $c_1 < 1 < c_2$.

Дальнейшие исследования величины $p(n, r)$ были проведены в работах Д. А. Шабанова [66] и [67]. В них были доказаны оценки величины $p(n, 3)$ (в данных статьях использовалось другое обозначение – $m_1^3(n)$ вместо $p(n, 3)$), схожие с теми, что получили Эрдеш и Бек (см. (2) и (3)) для величины $m(n) = p(n, 2)$.

ТЕОРЕМА 35 (Д. А. Шабанов [67]). *Существует такая константа $c > 0$, что для любого $n \geq 3$ выполняются соотношения*

$$c \left(\frac{n}{\ln n} \right)^{1/3} \left(\frac{3}{2} \right)^n \leq p(n, 3) \leq \frac{e \ln 3}{12} n^2 \left(\frac{3}{2} \right)^n (1 + o(1)). \quad (65)$$

Неравенства (65) были обобщены на случай произвольного значения параметра r в 2010 г. Шабановым в работе [68], где были обоснованы следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 36 (Д. А. Шабанов [68]). *Для любых $n \geq 2$, $r \geq 2$ выполнено неравенство*

$$p(n, r) \geq \frac{\sqrt{21} - 3}{4r} \left(\frac{n}{(r-1)^2 \ln n} \right)^{1/3} \left(\frac{r}{r-1} \right)^n. \quad (66)$$

ТЕОРЕМА 37 (Д. А. Шабанов [68]). *Пусть задана функция $r = r(n)$, удовлетворяющая условию $r \geq 3$. Пусть, кроме того, функция $d = d(n) := r^3/n^2$ не превосходит некоторой положительной константы $c < 1/2$ при всех $n > n_0$. Тогда существует такая функция $\varphi = \varphi(n)$, зависящая от функции r и стремящаяся к единице при $n \rightarrow \infty$, что для всех $n \geq n_0$ выполняется неравенство*

$$p(n, r) \leq \frac{1}{r} \left(\frac{r}{r-1} \right)^n e(\ln r) \frac{n^2 + \sqrt{n^4 + 16n^3 r(r-1)}}{4(r-1)} \varphi. \quad (67)$$

В силу условия теоремы 37 оценка (67) выполнена только для r , имеющих порядок роста $O(n^{2/3})$. Для больших значений параметра r выполнена более слабая, зато верная для всех значений r верхняя оценка.

ТЕОРЕМА 38 (Д. А. Шабанов [69]). *Для любых $n \geq 2$, $r \geq 2$ выполняется неравенство*

$$p(n, r) \leq \left(\frac{r}{r-1} \right)^n \times e^2 \left(\left[\max \left(\frac{n^2 + 2nr}{2(r-1)}, \frac{3nr + \sqrt{9n^2 r^2 + 12n^3 r(r-1)}}{6(r-1)} \right) \right] \ln r + 2 \right). \quad (68)$$

Доказательства оценок (65)–(68) основаны на применении различных вероятностных методов, схожих с методами, применявшимися при доказательстве оценок (6) и (11) величины $m(n, r)$ (подробнее см. доказательства теорем 52 и 53 в разделе 5).

Наконец, совсем недавно Розовская и Шабанов существенно улучшили теорему 36.

ТЕОРЕМА 39 (А. П. Розовская, Д. А. Шабанов, [70]). *Пусть $n \geq 3$, а $r \leq n/(2 \ln n)$. Тогда выполнено неравенство*

$$p(n, r) \geq \frac{1}{2r} \left(\frac{n}{(r-1)^2 \ln n} \right)^{1/2} \left(\frac{r}{r-1} \right)^n. \quad (69)$$

Посмотрим теперь, как соотносятся между собой перечисленные оценки величины $p(n, r)$. Нас, безусловно, будет интересовать только случай $r > 2$.

Сначала обсудим нижние оценки, т. е. оценки (62), (64)–(66), (69). Очевидно, оценка (65) является следствием оценки (66), так что остаются лишь неравенства (62), (64), (66), (69).

Теперь заметим, что нижняя оценка из (64) всегда хуже простой оценки (62). Действительно, в силу того, что $c_1 < 1$, получаем соотношение

$$\frac{1}{r} \left(\frac{r}{r-1} \right)^n \geq \frac{1}{r} e^{n/r} > \frac{1}{r} e^{c_1 n/r}.$$

Таким образом, остается сравнить (62), (66) и (69). Пусть

$$(r-1)^2 > \frac{n}{4 \ln n}.$$

Тогда

$$\frac{1}{2} \left(\frac{n}{(r-1) \ln n} \right)^{1/2} < 1,$$

т. е. оценка (62) лучше оценки (69). Более того,

$$\frac{\sqrt{21}-3}{4} \left(\frac{n}{(r-1)^2 \ln n} \right)^{1/3} < \frac{1}{2} \left(\frac{n}{(r-1) \ln n} \right)^{1/2} < 1,$$

так что и неравенство (66) оказывается слабее результата (62).

Если же

$$(r-1)^2 \leq \frac{n}{4 \ln n},$$

то

$$\frac{1}{2} \left(\frac{n}{(r-1) \ln n} \right)^{1/2} \geq 1,$$

а значит, здесь уже оценка (69) уточняет оценку (62). Кроме того, оценка (69) всегда лучше (66) при заданном ограничении, и, стало быть, в текущей ситуации оценка (69) сильнее всех.

Подведем итоги сравнения известных нижних оценок величины $p(n, r)$.

1. При $2 < r \leq \sqrt{n/(4 \ln n)} + 1$ наилучшей нижней оценкой величины $p(n, r)$ является оценка Розовской и Шабанова (69).

2. При $r > \sqrt{n/(4 \ln n)} + 1$ наилучшей нижней оценкой величины $p(n, r)$ является простая оценка (62).

Стоит заметить, что при $r = r(n) \sim \alpha n$ наилучшая нижняя оценка (62) имеет порядок роста $O(1/n)$. Таким образом, при указанных значениях параметра r до сих пор не получено никакой нетривиальной нижней оценки. Вопрос о том, растет ли функция $p(n, r)$ при $r = \Theta(n)$ и $n \rightarrow \infty$, остается открытым.

Теперь рассмотрим верхние оценки величины $p(n, r)$ (оценки (64), (65), (67) и (68)). Очевидно, что оценка (65) является частным случаем оценки (67), поэтому про нее можно забыть.

Далее, для любого фиксированного r из соотношений (66) и (67) вытекает равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln p(n, r)}{n} = \ln \frac{r}{r-1}.$$

Это равенство вкупе с оценкой (64) влечет соотношение

$$r \ln \frac{r}{r-1} \leq c_2,$$

верное при всех $r \geq 2$. Следовательно, $c_2 \geq 2 \ln 2 > 1$.

Отсюда можно заключить, что, если величина $r = r(n) \geq 3$ удовлетворяет условию теоремы 37, т. е. $r = O(n^{2/3})$, то оценка (67) улучшает верхнюю оценку из (64). Действительно, имеет место цепочка соотношений:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \left(\frac{r}{r-1} \right)^n e(\ln r) \frac{n^2 + \sqrt{n^4 + 16n^3 r(r-1)}}{4(r-1)} (1 + o(1)) \\ &= \exp \left\{ n \ln \frac{r}{r-1} + O(\ln n) \right\} = \exp \left\{ r \left(\ln \frac{r}{r-1} \right) \frac{n}{r} + O(\ln n) \right\} \\ &\leq \exp \left\{ 3 \left(\ln \frac{3}{2} \right) \frac{n}{r} (1 + o(1)) \right\} \ll \exp \left\{ 2(\ln 2) \frac{n}{r} \right\} \leq \exp \left\{ c_2 \frac{n}{r} \right\}. \end{aligned}$$

Понятно, что оценка (67) всегда асимптотически лучше, чем (68), но (68) верна для всех r , в то время как (67) – только для $r = O(n^{2/3})$. Остается, тем самым, сравнить верхнюю оценку из (64) и (68) при $r \gg n^{2/3}$.

Правая часть (68) при растущих параметрах $r = r(n)$ и n имеет вид

$$\left(\frac{r}{r-1} \right)^n e^2 \max \left(\frac{n^2}{2r}, n^{3/2} \frac{1}{\sqrt{3}} \right) (\ln r) (1 + o(1)). \quad (70)$$

Если $r(n) = o(n/\ln n)$, то выражение (70) имеет, в свою очередь, вид $e^{n/r(1+o(1))}$, и, следовательно, оно асимптотически меньше величины $re^{c_2 n/r}$ из (64). Если же $r(n) \gg n/\ln n$ при $n \rightarrow \infty$, то выражение (70) имеет порядок роста $(e^2/\sqrt{3})n^{3/2+o(1)}$, и это асимптотически хуже верхней оценки (64), имеющей в таких условиях вид $\text{const} \cdot n^{1+o(1)}$.

В заключение пункта подведем итоги сравнения верхних оценок для $p(n, r)$.

1. При $2 < r = r(n) = O(n^{2/3})$ наилучшей верхней оценкой $p(n, r)$ является оценка Шабанова (67).
2. При $n^{2/3} \ll r = r(n) = o(n/\ln n)$ наилучшей верхней оценкой $p(n, r)$ является оценка Шабанова (68).
3. При $r = r(n) \gg n/\ln n$ наилучшей верхней оценкой является оценка Косточки из (64).

4. Смежные проблемы

В этом разделе мы поговорим о некоторых задачах, которые либо напрямую связаны с проблематикой Эрдеша–Хайнала, либо на нее опираются, либо в ее рамках используются.

4.1. Системы общих представителей. В этом пункте мы скажем несколько слов об одной известной задаче комбинаторного анализа. У этой задачи есть несколько названий. Во-первых, говорят про задачу *о покрытии*. Во-вторых, говорят о *системах представителей*. Употребляют также термины *трансверсаль* и – по-английски – *piercing*.

Назовем *системой общих представителей* (с.о.п.) для множества ребер данного гиперграфа $H = (V, E)$ любое такое множество $S \subseteq V$, что S имеет непустое пересечение с каждым ребром гиперграфа. Иными словами, S содержит хотя бы одного представителя – вершину – из каждого ребра в H . Обозначим через $\tau(E)$ мощность наименьшей с.о.п. для E .

В случае, когда H – n -однородный гиперграф, про величину $\tau(E)$ известно довольно много. Для наших целей будет важным устройство величины

$$\zeta(v, n, s) = \max\{\tau(E) : H = (V, E) - n\text{-однородный}, |V| = v, |E| = s\}.$$

Тривиальные факты относительно величины $\zeta(v, n, s)$ собраны в следующем утверждении.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. *Имеют место неравенства*

- 1) $\zeta(v, n, s) \leq \min\{v - n + 1, s\}$;
- 2) $\zeta(v, n, s) \geq \min\{s, \lfloor v/n \rfloor\}$.

Универсальная нетривиальная верхняя оценка величины $\zeta(v, n, s)$ дается в теореме, которая неоднократно передоказывалась разными авторами в связи со своей исключительной полезностью в экстремальной комбинаторике.

ТЕОРЕМА 40. *Для любых v, n, s выполнено неравенство*

$$\zeta(v, n, s) \leq \max\left\{\frac{v}{n}, \frac{v}{n} \ln \frac{sn}{v}\right\} + \frac{v}{n} + 1. \quad (71)$$

Доказательство этого результата можно найти в обзоре [71], а также в книге [72]. Теорема 40 в определенном смысле неулучшаема. Дело в том, что в большинстве ситуаций максимум в оценке (71) достигается на второй из сравниваемых величин. При этом верна, например, такая теорема.

ТЕОРЕМА 41. *Предположим, что $v \rightarrow \infty$, $s = s(v) \rightarrow \infty$, $n = n(v) \rightarrow \infty$, причем sn/v также неограниченно возрастает с увеличением v . Пусть, далее, $n = o(\sqrt{v})$, $\ln n = o(sn/v)$ и $\ln(sn/v) = o(\sqrt{n})$. Положим*

$$l = \left\lfloor \frac{v}{n} \ln \frac{sn}{v} - \frac{v}{n} \ln \ln \frac{sn}{v} - \frac{v}{n} \ln \ln n - \frac{10v}{n} \right\rfloor.$$

Тогда при достаточно больших v выполнена оценка $\zeta(v, n, s) \geq l$.

Доказательство теоремы 41 приведено в [71] и [72]. Она означает, что при определенных (довольно естественных) ограничениях на значения параметров v , n , s выполнена асимптотика

$$\zeta(v, n, s) \sim \frac{v}{n} \ln \frac{sn}{v}.$$

Вместо отдельных представителей, в ребрах данного гиперграфа можно искать целые группы представителей. Пусть даны два гиперграфа: $H = (V, E)$ и $H' = (V, F)$. Если для каждого ребра $e \in E$ существует такое ребро $f \in F$, что $f \subseteq e$, то говорят, что гиперграф H' *представляет* гиперграф H . Обычно рассматривают только однородные гиперграфы H и H' . Более того, в качестве H , как правило, берется полный n -однородный гиперграф на $v = |V|$ вершинах. Тогда минимальное число ребер в k -однородном гиперграфе H' , представляющем гиперграф H , обозначается $T(v, n, k)$ и называется *числом Турана*.

Задача о нахождении $T(v, n, k)$ поставлена в 1961 г. П. Тураном (см. [73]). К сожалению, про числа Турана известно гораздо меньше, чем про величину $\zeta(v, n, s)$. Подробнее о них можно прочесть в [71], [72], [74]–[76].

Поясним связь между проблематикой Эрдеша–Хайнала и описанными величинами. Во-первых, пусть дан гиперграф $H = (V, E)$, и пусть S – некоторая с.о.п. для E . Предположим, что ни для какого ребра $e \in E$ не выполнено $e \subseteq S$. Тогда покрасим элементы множества S в красный цвет, а элементы множества $V \setminus S$ в синий цвет. Получится раскраска множества V в два цвета, при которой все ребра из E неодноразноцветны. Очевидно, верно и обратное: наличие раскраски гарантирует наличие с.о.п. с указанными выше свойствами. Таким образом, существование с.о.п. и двудольность попросту эквивалентны.

Во-вторых, пусть $v = r(n+a-1)+1$ и $H = (V, E)$ – полный $(n+a)$ -однородный гиперграф на v вершинах. Предположим, H' – это гиперграф, на котором достигается значение величины $T(v, n+a, n)$. Покажем, что гиперграф $H' = (V, F)$ не является r -раскрашиваемым. Действительно, пусть дана произвольная раскраска множества V в r цветов. Тогда в один из цветов покрашено не менее $n+a$ вершин. Иными словами, у H есть одноцветное ребро e . Пользуясь тем, что H' представляет H , возьмем $f \subseteq e$, $f \in F$. Ребро f тоже одноцветно. Значит, в любой r -цветной раскраске H' имеет одноцветное ребро, т. е. $\chi(H') > r$. В итоге

$$m(n, r) \leq \min_{a \geq 0} T(r(n+a-1)+1, n+a, n),$$

и это другой способ получения верхних оценок классической величины $m(n, r)$, а также ее различных аналогов. Например, именно так Алон получил оценку (8).

4.2. Задача о максимальной степени вершины. В задаче Эрдеша–Хайнала и ее обобщениях мы изучали минимально возможное число ребер гиперграфа в различных классах однородных гиперграфов. Однако можно рассматривать экстремальные значения и других характеристик. Одной из таких характеристик является *максимальная степень вершины гиперграфа*.

Пусть H – гиперграф, мы будем обозначать через $\Delta(H)$ максимальную степень вершины гиперграфа H . По аналогии с задачей Эрдеша–Хайнала рассмотрим величину $\Delta(n, r)$, равную *минимально возможному значению* $\Delta(H)$,

где H – n -однородный гиперграф с хроматическим числом больше r . Другими словами,

$$\Delta(n, r) = \min\{\Delta(H) : H - n\text{-однородный}, \chi(H) > r\}.$$

Сформулируем сразу и задачу о степени вершины для гиперграфов с большим обхватом. Обозначим через $\Delta(n, r, s)$ минимально возможное значение $\Delta(H)$, где H – n -однородный гиперграф с хроматическим числом больше r и обхватом больше s , т. е.

$$\Delta(n, r, s) = \min\{\Delta(H) : H - n\text{-однородный}, \chi(H) > r, g(H) > s\}.$$

Из приведенных определений следует, что

$$\Delta(n, r) = \Delta(n, r, 1) \leq \Delta(n, r, s) \leq \Delta(n, r, s + 1). \quad (72)$$

По аналогии с тривиальной оценкой (5) для величины $m(n, r)$, можно получить следующий простой результат. Рассмотрим гиперграф $H = (V, E)$, где $V = \{1, 2, \dots, r(n-1)+1\}$, а $E = \binom{V}{n}$. Как уже было установлено в п. 2.2, такой гиперграф H не является r -раскрашиваемым. При этом $\Delta(H) = \binom{r(n-1)}{n-1}$, и, следовательно,

$$\Delta(n, r) \leq \Delta(H) = \binom{r(n-1)}{n-1}. \quad (73)$$

Первые нетривиальные результаты относительно величин $\Delta(n, r, s)$ и $\Delta(n, r)$ были получены Эрдешем и Ловасом в 1973 г. в работе [11]. Из доказанной ими теоремы 11 (см. п. 3.1) следует, что для любых $n, r \geq 2$ выполняется неравенство

$$\Delta(n, r) \geq \frac{1}{4} r^{n-1} n^{-1}. \quad (74)$$

Кроме того, из теоремы 10 Эрдеша и Ловаса, также обсуждавшейся нами в п. 3.1, следует, что для любых $r, s \geq 2$ и n , большего некоторого N , существует n -однородный гиперграф с хроматическим числом больше r и обхватом больше s , степени всех вершин которого не превосходят $d = 20n^2 r^{n+1}$. Таким образом, для любых $r, s \geq 2$ и $n > N$ выполнено неравенство

$$\Delta(n, r, s) \leq 20n^2 r^{n+1}. \quad (75)$$

Заметим, что из соотношений (73) и (74) следует, что при фиксированном $n \geq 2$ и растущем r величина $\Delta(n, r)$ имеет порядок роста r^{n-1} .

Верхняя оценка Эрдеша и Ловаса (75) была улучшена Косточкой и Рёдлем в 2010 г.

ТЕОРЕМА 42 (А. В. Косточка, В. Рёдль [49]). *Для любых $n, r, s \geq 2$ выполняется неравенство*

$$\Delta(n, r, s) \leq \lceil nr^{n-1} \ln r \rceil. \quad (76)$$

Результат (76) улучшает (75) для всех $n, r, s \geq 2$. Более того, если n достаточно велико по отношению к r , то (76) в силу (72) дает хорошую оценку

и для $\Delta(n, r)$, улучшая тривиальную оценку (73). Например, при фиксированном r и растущем n правая часть (76) имеет вид

$$\begin{aligned} \binom{r(n-1)}{n-1} &\geq \frac{1+o(1)}{\sqrt{2\pi n}} \cdot \left(\frac{r^r}{(r-1)^{r-1}} \right)^{n-1} \\ &= \frac{1+o(1)}{\sqrt{2\pi n}} \cdot (r-1)^{n-1} \left(1 - \frac{1}{r} \right)^{-r(n-1)} \\ &> \frac{1+o(1)}{\sqrt{2\pi n}} \cdot (r-1)^{n-1} e^{n-1} > \frac{1+o(1)}{\sqrt{2\pi n}} \cdot r^{n-1} (1.3)^{n-1}. \end{aligned}$$

В то же время верхняя оценка из (76) имеет порядок роста $n r^{n-1}$. Стало быть, оценка (76) в указанных предположениях значительно сильнее оценки (73).

Если же, наоборот, зафиксировать n и устремить r к бесконечности, то оценка из (73) будет иметь порядок роста r^{n-1} , в то время как правая часть оценки (76) растет как $r^{n-1} \ln r$. Следовательно, в этом случае неравенство (73) уточняет неравенство (76).

Перейдем к обсуждению нижних оценок для $\Delta(n, r)$ и $\Delta(n, r, s)$. В 2000 г. Радхакришнан и Сринивасан показали (см. [15]), что при всех достаточно больших n (больше некоторого n_0) выполняется неравенство

$$\Delta(n, 2) \geq 0.17 \frac{2^n}{\sqrt{n \ln n}}. \quad (77)$$

Данный результат был обобщен Шабановым в 2010 г. в работе [77] на случай произвольного значения параметра r : для любых $n, r \geq 2$

$$\Delta(n, r) \geq \frac{\sqrt{6}-2}{4} \frac{r^{n-1}}{\sqrt{n \ln n}}. \quad (78)$$

Наконец, в работе [26] Шабановым была получена наиболее сильная, на сегодняшний день, нижняя асимптотическая оценка величины $\Delta(n, r)$ в случае $r \geq 3$: для любого $n \geq 3$ выполняется неравенство

$$\Delta(n, r) \geq \frac{1}{14} r^{n-1} n^{-1/2}. \quad (79)$$

Оценка (79) улучшает предыдущие результаты (74) и (78) при $n \geq 13$ и $r \geq 3$. При $r = 2$ асимптотически наилучшим остается результат Радхакришнана и Сринивасана (77).

Нетривиальные (т.е. не следующие из (72)) нижние оценки для величины $\Delta(n, r, s)$ были получены для $s = 2$ (простые гиперграфы) и для $s = 3$ (простые гиперграфы без циклов длины 3 – без “треугольников”). Из теоремы 12, доказанной З. Сабо, следует, что для любого $\varepsilon > 0$ и $n > n_0(\varepsilon)$ выполнено

$$\Delta(n, 2, 2) \geq 2^n n^{-\varepsilon}. \quad (80)$$

В 2009 г. результат Сабо (80) был обобщен Косточкой и Кумбхатом (см. [51]) на случай произвольного числа цветов r . Они показали, что при любых фиксированных $r \geq 2$ и $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное $n_0 = n_0(r, \varepsilon)$, что для любого $n > n_0$ выполнено неравенство

$$\Delta(n, r, 2) \geq r^n n^{-\varepsilon}. \quad (81)$$

Наконец, Шабановым в 2010 г. (см. [53]) был обоснован следующий результат.

ТЕОРЕМА 43 (Д. А. Шабанов [53]). *Существует такое натуральное число n_0 , что для всех $n > n_0$ и всех $r \geq 2$, удовлетворяющих соотношению $r \leq n^{1/9}$, выполнено неравенство*

$$\Delta(n, r, 2) \geq r^{n-1} n^{-3/t}, \quad (82)$$

где

$$t = t(n, r) = \left\lfloor \sqrt{\min\left(\frac{\ln n}{\ln r}, \frac{\ln n}{2 \ln((4/3) \ln n)}\right)} \right\rfloor.$$

Приведенные ниже оценки величин $\Delta(n, r)$ и $\Delta(n, r, 2)$ лежат в основе получения нижних оценок величины $m^*(n, r)$ в задаче Эрдеша–Ловаса, обсуждавшихся нами в п. 3.1 (см. п. 6.1). Так, с помощью результатов (74), (78), (79), (80), (81) и (82) были получены соответственно оценки (26), (31), (38), (27), (30) и (33) для величины $m^*(n, r)$. Отметим также, что соотношения между оценками (80), (81) и (82) для $\Delta(n, r, 2)$ являются точно такими же, как и соотношения между оценками (27), (30) и (33), которые очень подробно обсуждались нами в п. 3.1. Напомним, что из этих соотношений следует, что оценка (82) является асимптотически наилучшей.

Перечисленные нами нижние оценки (80)–(82) величины $\Delta(n, r, 2)$ выполнены при достаточно малых значениях r по сравнению с n , а потому не дают представления об асимптотическом поведении $\Delta(n, r, 2)$ при фиксированном n и растущем r . Как мы помним, в такой асимптотической области величина $\Delta(n, r)$ имеет порядок роста r^{n-1} . Однако, как оказалось, в этих условиях величина $\Delta(n, r, 2)$ имеет больший порядок роста, а именно $r^{n-1} \ln r$. То, что порядок роста у $\Delta(n, r, 2)$ не может быть больше $r^{n-1} \ln r$, сразу вытекает из оценки Косточки и Рёдля (76). Нижнюю же границу для поведения $\Delta(n, r, 2)$ впервые доказали А. Фриз и Д. Мубай в работе [78], обосновав следующую теорему.

ТЕОРЕМА 44 (А. Фриз, Д. Мубай [78]). *Пусть $n \geq 3$ и H – простой n -однородный гиперграф, причем $\Delta(H) = \Delta$. Тогда*

$$\chi(H) < c(n) \left(\frac{\Delta}{\ln \Delta} \right)^{1/(n-1)},$$

где величина $c(n)$ зависит только от n .

Из этой теоремы, в частности, вытекает оценка величины $\Delta(n, r, 2)$:

$$\Delta(n, r, 2) = \Omega(c(n)^{-(n-1)} r^{n-1} \ln r). \quad (83)$$

Действительно, если положить $r = c(n)(\Delta / \ln \Delta)^{1/(n-1)}$ и выразить Δ из этого равенства через n и r , то мы получим как раз $\Delta = \Omega(c(n)^{-(n-1)} r^{n-1} \ln r)$. Теорема Фриза и Мубай утверждает, что если максимальная степень вершины n -однородного простого гиперграфа H не превосходит такого Δ , то H является r -раскрашиваемым, что и обосновывает соотношение (83).

Несмотря на то что теорема 44 дает правильный порядок роста величины $\Delta(n, r, 2)$ при фиксированном n и растущем r , величина $c(n)$ в правой

части (83) достаточно велика. Из доказательства теоремы 44 следует лишь соотношение $c(n) = (\varepsilon n^{2n+1})^{1/(n-1)}$ (ε – некоторая абсолютная положительная константа), которое при подстановке в неравенство (83) дает соотношение

$$\Delta(n, r, 2) = \Omega(n^{-2n-1} r^{n-1} \ln r). \quad (84)$$

В связи с этим, например, оценка (84) улучшает классическую оценку Эрдеша и Ловаса (74) (выполненную к тому же для класса всех n -однородных гиперграфов, а не только для простых) лишь при условии $\ln r = \Omega(n^{2n})$.

Отметим, что из результатов Фриза и Мубаи (84) и Косточки и Рёдля (76) вытекает также, что при любых фиксированных $n \geq 3$, $s \geq 2$ величина $\Delta(n, r, s)$ при растущем r имеет порядок роста $r^{n-1} \ln r$.

Первый нетривиальный результат о поведении величины $\Delta(n, r, 3)$ был получен Фризом и Мубаи в работе [79], в которой было доказано неравенство вида

$$\Delta(3, r, 3) \geq cr^{n-1} \ln r, \quad (85)$$

где c – некоторая абсолютная положительная константа. Несложно понять, что в силу соотношения (72) неравенство (85) является частным случаем гораздо более сильного результата (84) тех же авторов.

Наконец, в работе [80] Шабановым была доказана следующая нижняя оценка величины $\Delta(n, r, 3)$.

ТЕОРЕМА 45 (Д. А. Шабанов [80]). *Существует такое натуральное число n_0 , что для всех $n > n_0$ и всех $r \geq 2$ выполнено неравенство*

$$\Delta(n, r, 3) \geq r^{n-1} n^{-4} \left[\sqrt{\frac{\ln n}{\ln \ln n}} \right]^{-1}. \quad (86)$$

Отметим, что нижняя оценка (86) достаточно близка к наилучшей верхней оценке Косточки и Рёдля (76): зазор между ними имеет порядок всего лишь $n^{1+o(1)} \ln r$.

Сравним оценки (86) и (82). Во-первых, отметим, что (86) верна для всех $r \geq 2$, а не только для $r \leq n^{1/9}$. Во-вторых, при малых r правая часть (82) имеет вид

$$r^{n-1} n^{-3\sqrt{2} \left[\sqrt{\frac{\ln n}{\ln(2 \ln n)}} \right]^{-1} (1+o(1))},$$

и это, безусловно, асимптотически меньше правой части (86). Кроме того, (86) асимптотически точнее и наилучших нижних оценок для $\Delta(n, r)$ (74), (78), (79), наиболее сильная из которых имеет вид $(1/14)r^{n-1}n^{-1/2}$. Асимптотическое улучшение при этом имеет порядок $n^{1/2-o(1)}$.

Осталось сравнить оценку (86) с результатом (83) Фриза и Мубаи. В силу того, что $c(n)$ в правой части соотношения (83) достаточно велика (см. (84)), оценка Фриза и Мубаи становится лучше оценки (86) только, когда r очень велико по сравнению с n : $\ln r \geq n^{2n+1+\varepsilon(n)}$, где $\varepsilon(n) = o(1)$ при $n \rightarrow \infty$.

Теперь мы обсудим задачу о величине $\Delta(n, r, s)$ для случая графов ($n = 2$). Совсем легко убедиться в том, что

$$\Delta(2, r) = r.$$

С одной стороны, полный граф на $r + 1$ вершине имеет максимальную степень вершины r , а потому $\Delta(2, r) \leq r$. С другой стороны, если $\Delta(G) < r$ для графа G , то $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1 \leq r$, и, следовательно, $\Delta(2, r) \geq r$.

В 1977 г. А. В. Косточка и Н. П. Мазурова доказали (см. [81]), что для любых $r, s \geq 2$ выполняется неравенство

$$\Delta(2, r, s) \leq \lceil 2r \ln r \rceil. \quad (87)$$

Отметим, что данный результат является частным случаем соотношения (76).

В частном случае $r = 3$ оценка (87) дает неравенство $\Delta(2, 3, s) \leq 7$, которое было немного уточнено в 2004 г. В. А. Ташкиновым (см. [82]): для всех $s \geq 2$

$$\Delta(2, 3, s) \leq 6.$$

В 1995 г. Ким получил (см. [83]) асимптотическую нижнюю оценку величины $\Delta(2, r, 4)$. Он доказал, что существует такая функция $\psi(r) = o(1)$ при $r \rightarrow \infty$, что для всех $r \geq 2$ выполнено

$$\Delta(2, r, 4) \geq r(\ln r)(1 + \psi(r)). \quad (88)$$

Наконец, в 1996 г. А. Йохансен (см. [84]) установил похожее соотношение и для графов без треугольников:

$$\Delta(2, r, 3) \geq Cr \ln r, \quad (89)$$

где $C > 0$ – некоторая абсолютная константа. Заметим, что из соотношений (89) и (87) следует, что при любом фиксированном $s \geq 3$ и растущем r величина $\Delta(2, r, s)$ имеет порядок роста $r \ln r$ (напомним, что при больших n выполнено соотношение $\Delta(n, r, s) = \Theta(r^{n-1} \ln r)$).

В заключение отметим, что в основе доказательств нижних оценок (74), (78) и (79) величины $\Delta(n, r)$ лежат те же вероятностные конструкции, с помощью которых были получены соответственно нижние оценки (6), (11) и (14) в задаче Эрдеша–Хайнала, что еще раз подчеркивает тесную связь экстремальных значений числа ребер (величина $m(n, r)$) и максимальной вершинной степени (величина $\Delta(n, r)$).

4.3. Оценки в теореме Ван дер Вардена. Одним из наиболее ярких применений результатов и методов теории раскрасок гиперграфов является задача о функции Ван дер Вардена, которую мы и обсудим в настоящем пункте.

В 1927 г. Б. Ван дер Варден доказал (см. [85], [86]) знаменитую теорему об арифметических прогрессиях. Данная теорема утверждает, что в любой раскраске множества целых чисел $\mathbb{Z}$ в r цветов найдется одноцветная арифметическая прогрессия сколь угодно большой длины. Теорема Ван дер Вардена является одним из фундаментальных результатов теории Рамсея (подробнее о теории Рамсея см. [87]–[89]). Ее эквивалентная формулировка звучит следующим образом.

ТЕОРЕМА 46 (Б. Ван дер Варден [85]). *Для любых натуральных чисел $n \geq 3$ и $r \geq 2$ существует такое минимальное число $W(n, r)$, что для каждого натурального $N \geq W(n, r)$ в любой r -цветной раскраске множества $\{1, 2, \dots, N\}$ найдется одноцветная арифметическая прогрессия длины n .*

Теорему 46 называют “конечной” версией теоремы Ван дер Вардена, а функцию $W(n, r)$ принято называть *функцией Ван дер Вардена*. Сначала мы обсудим известные верхние оценки функции Ван дер Вардена, а затем – нижние.

Оригинальное доказательство теоремы Ван дер Вардена дает очень слабые верхние оценки величины $W(n, r)$ даже при $r = 2$. Сформулируем данный результат более подробно. Определим последовательность функций $f_i: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $i \geq 2$, следующим образом:

$$f_2(n) = 2n, \quad f_{i+1}(n) = (\underbrace{f_i \circ \dots \circ f_i}_n)(1).$$

Ясно, что $f_3(n) = 2^n$, а $f_4(n)$ – башня из n двоек. *Функцией Аккермана* называется величина $A(n) = f_n(n)$. Из оригинального доказательства теоремы 46 следует, что $W(n, 2) \leq A(n)$, $n \geq 3$. Однако функция Аккермана не является примитивно-рекурсивной (более подробно о этом понятии см., например, [90]). Первая примитивно-рекурсивная оценка величины $W(n, 2)$ была получена лишь в 1988 г. С. Шелахом (см. [91]). Рассмотрим следующую функцию $S(n)$: $S(1) = 2$, а $S(n) = f_4(S(n-1))$. Шелак доказал, что существует такая абсолютная константа $C > 0$, что для любого $n \geq 3$ выполнено неравенство

$$W(n, 2) \leq S(Cn).$$

Наилучшие, на сегодняшний день, верхние оценки функции Ван дер Вардена получаются применением результатов из задачи о максимальном размере множества из начального отрезка натурального ряда, не содержащего длинных арифметических прогрессий. Введем обозначение

$$a_n(N) = N^{-1} \max\{|A| : A \subset \{1, \dots, N\}, A \text{ не содержит арифметических прогрессий длины } n\}.$$

Как величина $a_n(N)$ связана с $W(n, r)$? Пусть множество $\{1, \dots, N\}$ покрашено в r цветов произвольным образом. Тогда найдется цвет, в который покрашено не менее чем N/r чисел. Если к тому же $N/r > a_n(N)N$, то такое множество одноцветных чисел обязательно будет содержать арифметическую прогрессию длины n . Таким образом, *если $a_n(N) < r^{-1}$, то $W(n, r) \leq N$* .

Мы не будем обсуждать историю результатов относительно величины $a_n(N)$, отсылая читателя к обзору [92], а выделим лишь наилучшие из известных результатов. Наиболее сильная верхняя оценка величины $a_3(N)$ была получена Ж. Бургейном в 2008 г. (см. [93]).

ТЕОРЕМА 47 (Ж. Бургейн [93]). *Для достаточно больших N выполняется неравенство*

$$a_3(N) \leq \frac{(\log_2 \log_2 N)^2}{(\log_2 N)^{2/3}}.$$

Из данной теоремы вытекает следующая оценка величины $W(3, r)$:

$$W(3, r) \leq 2^{8r^2 \ln^3 r}. \quad (90)$$

Наилучшая же верхняя оценка для $a_n(N)$ в общем случае была получена Т. Гауэрсом (см. [94]) в 2001 г.

ТЕОРЕМА 48 (Т. Гауэрс [94]). *Для любых $N \geq n \geq 4$ выполняется неравенство*

$$a_n(N) \leq \frac{1}{(\log_2 \log_2 N)^{c_n}},$$

где $c_n = 2^{-2^{n+9}}$.

Из теоремы 48 мы получаем наилучшую в общем случае верхнюю оценку функции Ван дер Вардена $W(n, r)$:

$$W(n, r) \leq 2^{r^{2^{2^{n+9}}}}. \quad (91)$$

Прежде чем перейти к нижним оценкам функции Ван дер Вардена, приведем несколько точных результатов относительно $W(n, r)$ при малых значениях параметров n и r .

В 1969 г. В. Хватал (см. [95]) нашел первые два значения $W(n, 2)$, а также $W(3, 3)$:

$$W(3, 2) = 9, \quad W(4, 2) = 35, \quad W(3, 3) = 27.$$

В 1978 г. Р. Стивенс и Р. Шантарам (см. [96]) доказали, что $W(5, 2) = 178$, а в 1979 г. М. Билер и П. О'Нил вычислили (см. [97]), что $W(3, 4) = 76$. Оценки значений $W(n, r)$ при других малых значениях параметров могут быть найдены, например, в работе [98].

Обсудим теперь асимптотические нижние оценки функции Ван дер Вардена. Первая нетривиальная нижняя оценка для $W(n, r)$ была получена П. Эрдешем и Р. Радо в 1952 г. (см. [99]). Они доказали, что

$$W(n, r) \geq \sqrt{2(n-1)r^{n-1}}. \quad (92)$$

В 1960 г. эта оценка для больших (по сравнению с n) значений r была улучшена Л. Мозером (см. [100]), который обосновал неравенство

$$W(n, r) \geq nr^{C \ln r} \quad (93)$$

с некоторой абсолютной константой $C > 0$. Результат Эрдеша и Радо (92) был асимптотически улучшен В. Шмидтом (см. [101]) в 1962 г. он доказал существование такой абсолютной константы $c > 0$, что для всех $n \geq 3$, $r \geq 2$ выполнено

$$W(n, r) \geq r^{n - c\sqrt{n \ln n}}. \quad (94)$$

В частном случае, когда n – простое число, а $r = 2$, Э. Берлекамп установил (см. [102]) соотношение

$$W(n+1, 2) > n \cdot 2^n. \quad (95)$$

Отметим, что результат (95) до сих пор не улучшен даже для простых n .

Последние наилучшие нижние оценки в задаче о $W(n, r)$ были получены с помощью применения вероятностных методов в теории раскрасок гиперграфов. Следствием из теоремы 11 (см. п. 3.1) Эрдеша и Ловаса явилась следующая нижняя оценка величины $W(n, r)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. Для любых $n \geq 3$, $r \geq 2$

$$W(n, r) \geq \frac{r^{n-1}}{4n} \left(1 - \frac{1}{n}\right). \quad (96)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть заданы $n \geq 3$ и $r \geq 2$. Пусть также $N \geq n$ — произвольное натуральное число. Рассмотрим гиперграф $H_N = (V_N, E_N)$: $V_N = \{1, 2, \dots, N\}$, а E_N — это совокупность всех арифметических прогрессий длины n , которые содержатся в множестве V_N . Ясно, что H_N — n -однородный гиперграф. Из построения также вытекает, что для каждого N гиперграф H_N вложен в гиперграф H_{N+1} (в том смысле, что $V_N \subset V_{N+1}$ и $E_N \subset E_{N+1}$). Тогда

$$\chi(H_N) \leq \chi(H_{N+1}).$$

Далее, из определения величины $W(n, r)$ следует, что

$$W(n, r) = \min\{N : \chi(H_N) > r\}.$$

Рассмотрим произвольное число $x \in V_N$. Сколько арифметических прогрессий длины n из множества $\{1, 2, \dots, N\}$ содержат x ? Каждая такая прогрессия однозначно определяется порядковым номером x в этой прогрессии, а также разностью прогрессии. Порядковый номер может меняться от 1 до n , а разность — от 1 до $(N-1)/(n-1)$. Таким образом, для любой вершины $x \in V_N$ ее степень в гиперграфе H_N не превосходит $n(N-1)/(n-1)$. Теорема 11 утверждает, что если степень любой вершины n -однородного гиперграфа не превосходит $r^{n-1}/(4n)$, то такой гиперграф является r -раскрашиваемым. Следовательно, если выполняется неравенство

$$N \leq \frac{r^{n-1}}{4n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + 1,$$

то $\chi(H_N) \leq r$. Из данного соотношения получаем окончательную оценку функции Ван дер Вардена:

$$W(n, r) \geq \frac{r^{n-1}}{4n} \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Утверждение 6 доказано.

Оценка (96), очевидно, асимптотически улучшает предыдущий результат Шмидта (94). Заметим, что константа $1/4$ в правой части (96) может быть заменена на $1/e$. Подробнее об этом можно прочитать, например, в книге [103].

В 1990 г. Сабо получил (см. [50]) более сильную нижнюю оценку $W(n, 2)$, нежели (96).

ТЕОРЕМА 49 (З. Сабо [50]). Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство

$$W(n, 2) \geq 2^n n^{-\varepsilon}. \quad (97)$$

Доказательство теоремы 49 опирается на теорему 12 о раскрасках простых гиперграфов. Идея состоит в том, чтобы использовать ту же случайную раскраску для раскрашивания гиперграфа H_N (см. определение в доказательстве утверждения 6), ребрами которого являются арифметические прогрессии. Безусловно, H_N не является простым, но в некотором смысле близок к нему.

В целом, результат (96) был улучшен Шабановым в 2010 г. в работе [77].

ТЕОРЕМА 50 (Д. А. Шабанов [77]). *Для любых $n \geq 3$, $r \geq 2$ выполнено неравенство*

$$W(n, r) \geq \frac{\sqrt{6} - 2}{4} \frac{r^{n-1}}{\sqrt{n \ln n}} \left(1 - \frac{1}{n}\right). \quad (98)$$

Несложно понять, что оценка (98) улучшает оценку Эрдеша и Ловаса (96) при $n \geq 15$. Но в то же время (98) асимптотически хуже результата Сабо (97), если $r = 2$. Доказательство теоремы 50 полностью аналогично доказательству утверждения 6, только вместо теоремы 11 Эрдеша и Ловаса следует воспользоваться результатом Шабанова (78).

Наиболее сильная асимптотическая оценка функции Ван дер Вардена $W(n, r)$ в случае, когда r не слишком велико по сравнению с n , была доказана Шабановым в работе [104].

ТЕОРЕМА 51 (Д. А. Шабанов [104]). *Существует такое натуральное число n_0 , что для всех $n \geq n_0$ и $r \geq 2$ выполняется неравенство*

$$W(n, r) \geq r^{n-1} n^{-4} \left\lfloor \sqrt{\ln n / \ln(2 \ln n)} \right\rfloor^{-1} 15^{-\left\lfloor \sqrt{\ln n / \ln(2 \ln n)} \right\rfloor^{-1}} \left(1 - \frac{1}{n}\right). \quad (99)$$

Сравним полученную оценку (99) с ранее известными результатами. Ясно, что (99) асимптотически лучше предыдущей оценки (98). При $r = 2$ оценка (99) имеет тот же вид, что и оценка Сабо (97): $2^n n^{-|\varepsilon(n)|}$, где $\varepsilon(n) = o(1)$ при $n \rightarrow \infty$. В отличие от результата Сабо, теорема 51 дает явный вид порядка убывания бесконечно малой величины:

$$\varepsilon(n) = \Theta((\ln \ln n / \ln n)^{1/2}).$$

Кроме того, из доказательства Сабо (см. [50]) следует, что величина $\varepsilon(n)$ имеет порядок роста $\Omega((\ln n)^{-1/4})$. Таким образом, мы можем утверждать, что (99) асимптотически лучше, чем (97).

Остается сравнить (99) с результатом Мозера (93). Ясно, что при $C \ln r \geq n$ (где C – константа, участвующая в (93)) оценка (93) асимптотически лучше, чем (99). Но, например, если

$$C \ln r \leq n - 1 - 2 \log_2 n,$$

то, наоборот, оценка (99) становится лучше. В итоге, можно утверждать, что результат Мозера (93) лучше результата Шабанова (99) только при экспоненциально больших (по сравнению с n) значениях параметра r .

Завершим обсуждение задачи о функции Ван дер Вардена формулировками гипотез, которые сформулировали П. Эрдеш и Р. Грэхем. Начнем с гипотезы Грэхема, которую он сформулировал в 1984 г.

ГИПОТЕЗА 5 (Р. Грэхем [105]). Для любого $n \geq 3$ выполнено

$$W(n, 2) < 2^{n^2},$$

число двоек равно n (башня из n двоек).

Данная гипотеза была доказана Гауэрсом (см. (91)). В 1993 г. Эрдеш высказал еще одну гипотезу относительно верхней границы для $W(n, 2)$.

ГИПОТЕЗА 6 (П. Эрдеш [106]). Для любого $n \geq 3$ выполнено

$$W(n, 2) < 2^{2^n}.$$

Наконец, в 2007 г. Грэхем высказал еще более сильную гипотезу.

ГИПОТЕЗА 7 (Р. Грэхем [107], [108]). Для любого $n \geq 3$ выполнено

$$W(n, 2) < 2^{n^2}.$$

Гипотезы 6 и 7 до сих пор не удалось ни доказать, ни опровергнуть.

5. Доказательства некоторых оценок в задаче Эрдеша–Хайнала

В этом разделе будут представлены доказательства некоторых оценок величины $m(n, r)$. Данные доказательства не являются длинными или сложными технически, они основаны на применении вероятностных приемов, развитие которых и позволяло улучшать результаты в задаче Эрдеша–Хайнала.

5.1. Оценки Эрдеша. В теореме 52 будут доказаны первые оценки (6) величины $m(n, r)$, полученные П. Эрдешем. Данная теорема – один из наиболее ярких примеров того, что простые вероятностные соображения зачастую позволяют получать очень сильные комбинаторные результаты.

ТЕОРЕМА 52. Для любых $n \geq 3$, $r \geq 2$ выполняются неравенства

$$m(n, r) \geq r^{n-1} + 1, \quad (100)$$

$$m(n, r) \leq \frac{e}{2} n^2 (r-1) r^{n-1} (\ln r) \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right). \quad (101)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства оценки (100) достаточно показать, что любой n -однородный гиперграф $H = (V, E)$ с условием $|E| \leq r^{n-1}$ обладает правильной r -цветной раскраской. Зафиксируем подобный гиперграф H . Идея Эрдеша состояла в том, чтобы рассмотреть случайную раскраску множества вершин и оценить вероятность того, что она не является правильной. Если эта вероятность окажется строго меньше единицы, то мы сможем утверждать существование правильной раскраски для H и теорема будет доказана. Эрдеш использовал случайную раскраску с равномерным распределением (вероятность любой вершинной раскраски гиперграфа одна и та же), но, вообще говоря, можно пытаться действовать и по-другому. Подробнее об этом мы будем говорить в п. 5.2.

Формализуем идею Эрдеша. Без ограничения общности можно считать, что множество вершин V есть $\{1, 2, \dots, w\}$. Рассмотрим набор независимых случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_w$, имеющих равномерное распределение на множестве $C = \{1, 2, \dots, r\}$. Случайный вектор $\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_w)$ можно интерпретировать как случайную раскраску V в r цветов (вершине i сопоставляется цвет ξ_i). Тогда для каждого ребра $f \in E$

$$P(f \text{ одноцветно в } \vec{\xi}) = P(\exists u \in C : \forall s \in f \ \xi_s = u) = r^{1-n}.$$

Из принципа включений и исключений получаем неравенство

$$\begin{aligned} &P(\text{в раскраске } \vec{\xi} \text{ у } H \text{ есть одноцветные ребра}) \\ &\leq \sum_{f \in E} P(f \text{ одноцветно в } \vec{\xi}) - P(V \text{ одноцветно в } \vec{\xi}) = |E|r^{1-n} - r^{1-w} < 1. \end{aligned}$$

Следовательно, с положительной вероятностью случайная раскраска $\vec{\xi}$ будет правильной раскраской вершин гиперграфа H . Неравенство (100) обосновано.

Для доказательства оценки (101) достаточно доказать существование n -однородного гиперграфа $H = (V, E)$, для которого не существует правильной r -цветной раскраски и число ребер которого равно правой части неравенства (101). Как и при доказательстве нижней оценки, искомую комбинаторную конфигурацию мы будем искать как реализацию случайного объекта. Для нижней оценки нам была нужна правильная раскраска, и мы вслед за Эрдешем рассматривали случайную раскраску. Сейчас нам нужен специальный гиперграф, и тут Эрдеш предложил рассматривать случайный n -однородный гиперграф с m ребрами, а дальше оценивать вероятность того, что он является r -раскрашиваемым. Если эта вероятность окажется меньше единицы при некотором m , то мы и получим оценку $m(n, r) \leq m$.

Перейдем к формальным конструкциям. Пусть V – произвольное множество вершин с условием $|V| = v$. Рассмотрим S – случайное n -элементное подмножество V , которое имеет равномерное распределение на множестве $\binom{V}{n}$. Пусть χ – произвольная раскраска V в r цветов, всего таких раскрасок r^v . Обозначим через v_i , $i = 1, \dots, r$, количество вершин i -го цвета в раскраске χ . Тогда

$$P(S \text{ одноцветно в } \chi) = \frac{\binom{v_1}{n} + \dots + \binom{v_r}{n}}{\binom{V}{n}}.$$

Сумма $\binom{v_1}{n} + \dots + \binom{v_r}{n}$ оценивается снизу величиной $r \binom{\lfloor v/r \rfloor}{n}$. Доказательство этого комбинаторного факта можно найти, например, в [109]. Таким образом, для любой раскраски χ множества V выполнено неравенство

$$P(S \text{ одноцветно в } \chi) \geq \frac{r \binom{\lfloor v/r \rfloor}{n}}{\binom{V}{n}} = p. \quad (102)$$

Пусть $S_1, \dots, S_m$ – независимые в совокупности случайные n -элементные подмножества V с равномерным распределением на множестве $\binom{V}{n}$. Возьмем m равным $\lceil v(\ln r)/p \rceil + 1$. Рассмотрим случайный гиперграф $H = (V, E)$, где $E = \{S_1, \dots, S_m\}$. Тогда в силу (102) получаем

$$\begin{aligned} & \text{P(для } H \text{ существует правильная } r\text{-цветная раскраска)} \\ & \leq \sum_{\chi} \text{P}(\chi - \text{правильная раскраска } H) \\ & = \sum_{\chi} \prod_{i=1}^m \text{P}(S_i \text{ неодноразноцветно в } \chi) \leq r^v (1-p)^m \leq r^v e^{-pm} = e^{v \ln r - pm} < 1. \end{aligned}$$

Следовательно, с положительной вероятностью для случайного гиперграфа H не существует правильной r -цветной раскраски. Таким образом, существует n -однородный гиперграф с m ребрами, хроматическое число которого превышает r , и, значит, искомая величина $m(n, r)$ оценивается сверху величиной $m = \lceil v(\ln r)/p \rceil + 1$ для любого значения параметра v . Осталось оптимальным образом его подобрать. Имеет место цепочка неравенств

$$\begin{aligned} p & \geq r \prod_{i=0}^{n-1} \frac{v/r - 1 - i}{v - i} = r^{1-n} \prod_{i=0}^{n-1} \frac{1 - (i+1)r/v}{1 - i/v} \\ & \geq r^{1-n} \prod_{i=0}^{n-1} \exp \left\{ -\frac{(i+1)r}{v - (i+1)r} + \frac{i}{v} \right\} \geq r^{1-n} \prod_{i=0}^{n-1} \exp \left\{ -\frac{(i+1)r}{v - nr} + \frac{i}{v} \right\} \\ & \geq r^{1-n} \exp \left\{ -\frac{n(n-1)(r-1)}{2(v-nr)} - \frac{rn}{v-nr} - \frac{n^3 r}{2v(v-nr)} \right\}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$m(n, r) \leq v \frac{\ln r}{p} + 2 \leq r^{n-1} (\ln r) v \exp \left\{ \frac{n(n-1)(r-1)}{2(v-nr)} + \frac{rn}{v-nr} + \frac{n^3 r}{2v(v-nr)} \right\} + 2. \quad (103)$$

Функция $xe^{\alpha/x}$ достигает своего минимума в точке $x = \alpha$, поэтому асимптотически оптимальным значением v будет $n(n-1)(r-1)/2$. При таком выборе v полученная оценка (103) примет искомый вид (101). Теорема 52 доказана.

Верхнюю оценку (101) можно доказать и по-другому, используя теорию систем общих представителей (см. п. 4.1). Приведем краткий набросок такого доказательства. Пусть V – произвольное множество с условием $|V| = v$, а $\chi_1, \dots, \chi_{r^v}$ – все r -цветные раскраски множества V . Обозначим через $\mathcal{R}$ множество всех n -элементных подмножеств множества V , а через $\mathcal{M}_i$, $i = 1, \dots, r^v$, множество всех элементов $\mathcal{R}$, которые являются одноцветными в раскраске χ_i . Пусть E – система общих представителей для совокупности $\{\mathcal{M}_i\}_{i=1}^{r^v}$, тогда $H = (V, E)$ – n -однородный гиперграф, причем H не является r -раскрашиваемым. Действительно, n -однородность H очевидна, и если задана произвольная r -цветная раскраска χ_i множества V , то E содержит элемент $e \in \mathcal{M}_i$, который является одноцветным в χ_i . Таким образом, в любой r -цветной раскраске вершин гиперграфа H содержит одноцветное ребро. Следовательно, $\chi(H) > r$

и $m(n, r) \leq |E|$. Согласно теореме 40 из п. 4.1 систему общих представителей E можно выбрать удовлетворяющей условию

$$|E| \leq \frac{|\mathcal{R}|}{\min_i |\mathcal{M}_i|} \left(\max \left(1, \ln \frac{r^v \min_i |\mathcal{M}_i|}{|\mathcal{R}|} \right) + 1 \right) + 1.$$

Все, что остается сделать, – выбрать оптимальным образом параметр v , а затем оценить асимптотический рост полученного выражения. Отметим, что оптимальным выбором v будет тот же, что и в теореме 52: $v \sim n(n-1)(r-1)/2$.

5.2. Оценка Радхакришнана–Сринивасана и ее обобщение. В теореме 53 мы докажем оценку (11) величины $m(n, r)$. Впервые данная оценка была получена Дж. Радхакришнаном и А. Сринивасаном (см. [15]) в частном случае $r = 2$. В общем же случае оценка была обоснована Д. А. Шабановым (см. [23]).

ТЕОРЕМА 53 (Д. А. Шабанов [23]). *Для всех натуральных $n \geq 2$, $r \geq 2$ выполняется неравенство*

$$m(n, r) \geq (\sqrt{3} - 1) \left(\frac{n}{\ln n} \right)^{1/2} r^{n-1}. \quad (104)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для обоснования неравенства (104) достаточно показать, что для любого n -однородного гиперграфа $H = (V, E)$, имеющего менее $(\sqrt{3} - 1) \sqrt{n/\ln n} r^{n-1}$ ребер, существует правильная r -цветная раскраска множества вершин. Как и в предыдущей теореме 52, будем доказывать существование подобной раскраски, рассматривая случайную раскраску.

Напомним, что Эрдеш в теореме 52 использовал равномерную случайную r -цветную раскраску множества вершин. Для дальнейшего улучшения оценки $m(n, r)$ вполне естественно рассматривать случайную раскраску с неравномерным распределением вероятностей, зависящим от “геометрической” структуры самого гиперграфа H . Построение такой раскраски с помощью рандомизированных алгоритмов впервые было предложено Й. Беком (см. [12], [13]), а затем модернизировано Дж. Спенсером (см. [14]), а также Дж. Радхакришнаном и А. Сринивасаном (см. [15]). На основе этих идей были доказаны оценки (3) и (4) величины $m(n)$. Мы приведем описание этих алгоритмов сразу для случая произвольного числа цветов (данное обобщение было предложено в работе [23]), а затем перейдем к формализации предложенных конструкций и доказательству теоремы 53.

Рандомизированный алгоритм Бека–Спенсера. Алгоритм состоит из двух шагов. На *первом шаге* мы раскрашиваем вершины гиперграфа $H = (V, E)$ случайным образом согласно равномерной случайной раскраске: с вероятностью $1/r$ независимо присваиваем каждой вершине один из r цветов. Назовем получившуюся случайную раскраску *первой раскраской*.

В первой раскраске могут появиться одноцветные ребра и “опасные” вершины. Вершину $v \in V$ назовем *опасной*, если существует одноцветное в первой раскраске ребро $f \in E$, содержащее v . На *втором шаге* алгоритма мы случайным образом “подправим” первую раскраску путем перекрашивания опасных вершин. Перекраска осуществляется следующим образом: если v – опасная вершина, то для каждого $i = 1, \dots, r$ с некоторой вероятностью p меняем

цвет v на i (заметим, что i может совпадать с цветом v в первой раскраске), а с вероятностью $1 - rp$ не меняем ее цвет. Результат подобного случайного перекрашивания назовем *второй раскраской*.

Остается только оценить вероятность появления одноцветного ребра во второй раскраске в зависимости от нужного нам количества ребер гиперграфа H , а также выбора параметра p . Если она окажется меньше единицы, то мы докажем, что H является r -раскрашиваемым, и получим нижнюю оценку величины $m(n, r)$.

Рандомизированный алгоритм Радхакришнана–Сринивасана. Данный алгоритм использует идеи и структуру предыдущего. Он также состоит из двух шагов. *Первый шаг* полностью повторяется: с вероятностью $1/r$ независимо присваиваем каждой вершине один из r цветов. Получившуюся случайную раскраску назовем *первой раскраской*. В ней могут появиться одноцветные ребра. Как и в алгоритме Бека–Спенсера, на втором шаге мы будем случайно перекрашивать вершины тех ребер, которые были одноцветными в первой раскраске. Отличие же состоит в том, чтобы не перекрашивать все опасные вершины подряд. Ведь для неоднородности ребра достаточно, чтобы перекрасилась только одна вершина. Радхакришнан и Сринивасан предложили перекрашивать опасные вершины в некотором (случайном) порядке, при этом ответ на вопрос о том, следует ли перекрашивать текущую вершину, зависит от перекраски предыдущих вершин.

Пусть σ – случайная нумерация множества вершин V гиперграфа H с равномерным распределением. На *втором шаге* алгоритма (*процессе перекраски*) мы будем рассматривать вершины по очереди согласно нумерации σ . Пусть $v \in V$ – текущая рассматриваемая вершина. Допустим, существует ребро $f \in E$, удовлетворяющее условиям:

- (a) f содержит v ,
- (b) f одноцветно в первой раскраске,
- (c) еще ни одна из вершин ребра f , которые рассматривались до v , не сменяла свой цвет в процессе перекраски.

Тогда для v осуществляется случайная перекраска: для каждого $i = 1, \dots, r$ с некоторой вероятностью p меняем цвет v на i (i может и совпадать с цветом v в первой раскраске), а с вероятностью $1 - rp$ не меняем ее цвет. Если же на момент рассмотрения v подобного ребра f нет, то мы пропускаем вершину v и переходим к следующей вершине согласно нумерации σ .

В результате последовательного рассмотрения всех вершин гиперграфа получается некоторая случайная раскраска, которую мы назовем *второй раскраской*. Как и в предыдущем случае, нам остается оценить вероятность появления одноцветного ребра во второй раскраске.

Формальная конструкция рандомизированного алгоритма. Приведем формальную конструкцию через независимые случайные величины для рандомизированного алгоритма, описанного выше. Пусть фиксирован n -однородный гиперграф $H = (V, E)$ с m ребрами (т. е. $|E| = m$). Введем обозначение для множества цветов $C = \{1, \dots, r\}$. Без ограничения общности можно считать, что $V = \{1, \dots, w\}$.

Пусть на некотором вероятностном пространстве задан следующий набор независимых в совокупности случайных функций:

- 1) случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_w$, имеющие равномерное распределение на множестве C ;
- 2) одинаково распределенные случайные величины $\eta_1, \dots, \eta_w$, принимающие значения $1, \dots, r$ с одной и той же вероятностью p и значение 0 с вероятностью $1 - rp$;
- 3) случайная перестановка $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_w)$ множества V (случайная нумерация вершин гиперграфа H), имеющая равномерное распределение на группе перестановок S_w , т. е. для любой $\tilde{\sigma} \in S_w$

$$P(\sigma = \tilde{\sigma}) = \frac{1}{w!}.$$

Пусть $e \in E$ – произвольное ребро H , а $i \in e$ – произвольная вершина этого ребра. Обозначим через $D_e^i(u)$ и $\mathcal{D}_i$ следующие события:

$$D_e^i(u) = \left\{ \sum_{s \in e} I\{\xi_s = u\} (1 - I\{\sigma_s < \sigma_i, \eta_s \notin \{0, u\}\}) = n \right\}, \quad (105)$$

$$\mathcal{D}_i = \bigcup_{u \in C} \bigcup_{e \in E: i \in e} D_e^i(u).$$

Для каждого $i = 1, \dots, w$ положим

$$\zeta_i = \xi_i I\{\overline{\mathcal{D}_i} \cup \{\eta_i = 0\}\} + \eta_i I\{\mathcal{D}_i \cap \{\eta_i \neq 0\}\}.$$

Несложно проверить, что случайные величины ζ_i принимают только значения из C , поэтому случайный вектор $\vec{\zeta} = (\zeta_1, \dots, \zeta_w)$ можно интерпретировать как случайную раскраску множества V в r цветов (вершине i сопоставляется цвет ζ_i).

Ясно, что раскраска $\vec{\zeta}$ и есть вторая раскраска из алгоритма Радхакришнана–Сринивасана.

Продолжение доказательства теоремы. Обозначим через $\mathcal{F}$ событие, заключающееся в том, что случайная раскраска $\vec{\zeta}$ не является правильной раскраской гиперграфа H , т. е.

$$\mathcal{F} = \bigcup_{e \in E} \bigcup_{u \in C} \bigcap_{s \in e} \{\zeta_s = u\}. \quad (106)$$

Мы покажем, что имеет место следующая оценка вероятности данного события:

$$P(\mathcal{F}) \leq mr^{1-n}(1-q)^n + m^2 r^{2-2n} q, \quad (107)$$

где $q = (r-1)p$.

Для удобства введем обозначения для некоторых событий. Пусть e – ребро гиперграфа H , а $u \in C$, тогда положим

$$A_e(u) = \bigcap_{s \in e} \{\xi_s = u, \zeta_s = u\},$$

$$C_e(u) = \bigcap_{s \in e} \{\zeta_s = u\} \cap \left(\bigcup_{s \in e} \{\xi_s \neq u\} \right). \quad (108)$$

Для доказательства неравенства (107) нам понадобятся четыре леммы.

ЛЕММА 1. Пусть $e \in E$ – произвольное ребро гиперграфа, а $u \in C$. Тогда имеет место равенство

$$P(A_e(u)) = r^{-n}(1-q)^n. \quad (109)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала проверим равенство

$$A_e(u) = \bigcap_{s \in e} \{\xi_s = u, \eta_s \in \{0, u\}\}. \quad (110)$$

Для этого достаточно показать, что для произвольной перестановки $\tilde{\sigma}$ из S_w следующие события совпадают:

$$A_1 = A_e(u) \cap \{\sigma = \tilde{\sigma}\}, \quad A_2 = \bigcap_{s \in e} \{\xi_s = u, \eta_s \in \{0, u\}, \sigma = \tilde{\sigma}\}.$$

Для любого s из условия $\eta_s \in \{0, \xi_s\}$ следует, что $\zeta_s = \xi_s$, поэтому $A_2 \subset A_1$. Докажем обратное включение. Предположим, что A_1 выполнено, но в e есть вершины, для которых $\eta_s \notin \{0, u\}$ (т. е. A_2 не имеет места). Рассмотрим первую такую вершину v по нумерации $\tilde{\sigma}$. Для нее, как нетрудно видеть, выполняется событие $\mathcal{D}_v$ и получается, что $\zeta_v = \eta_v \neq u = \xi_v$. Данный факт противоречит событию A_1 . Таким образом, если выполнено событие A_1 , то для любого $s \in e$ величина η_s принадлежит $\{0, u\}$, т. е. $A_1 \subset A_2$. Равенство (110) установлено.

Из (110) следует, что для любого ребра e и любого $u \in C$ выполняется искомое равенство (109):

$$P(A_e(u)) = \prod_{s \in e} P(\xi_s = u, \eta_s \in \{0, u\}) = r^{-n}(1-q)^n.$$

Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. Пусть $e \in E$ – произвольное ребро гиперграфа, $u \in C$, а $\tilde{\sigma}$ – произвольная перестановка из S_w . Тогда имеет место соотношение

$$C_e(u) \cap \{\sigma = \tilde{\sigma}\} \subset \bigcup_{a \in C: a \neq u} \bigcup_{\substack{f \in E: \\ f \neq e, |f \cap e| = 1}} B_{ef}(u, a, \tilde{\sigma}), \quad (111)$$

где событие $B_{ef}(u, a, \tilde{\sigma})$ определяется равенством

$$B_{ef}(u, a, \tilde{\sigma}) = \bigcap_{s \in e} \{\zeta_s = u\} \cap \bigcap_{s \in e} \{\tilde{\sigma}_s > \sigma_v, \xi_s \neq u\} \cap \{\sigma = \tilde{\sigma}\} \cap D_f^v(a),$$

а v – единственная вершина из $f \cap e$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из события $C_e(u)$ следует, что для некоторых вершин $s \in e$ выполнено $\xi_s \neq u$. Пусть v – последняя по нумерации $\tilde{\sigma}$ вершина ребра e с таким условием. Тогда для всех вершин $s \in e$ выполнено $\{\tilde{\sigma}_s > \tilde{\sigma}_v, \xi_s \neq u\}$.

Раз $\xi_v \neq u = \zeta_v$, то, во-первых, $\eta_v = \zeta_v = u$, а во-вторых, должно выполняться событие $\mathcal{D}_v$, которое в свою очередь влечет выполнение одного из событий $D_f^v(a)$, где f – некоторое ребро, содержащее вершину v , а цвет a не совпадает с u . Остается показать, что $|f \cap e| = 1$.

Предположим, что есть еще одна вершина $z \in f \cap e$, помимо v . Тогда из события $D_f^v(a)$ следует, что $\xi_z = \xi_v = a$, а из события $C_e(u)$ вытекает равенство $\zeta_z = \zeta_v = u$. Значит, $\zeta_z = \eta_z = u$. В силу того, что v – последняя по нумерации $\tilde{\sigma}$ вершина ребра e с условием $\xi_v \neq u$, получаем, что $\tilde{\sigma}_z < \tilde{\sigma}_v$. Рассмотрим сумму из определения события $D_f^v(a)$ (см. (105)):

$$D_f^v(a) \cap \{\sigma = \tilde{\sigma}\} = \left\{ \sum_{s \in f} I\{\xi_s = a\} (1 - I\{\tilde{\sigma}_s < \tilde{\sigma}_v, \eta_s \notin \{0, a\}\}) = n \right\}.$$

Слагаемое $s = z$, очевидно, дает нулевой вклад в сумму. Таким образом, общая сумма не может быть равна n , т. е. не выполняется событие $D_f^v(a)$. Мы получили противоречие. Следовательно, мощность пересечения ребер e и f равна единице. Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. Пусть e и f – два ребра гиперграфа H , причем $|f \cap e| = 1$. Обозначим через v вершину из пересечения этих ребер. Пусть перестановка $\tilde{\sigma}$ множества V такова, что $|\{s \in f : \tilde{\sigma}_s < \tilde{\sigma}_v\}| = t$, а $|\{s \in e : \tilde{\sigma}_s < \tilde{\sigma}_v\}| = d$. Тогда имеет место следующая оценка вероятности события $B_{ef}(u, a, \tilde{\sigma})$:

$$P(B_{ef}(u, a, \tilde{\sigma})) \leq r^{1-2n} p (1-q)^t (1+q)^d P(\sigma = \tilde{\sigma}). \quad (112)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнено событие $B_{ef}(u, a, \tilde{\sigma})$. Введем обозначения: $f_1 = \{s \in f : \tilde{\sigma}_s < \tilde{\sigma}_v\}$, $f_2 = \{s \in f : \tilde{\sigma}_s > \tilde{\sigma}_v\}$, $e_1 = \{s \in e : \tilde{\sigma}_s < \tilde{\sigma}_v\}$, $e_2 = \{s \in e : \tilde{\sigma}_s > \tilde{\sigma}_v\}$. Ввиду события $D_f^v(a)$, для всех вершин s ребра f выполнено $\{\xi_s = a\}$. Кроме того, для всех вершин $s \in f_1$ величины η_s должны принимать значения 0 или a . Из условия $\bigcap_{s \in e} \{\tilde{\sigma}_s > \tilde{\sigma}_v, \xi_s \neq u\}$ получаем, что для всех $s \in e_2$ выполнено $\xi_s = u$. Таким образом,

$$\begin{aligned} B_{ef}(u, a, \tilde{\sigma}) \subset \bigcap_{a \in f_1} \{\xi_s = a, \eta_s \in \{0, a\}\} \cap \bigcap_{a \in f_2} \{\xi_s = a\} \cap \{\xi_v = a, \eta_v = u\} \\ \cap \bigcap_{a \in e_1} \{\zeta_s = u\} \cap \bigcap_{a \in e_2} \{\xi_s = u\} \cap \{\sigma = \tilde{\sigma}\}. \end{aligned} \quad (113)$$

В силу (113) и того факта, что

$$\{\zeta_s = u\} \subset \{\{\xi_s = u\} \sqcup \{\xi_s \neq u, \eta_s = u\}\},$$

получаем окончательное соотношение

$$\begin{aligned} B_{ef}(u, a, \tilde{\sigma}) \subset \bigcap_{a \in f_1} \{\xi_s = a, \eta_s \in \{0, a\}\} \cap \bigcap_{a \in f_2} \{\xi_s = a\} \cap \{\xi_v = a, \eta_v = u\} \\ \cap \bigcap_{a \in e_1} \{\{\xi_s = u\} \sqcup \{\xi_s \neq u, \eta_s = u\}\} \cap \bigcap_{a \in e_2} \{\xi_s = u\} \cap \{\sigma = \tilde{\sigma}\}. \end{aligned} \quad (114)$$

События в правой части (114) независимы в совокупности, поэтому получаем искомую оценку вероятности события $B_{ef}(u, a, \tilde{\sigma})$:

$$\begin{aligned} P(B_{ef}(u, a, \tilde{\sigma})) &\leq \left(\frac{1-q}{r}\right)^t \left(\frac{1}{r}\right)^{n-t-1} \frac{p}{r} \left(\frac{1+q}{r}\right)^d \left(\frac{1}{r}\right)^{n-d-1} P(\sigma = \tilde{\sigma}) \\ &= r^{1-2n} p (1-q)^t (1+q)^d P(\sigma = \tilde{\sigma}). \end{aligned}$$

Неравенство (112) обосновано. Лемма 3 доказана.

ЛЕММА 4. Пусть e и f — два ребра гиперграфа H , причем $|f \cap e| = 1$. Обозначим через v вершину из пересечения этих ребер. Рассмотрим случайные величины $t(\sigma) = |\{s \in f : \sigma_s < \sigma_v\}|$ и $d(\sigma) = |\{s \in e : \sigma_s < \sigma_v\}|$. Тогда для любого $q \in (0, 1)$ имеет место неравенство

$$E(1 - q)^t(1 + q)^d \leq 1. \quad (115)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Несложно понять, что

$$\begin{aligned} E(1 - q)^t(1 + q)^d &= \sum_{\tilde{\sigma} \in S_w} (1 - q)^{t(\tilde{\sigma})}(1 + q)^{d(\tilde{\sigma})} P(\sigma = \tilde{\sigma}) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} (1 + q)^i (1 - q)^k \binom{n-1}{i} \binom{n-1}{k} \frac{(i+k)! (2n-2-i-k)!}{(2n-1)!} \\ &=: M(n-1, q). \end{aligned} \quad (116)$$

Покажем, что имеют место соотношения

$$M(n, q) \leq M(n-1, q) \leq \dots \leq M(0, q) = 1.$$

Действительно, верно следующее равенство, вытекающее из тождества для биномиальных коэффициентов $\binom{n}{i} = \binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1}$:

$$\begin{aligned} M(n, q) &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} (1 + q)^i (1 - q)^k \binom{n-1}{i} \binom{n-1}{k} \frac{(i+k)! (2n-i-k)!}{(2n+1)!} \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{n-1} (1 + q)^i (1 - q)^k \binom{n-1}{i-1} \binom{n-1}{k} \frac{(i+k)! (2n-i-k)!}{(2n+1)!} \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=1}^n (1 + q)^i (1 - q)^k \binom{n-1}{i} \binom{n-1}{k-1} \frac{(i+k)! (2n-i-k)!}{(2n+1)!} \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (1 + q)^i (1 - q)^k \binom{n-1}{i-1} \binom{n-1}{k-1} \frac{(i+k)! (2n-i-k)!}{(2n+1)!}. \end{aligned}$$

Изменив индексы суммирования в последних трех двойных суммах, получаем, что

$$\begin{aligned} M(n, q) &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} (1 + q)^i (1 - q)^k \binom{n-1}{i} \binom{n-1}{k} \frac{(i+k)! (2n-i-k)!}{(2n+1)!} \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} (1 + q)^{i+1} (1 - q)^k \binom{n-1}{i} \binom{n-1}{k} \\ &\quad \times \frac{(i+k+1)! (2n-i-k-1)!}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} (1+q)^i (1-q)^{k+1} \binom{n-1}{i} \binom{n-1}{k} \\
& \quad \times \frac{(i+k+1)! (2n-i-k-1)!}{(2n+1)!} \\
& + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} (1+q)^{i+1} (1-q)^{k+1} \binom{n-1}{i} \binom{n-1}{k} \\
& \quad \times \frac{(i+k+2)! (2n-i-k-2)!}{(2n+1)!}.
\end{aligned}$$

Объединим снова все суммы в одну:

$$M(n, q) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} (1+q)^i (1-q)^k \binom{n-1}{i} \binom{n-1}{k} \frac{(i+k)! (2n-2-i-k)!}{(2n+1)!} \alpha,$$

где

$$\alpha = (2n-i-k)(2n-i-k-1) + 2(i+k+1)(2n-i-k-1) + (i+k+2)(i+k+1)(1-q^2).$$

Величина α , очевидно, не превосходит выражения

$$(2n-i-k)(2n-i-k-1) + 2(i+k+1)(2n-i-k-1) + (i+k+2)(i+k+1) = (2n+1) \cdot 2n$$

при любых i и k . Таким образом,

$$\begin{aligned}
M(n, q) & \leq \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} (1+q)^i (1-q)^k \binom{n-1}{i} \binom{n-1}{k} \frac{(i+k)! (2n-2-i-k)!}{(2n-1)!} \\
& = M(n-1, q).
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что $M(n, q) \leq M(n-1, q) \leq \dots \leq M(0, q) = 1$. Из данной цепочки неравенств и соотношения (116) получаем искомую оценку (115). Лемма 4 доказана.

Завершим доказательство оценки (107). В силу определений (106) и (108) получаем соотношение

$$\mathcal{F} = \bigcup_{u \in C} \bigcup_{e \in E} (A_e(u) \cup C_e(u)). \quad (117)$$

Далее, из лемм 2, 3 и 4 получаем следующую оценку вероятности события $C_e(u)$:

$$\begin{aligned}
P(C_e(u)) & \leq \sum_{a \in C: a \neq u} \sum_{\substack{f \in E: \\ |f \cap e|=1}} \sum_{\tilde{\sigma} \in S_w} P(B_{ef}(u, a, \tilde{\sigma})) \\
& \leq \sum_{a \in C: a \neq u} \sum_{\substack{f \in E: \\ |f \cap e|=1}} \sum_{\tilde{\sigma} \in S_w} r^{1-2n} p (1-q)^{t(\tilde{\sigma})} (1+q)^{d(\tilde{\sigma})} P(\sigma = \tilde{\sigma}) \\
& = r^{1-2n} q \sum_{\substack{f \in E: \\ |f \cap e|=1}} E(1-q)^{t(\sigma)} (1+q)^{d(\sigma)} \leq r^{1-2n} q \sum_{\substack{f \in E: \\ |f \cap e|=1}} 1 \leq m r^{1-2n} q.
\end{aligned} \quad (118)$$

Соединим вместе полученную информацию. Из соотношений (109), (117) и (118) вытекает итоговая оценка вероятности события $\mathcal{F}$:

$$\begin{aligned} P(\mathcal{F}) &\leq \sum_{u \in C} \sum_{e \in E} (P(C_e(u)) + P(A_e(u))) \\ &\leq \sum_{u \in C} \sum_{e \in E} (r^{-n}(1-q)^n + mr^{1-2n}q) = mr^{1-n}(1-q)^n + m^2r^{2-2n}q. \end{aligned}$$

Искомое неравенство (107) обосновано.

Осталось завершить доказательство теоремы 53. Соотношение (107) дает универсальную оценку вероятности события $\mathcal{F}$. Если удастся показать, что $P(\mathcal{F}) < 1$, то с положительной вероятностью случайная раскраска ζ будет правильной раскраской для H . Введем обозначение

$$c = \frac{m}{\sqrt{n/\ln n} r^{n-1}}.$$

В силу изначального выбора гиперграфа H выполнено неравенство $c < \sqrt{3} - 1$. Положим

$$q = \frac{\ln(n/\ln n)}{2n}.$$

Таким образом, $p = q/(r-1) = \ln(n/\ln n)/(2(r-1)n)$. Ясно, что при $r \geq 2$, $n \geq 2$ параметр q лежит между 0 и $1/2$, следовательно, $rp = rq/(r-1) \in (0, 1)$, т. е. выбор параметров корректный.

В итоге, из неравенства (107) получаем, что

$$P(\mathcal{F}) \leq mr^{1-n}(1-q)^n + m^2r^{2-2n}q \leq mr^{1-n}e^{-qn} + m^2r^{2-2n}\frac{\ln n}{2n} = c + \frac{1}{2}c^2 < 1.$$

Следовательно, для произвольного n -однородного гиперграфа, имеющего менее $(\sqrt{3} - 1)\sqrt{n/\ln n} r^{n-1}$ ребер, существует правильная r -цветная раскраска множества вершин. Теорема 53 доказана.

5.3. Нижняя оценка Алона. В теореме 54 будет доказана оценка (9) величины $m(n, r)$, полученная Н. Алонем.

ТЕОРЕМА 54 (Н. Алон [19]). Для любых $n \geq 3$, $r \geq 2$ выполняется неравенство

$$m(n, r) > (n-1) \left\lceil \frac{r}{n} \right\rceil \left\lfloor \frac{n-1}{n} r \right\rfloor^{n-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства теоремы 54 достаточно показать, что любой n -однородный гиперграф $H = (V, E)$ с условием

$$|E| \leq (n-1) \left\lceil \frac{r}{n} \right\rceil \left\lfloor \frac{n-1}{n} r \right\rfloor^{n-1}$$

обладает правильной r -цветной раскраской. Зафиксируем подобный гиперграф H . Без ограничения общности можно считать, что $V = \{1, 2, \dots, v\}$. Рассмотрим набор независимых случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_v$, имеющих равномерное распределение на множестве $C = \{1, 2, \dots, a\}$, где $a = \left\lfloor \frac{n-1}{n} r \right\rfloor$.

Случайный вектор $\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_v)$ можно интерпретировать как случайную раскраску V в a цветов. Тогда для каждого ребра $f \in E$

$$P(f - \text{одноцветно в } \vec{\xi}) = P(\exists u \in C : \forall s \in f \xi_s = u) = a^{1-n}.$$

Рассмотрим случайную величину X , равную количеству одноцветных ребер гиперграфа H в случайной раскраске ξ . Оценим математическое ожидание X :

$$EX = E\left(\sum_{f \in E} I\{f - \text{одноцветно в } \vec{\xi}\}\right) = |E|a^{1-n} \leq (n-1)\left\lceil \frac{r}{n} \right\rceil = (n-1)(r-a).$$

Тогда с положительной вероятностью выполнено неравенство $X \leq (n-1)(r-a)$. Рассмотрим элементарный исход ω , удовлетворяющий данному соотношению. Получается раскраска $(\xi_1(\omega), \dots, \xi_v(\omega))$ множества V в a цветов, в которой число одноцветных ребер не превосходит $(n-1)(r-a)$. Обозначим через $e_1, \dots, e_m$ ($m \leq (n-1)(r-a)$) данные одноцветные ребра и соответственно через $j_1, \dots, j_m$ – первые вершины в этих ребрах. Рассмотрим множество “зарезервированных” цветов $C_1 = \{a+1, \dots, r\}$. Осуществим перекраску вершин $j_1, \dots, j_m$ следующим образом: последовательно по $k = 1, \dots, m$ красим вершину j_k в цвет $a + \lceil k/(n-1) \rceil$ (т.е. если вдруг некоторые вершины совпадают, то перекрашиваем несколько раз). При такой перекраске все ребра $e_1, \dots, e_m$ перестанут быть покрашенными полностью в один из цветов C . В то же время новых одноцветных ребер не появится, потому что для любого $u \in C_1$ вершин цвета u в итоговой раскраске будет не более $n-1$. Таким образом, мы построили правильную r -цветную раскраску множества вершин гиперграфа H . Теорема 54 доказана.

5.4. Оценка Плухара и ее улучшение. В теореме 55 будет доказана оценка (13) величины $m(n, r)$.

ТЕОРЕМА 55 (Д. А. Шабанов [25]). *Для всех натуральных $n \geq 2$, $r \geq 2$ выполняется неравенство*

$$m(n, r) \geq (\pi^{1/r} e^{-1/(12(n-1))}) \frac{1}{e\sqrt{2\pi}} (n-1)^{1/2-1/(2r)} r^{n+2/r}. \quad (119)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся теоремой 29 Плухара (см. [24]). Согласно ей гиперграф является r -раскрашиваемым тогда и только тогда, когда для некоторой нумерации σ множества его вершин в нем нет упорядоченных r -цепей. Напомним, что набор ребер $(A_1, \dots, A_r)$ гиперграфа H образует упорядоченную r -цепь относительно нумерации σ , если для любого $i = 1, \dots, r-1$ выполнено $|A_i \cap A_{i+1}| = 1$, для любых i, j с условием $|i-j| > 2$ выполнено $A_i \cap A_j = \emptyset$ и, наконец, $\sigma(v) \leq \sigma(u)$ для всех $v \in A_i$, $u \in A_{i+1}$, $i = 1, \dots, r-1$.

Пусть $H = (V, E)$ – произвольный n -однородный гиперграф с условием

$$|E| < (\pi^{1/r} e^{-1/(12(n-1))}) \frac{1}{e\sqrt{2\pi}} (n-1)^{1/2-1/(2r)} r^{n+2/r}. \quad (120)$$

Чтобы доказать существование нумерации V , в которой H не содержит упорядоченных r -цепей, мы рассмотрим случайную нумерацию σ , имеющую равномерное распределение на множестве всех нумераций множества V . Пусть

$(A_1, \dots, A_r)$ – упорядоченный набор ребер из E , который может образовать упорядоченную r -цепь. Тогда имеет место равенство

$$\begin{aligned} P((A_1, \dots, A_r) \text{ образует упорядоченную } r\text{-цепь относительно } \sigma) \\ = \frac{((n-1)!)^2((n-2)!)^{r-2}}{(rn-r+1)!}. \end{aligned} \quad (121)$$

Оценим правую часть (121), используя следующие хорошо известные оценки для $k!$:

$$\left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2\pi k} < k! < \left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2\pi k} e^{1/(12k)}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{((n-1)!)^2((n-2)!)^{r-2}}{(rn-r+1)!} &= \frac{((n-1)!)^r}{(rn-r+1)! (n-1)^{r-2}} \\ &\leq \left(\frac{n-1}{e}\right)^{r(n-1)} (\sqrt{2\pi(n-1)})^r e^{r/(12(n-1))} (n-1)^{2-r} \\ &\quad \times \left(\frac{e}{r(n-1)+1}\right)^{r(n-1)+1} \frac{1}{\sqrt{2\pi(n-1)}r} \\ &= \left(\frac{n-1}{e}\right)^{r(n-1)} (\sqrt{2\pi(n-1)})^r e^{r/(12(n-1))} (n-1)^{2-r} \\ &\quad \times \left(\frac{e}{r(n-1)}\right)^{r(n-1)+1} \frac{1}{\sqrt{2\pi(n-1)}r} \left(1 + \frac{1}{r(n-1)}\right)^{-r(n-1)-1} \\ &= (n-1)^{(1-r)/2} r^{-(n-1)r-3/2} (2\pi)^{(r-1)/2} e^{r/(12(n-1))+1} \\ &\quad \times \left(1 + \frac{1}{r(n-1)}\right)^{-r(n-1)-1}. \end{aligned}$$

В силу неравенства $1+x \geq e^{x/(1+x)}$ последний множитель оценивается сверху величиной e^{-1} . В итоге получаем следующую оценку вероятности того, что упорядоченный набор ребер образует упорядоченную r -цепь:

$$\begin{aligned} P((A_1, \dots, A_r) \text{ образует упорядоченную } r\text{-цепь относительно } \sigma) \\ \leq (n-1)^{(1-r)/2} r^{-(n-1)r-3/2} (2\pi)^{(r-1)/2} e^{r/(12(n-1))}. \end{aligned} \quad (122)$$

Осталось подсчитать количество потенциальных наборов ребер $(A_1, \dots, A_r)$, которые могут образовать упорядоченную r -цепь. Если $\{A_1, \dots, A_r\}$ – некоторый неупорядоченный набор различных ребер из H , то, как несложно понять, есть только два варианта для их потенциального упорядочивания. Действительно, пусть эти ребра образовали упорядоченную r -цепь $(A_{i_1}, \dots, A_{i_r})$. Тогда

$$\begin{aligned} \left|A_{i_1} \cap \bigcup_{j=2}^r A_{i_j}\right| &= 1, & \left|A_{i_r} \cap \bigcup_{j=1}^{r-1} A_{i_j}\right| &= 1, \\ \left|A_{i_k} \cap \bigcup_{j=1: j \neq k}^r A_{i_j}\right| &= 2, & k &= 2, \dots, r-1. \end{aligned}$$

Из данных равенств следует, что первым ребром в цепи может быть либо A_{i_1} , либо A_{i_r} . Вторым ребром в цепи может быть только ребро, пересекающееся с первым, т. е., соответственно, либо A_{i_2} , либо $A_{i_{r-1}}$. Третье ребро в таком случае должно пересекаться со вторым, но не совпадать с первым, и т. д. Получаем, что если $(A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_r})$ – упорядоченная r -цепь, то второй возможный вариант для цепи – это $(A_{i_r}, A_{i_{r-1}}, \dots, A_{i_1})$. Следовательно, каждому неупорядоченному набору ребер $\{A_1, \dots, A_r\}$ соответствует не более двух упорядоченных наборов $(A_1, \dots, A_r)$, которые потенциально могут образовать упорядоченную r -цепь. Обозначим через $\mathcal{CH}$ множество всех таких наборов. Из приведенных выше рассуждений вытекает неравенство

$$|\mathcal{CH}| \leq 2 \binom{|E|}{r}.$$

В итоге, используя (122), получаем соотношения

$$\begin{aligned} & P(\text{есть упорядоченные } r\text{-цепи относительно } \sigma) \\ & \leq \sum_{(A_1, \dots, A_r) \in \mathcal{CH}} P((A_1, \dots, A_r) \text{ образует} \\ & \quad \text{упорядоченную } r\text{-цепь относительно } \sigma) \\ & \leq 2 \binom{|E|}{r} (n-1)^{(1-r)/2} r^{-(n-1)r-3/2} (2\pi)^{(r-1)/2} e^{r/(12(n-1))} \\ & \leq 2 \frac{|E|^r}{r!} (n-1)^{(1-r)/2} r^{-(n-1)r-3/2} (2\pi)^{(r-1)/2} e^{r/(12(n-1))} \\ & \leq 2 \frac{|E|^r e^r}{r^r \sqrt{2\pi} r} (n-1)^{(1-r)/2} r^{-(n-1)r-3/2} (2\pi)^{(r-1)/2} e^{r/(12(n-1))} \\ & = 2|E|^r e^r (n-1)^{(1-r)/2} r^{-nr-2} (2\pi)^{(r/2)-1} e^{r/(12(n-1))} \\ & = (|E| \pi^{-1/r} e^{1/(12(n-1))} e \sqrt{2\pi} (n-1)^{1/(2r)-1/2} r^{-n-2/r})^r. \end{aligned} \quad (123)$$

В силу изначального ограничения на количество ребер (120) правая часть (123) строго меньше единицы. Следовательно, с положительной вероятностью в H не будет упорядоченных r -цепей относительно случайной нумерации σ , т. е. существует такая нумерация вершин гиперграфа H , в которой нет упорядоченных r -цепей. Согласно теореме Плукхара 29, $\chi(H) \leq r$, что и обосновывает неравенство (119). Теорема 55 доказана.

6. Другие доказательства

В этом разделе мы изложим еще ряд идей, которые лежат в основе решения задач, находящихся в русле классической проблематики Эрдеша–Хайнала.

6.1. Нижние оценки величины $m^*(n, r)$. В настоящем пункте мы опишем общий принцип получения нижних оценок величины $m^*(n, r)$ в задаче Эрдеша–Ловаса (см. п. 3.1) с помощью нижних оценок величин $\Delta(n, r)$ и $\Delta(n, r, 2)$ (см. п. 4.2).

ТЕОРЕМА 56. Если $n \geq 2$ и $r \geq 2$ удовлетворяют неравенству $\Delta(n, r, 2) \geq d$, то

$$m^*(n+1, r) \geq \frac{1}{2} d^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $H = (V, E)$ – произвольный простой $(n+1)$ -однородный гиперграф с условием $\chi(H) > r$. Мы хотим показать, что $|E| \geq d^2/2$. Для каждого ребра $e \in E$ можно выделить вершину $v(e) \in e$, которая имеет максимальную степень (в гиперграфе H) среди всех вершин ребра e . Если вершин максимальной степени окажется несколько, то возьмем любую из них. Рассмотрим гиперграф $H' = (V, E')$, где

$$E' = \{e \setminus \{v(e)\} : e \in E\},$$

т. е. H' получается из H удалением из каждого ребра вершины (ровно одной!) максимальной степени. Ясно, что H' является n -однородным и простым. Кроме того,

$$\chi(H') \geq \chi(H) > r. \quad (124)$$

Для гиперграфов H и H' выполнены следующие утверждения.

ЛЕММА 5. *В H' есть вершина w с условием $\deg_{H'} w \geq d$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы знаем (см. (124)), что хроматическое число H' строго больше r . Следовательно, в силу условия нашей теоремы

$$\Delta(H) \geq \Delta(n, r, 2) \geq d.$$

Данное неравенство и означает существование вершины со степенью не меньше d . Лемма 5 доказана.

ЛЕММА 6. *В H есть не менее d вершин, степень каждой из которых не меньше, чем d .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 5 следует, что в H' есть вершина w , степень которой (в гиперграфе H') не меньше d . Обозначим через $s = \deg_{H'} w$ степень w . Пусть $f_1, \dots, f_s$ – ребра H' , содержащие w , а $e_1, \dots, e_s$ – “восстановленные” по $f_1, \dots, f_s$ ребра гиперграфа H , т. е. $f_j = e_j \setminus \{v(e_j)\}$, $j = 1, \dots, s$. Тогда для каждого $j = 1, \dots, s$ выполнено

$$\deg_H v(e_j) \geq \deg_{H'} w \geq \deg_{H'} w \geq d.$$

Осталось обосновать, почему все вершины $v(e_1), \dots, v(e_s)$ различны. Если бы было выполнено равенство $v(e_j) = v(e_i)$, то ребра e_j и e_i имели бы, по крайней мере, две общие вершины – w и $v(e_j)$, что противоречит тому, что H – простой гиперграф. Лемма 6 доказана.

ЛЕММА 7. *Гиперграф H содержит не менее $d^2/2$ ребер.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся леммой 6. Положим $m = \lceil d \rceil$. Согласно лемме 6 существуют $v_1, \dots, v_m$ – вершины H , степени которых (в гиперграфе H) не меньше, чем m . Тогда

$$|E| \geq |E_1| + |E_2| + \dots + |E_m|,$$

где $E_j = \{e \in E : v_j \in e, v_k \notin e, k = 1, \dots, j-1\}$. Ввиду того, что гиперграф H – простой, получаем, что $|E_j| \geq \deg_H v_j - j + 1 \geq m - j + 1$. Следовательно,

$$|E| \geq \sum_{j=1}^m (m - j + 1) = \binom{m+1}{2} \geq \frac{1}{2} d^2.$$

Лемма 7 доказана.

Завершим доказательство теоремы 56. Из леммы 7 и из произвольности гиперграфа H , как представителя класса $(n+1)$ -однородных простых гиперграфов с хроматическим числом, большим r , получаем обоснование искомого неравенства:

$$m^*(n+1, r) \geq \frac{1}{2} d^2.$$

Теорема 56 доказана.

Из теоремы 56 следует, что, имея нижнюю оценку для $\Delta(n, r, 2)$ (или $\Delta(n, r)$, так как $\Delta(n, r, 2) \geq \Delta(n, r)$), мы сразу получаем нижнюю оценку для $m^*(n, r)$. Данный способ был предложен Эрдешем и Ловасом в работе [11]. С небольшими уточнениями Косточки (см. [18]) и с его помощью были получены многие сильные результаты (наилучшие при относительно малых значениях r). Например, по этому методу из оценки Эрдеша и Ловаса (74) для $\Delta(n, r)$ вытекает оценка (26) для $m^*(n, r)$. Теорема 56 еще раз подчеркивает тесную связь между задачей Эрдеша–Ловаса о простых гиперграфах и задачей о максимальной вершинной степени.

6.2. Рекуррентные соотношения для $m(n)$. В данном пункте мы докажем рекуррентные соотношения (16) и (18) для последовательности чисел $m(n)$ в задаче Эрдеша–Хайнала (см. п. 2.3).

ТЕОРЕМА 57 (Х. Аббот, Л. Мозер [34]). *Для нечетных $n \geq 3$ выполняется неравенство*

$$m(n) \leq m(n-2)n + 2^{n-1}. \quad (125)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G = (W, E)$ – $(n-2)$ -однородный гиперграф с условиями $\chi(H) > 2$, $|E| = m(n-2)$. В силу определения величины $m(n-2)$ такой гиперграф существует. Пусть множество $\tilde{V}$ имеет вид $\tilde{V} = \{1, 2, \dots, 2n\}$, причем будем считать, что $\tilde{V}$ не пересекается с множеством W . Для каждого $i = 1, \dots, n$ введем обозначение $F_i = \{2i-1, 2i\}$, а также положим $\mathcal{F} = \{F_i\}_{i=1}^n$. Рассмотрим следующую систему подмножеств:

$$\mathcal{K} = \left\{ \{a_1, \dots, a_n\} : a_i \in F_i \text{ для каждого } i = 1, \dots, n \right. \\ \left. \text{и множество } \{a_i : a_i = 2i-1\} \text{ имеет четную мощность} \right\}.$$

Легко проверить, что $|\mathcal{K}| = 2^{n-1}$. Построим гиперграф $H = (V, \mathcal{E})$ следующим образом:

$$V = W \sqcup \tilde{V}, \\ \mathcal{E} = \{A \cup F : A \in E, F \in \mathcal{F}\} \cup \mathcal{K}.$$

Ясно, что гиперграф H является n -однородным (элементы из E имеют мощность $n-2$, их мы объединяем с двухэлементными множествами из $\mathcal{F}$, а элементы из $\mathcal{K}$ и так имеют мощность n). Кроме того,

$$|\mathcal{E}| = |E| \cdot |\mathcal{F}| + |\mathcal{K}| = m(n-2)n + 2^{n-1}.$$

Если нам удастся показать, что $\chi(H) > 2$, то мы получим искомое соотношение (125):

$$m(n) \leq |\mathcal{E}| = m(n-2)n + 2^{n-1}.$$

Предположим обратное: пусть $\tilde{\chi}$ – правильная двухцветная (в красный и синий цвета) раскраска множества вершин V гиперграфа H . В этой двухцветной раскраске множества W гиперграф G имеет одноцветное ребро $A \in E$, так как $\chi(G) > 2$. Без ограничения общности будем считать, что A покрашено полностью в синий цвет.

Все ребра H вида $A \cup F_i$, где $F_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, \dots, n$, должны быть неоднородны, поэтому все множества $F_i = \{2i - 1, 2i\}$ должны содержать в $\tilde{\chi}$ вершины красного цвета. Здесь возможны три варианта.

1) Обе вершины $2i - 1, 2i$ покрашены в красный цвет. В этом случае множество F_i назовем множеством *первого типа*.

2) Вершина $2i - 1$ покрашена в красный цвет, а $2i$ – в синий. В этом случае множество F_i назовем множеством *второго типа*.

3) Вершина $2i - 1$ покрашена в синий цвет, а $2i$ – в красный. В этом случае множество F_i назовем множеством *третьего типа*.

Обозначим через t количество множеств первого типа, через r количество множеств второго типа. Множеств третьего типа тогда будет $n - r - t$. Без ограничения общности можно считать, что множества $F_1, \dots, F_t$ имеют первый тип, множества $F_{t+1}, \dots, F_{t+r}$ – второй, а $F_{t+r+1}, \dots, F_n$ – третий. Рассмотрим три ситуации.

1) Пусть r – четно. Тогда все вершины множества

$$K = \{2, 4, \dots, 2t, 2t + 1, \dots, 2t + 2r - 1, 2t + 2r + 2, \dots, 2n\}$$

покрашены в красный цвет (мы берем четные вершины из множеств первого и третьего типа, а нечетные – из второго). При этом количество нечетных вершин в $K \subset \tilde{V}$ равно r , которое четно. Следовательно, $K \in \mathcal{K} \subset \mathcal{E}$, т.е. K – это одноцветное в $\tilde{\chi}$ ребро гиперграфа H .

2) Пусть r – нечетно, а $t > 0$. Тогда все вершины множества

$$K = \{1, 4, 6, \dots, 2t, 2t + 1, \dots, 2t + 2r - 1, 2t + 2r + 2, \dots, 2n\}$$

покрашены в красный цвет (мы берем четные вершины из всех множеств первого и третьего типа, кроме F_1 , а нечетные – из множеств второго типа и F_1). При этом количество нечетных вершин в $K \subset \tilde{V}$ равно $r + 1$, т.е. четно. Следовательно, $K \in \mathcal{K} \subset \mathcal{E}$, и K – одноцветное в $\tilde{\chi}$ ребро гиперграфа H .

3) Пусть r – нечетно и $t = 0$. Тогда все вершины множества

$$K = \{2, 4, \dots, 2r, 2r + 1, \dots, 2n - 1\}$$

покрашены в синий цвет (мы берем четные вершины из всех множеств второго типа, а нечетные – из множеств третьего типа). При этом количество нечетных вершин в $K \subset \tilde{V}$ равно $n - r$, т.е. четно (напомним, что n по условию теоремы является нечетным). Следовательно, $K \in \mathcal{K} \subset \mathcal{E}$, и K – одноцветное в $\tilde{\chi}$ ребро гиперграфа H .

Мы получили, что при любых значениях t и r гиперграф H содержит одноцветное ребро в раскраске $\tilde{\chi}$. Противоречие с выбором раскраски $\tilde{\chi}$. Следовательно, $\chi(H) > 2$ и теорема 57 доказана.

Теперь мы приведем еще одну конструкцию гиперграфа с большим хроматическим числом.

ТЕОРЕМА 58 (Б. Тофт [36]). Пусть $H_1 = (V_1, E_1)$, $H_2 = (V_2, E_2)$ – два гиперграфа, причем $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Пусть, далее, E_1 представлено в виде $E_1 = F_1 \sqcup F_2$, где множества F_1, F_2 произвольны, но $F_1 \neq \emptyset$. Пусть, наконец, x – некоторая (любая) вершина из V_2 . Положим $G_x = \{B \in E_2 : x \notin B\}$. Рассмотрим гиперграф $H = (V, E)$, где

$$V = V_1 \sqcup V_2 \setminus \{x\},$$

а

$$E = F_2 \cup G_x \cup \{A \cup B : A \in F_1, B \cup \{x\} \in E_2\}.$$

Если $\chi(H_1) > r$, $\chi(H_2) > r$, то и $\chi(H) > r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим обратное: пусть для H существует правильная r -цветная раскраска σ множества вершин V . Поскольку $V_1 \subset V$, то σ индуцирует раскраску множества вершин гиперграфа H_1 . В силу того, что $\chi(H_1) > r$, в σ есть одноцветное ребро из E_1 . Ребра из F_2 являются и ребрами H , поэтому они не одноцветны. Следовательно, есть $A \in F_1$ – одноцветное в σ . Обозначим через α цвет ребра A в раскраске σ .

Раскраска σ индуцирует раскраску и на множестве $V_2 \setminus \{x\}$. Рассмотрим следующую раскраску V_2 : $V_2 \setminus \{x\}$ покрашено согласно σ , а вершина x покрашена в цвет α . Это r -цветная раскраска, поэтому гиперграф H_2 содержит в такой раскраске одноцветное ребро $B \in E_2$. Возможны две ситуации.

1) Вершина x не принадлежит B . Следовательно, $B \in G_x \subset E$. Таким образом, B – это одноцветное ребро гиперграфа H в раскраске σ .

2) Если же $x \in B$, то $B \setminus \{x\}$ полностью покрашено в цвет α в σ . Но тогда $A \cup B$ является ребром H и в то же время одноцветно цвета α в раскраске σ .

В обеих ситуациях мы получили, что H содержит ребро, которое одноцветно в σ . Противоречие с выбором σ , следовательно, $\chi(H) > r$. Теорема 58 доказана.

Теорема 58 позволяет строить гиперграфы с хроматическим числом больше r рекуррентным образом: имея два таких гиперграфа, мы сразу получаем третий, используя конструкцию из теоремы 58. Именно так Б. Тофт получил рекуррентное соотношение для последовательности $m(n)$, когда n четно.

ТЕОРЕМА 59 (Б. Тофт [36]). Для четных $n \geq 4$ выполняется неравенство

$$m(n) \leq m(n-2)n + 2^{n-1} + \frac{1}{2} \binom{n}{n/2}. \quad (126)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $H_1 = (V_1, E_1)$ – $(n-2)$ -однородный гиперграф, причем $\chi(H_1) > 2$, а $|E_1| = m(n-2)$. Рассмотрим следующий гиперграф $H_2 = (V_2, E_2)$ с условием $V_2 \cap V_1 = \emptyset$:

$$V_2 = \{x\} \sqcup \mathcal{A} \sqcup \mathcal{B}, \quad \text{где } \mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\}, \mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\},$$

а

$$E_2 = F \sqcup \mathcal{C},$$

где

$$F = \{ \{x, a_i, b_i\} : i = 1, \dots, n \},$$

$$\mathcal{C} = \left\{ C = \{c_1, \dots, c_n\} : c_i \in \{a_i, b_i\}, \text{ причем число } |C \cap \mathcal{A}| \right. \\ \left. \text{либо нечетное } \leq \frac{n}{2}, \text{ либо четное } \geq \frac{n}{2} \right\}.$$

Чтобы применить теорему 58 к гиперграфам H_1 и H_2 , необходимо сначала проверить, что $\chi(H_2) > 2$.

ЛЕММА 8. *Гиперграф H_2 не является 2-раскрасиваемым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим обратное. Пусть σ – правильная раскраска H_2 в два цвета (красный и синий). Без ограничения общности будем считать, что среди вершин множества $\mathcal{A}$ вершин красного цвета не больше половины, т. е. не больше $n/2$.

Мы рассмотрим лишь случай, когда $\mathcal{A}$ имеет нечетное число вершин красного цвета в раскраске σ (другая ситуация, когда их четное число, рассматривается аналогично). Положим $J = \{i : a_i \text{ покрашено в красный цвет в } \sigma\}$. Возможны четыре варианта.

1) Вершина x имеет синий цвет в раскраске σ . Все тройки из F являются неоднородными в σ , поэтому все вершины b_i для $i \notin J$ покрашены в красный цвет. Тогда $C = \{c_1, \dots, c_n\}$, где $c_i = a_i$ для $i \in J$ и $c_i = b_i$ для $i \notin J$, покрашено полностью в красный цвет в σ . Но $|C \cap \mathcal{A}| = |J|$, т. е. нечетно и $\leq n/2$, поэтому $C \in \mathcal{C}$ является ребром H_2 , которое одноцветно в σ .

2) Вершина x имеет красный цвет в раскраске σ и $|J| = n/2$. Все тройки из F неоднородны в σ , поэтому все вершины b_i для $i \in J$ покрашены в синий цвет. Рассмотрим множество $C = \{c_1, \dots, c_n\}$, где $c_i = a_i$ для $i \notin J$ и $c_i = b_i$ для $i \in J$. Тогда C полностью покрашено в синий цвет. Но $|C \cap \mathcal{A}| = n - |J| = n/2$, т. е. нечетно и $\leq n/2$, поэтому $C \in \mathcal{C}$ является ребром H_2 , одноцветным в σ .

3) Вершина x имеет красный цвет в раскраске σ , $|J| < n/2$ и для любого $i \notin J$ вершина b_i покрашена в красный цвет. В этом случае мы можем взять то же ребро $C = \{c_1, \dots, c_n\}$, что и в п. 1) (т. е. $c_i = a_i$ для $i \in J$ и $c_i = b_i$ для $i \notin J$). Тогда оно снова будет полностью красным в раскраске σ .

4) Вершина x имеет красный цвет в раскраске σ , $|J| < n/2$ и для некоторого $j \notin J$ вершина b_j покрашена в синий цвет. Все тройки из F неоднородны в σ , поэтому все вершины b_i для $i \in J$ покрашены в синий цвет. Рассмотрим множество $C = \{c_1, \dots, c_n\}$, где $c_i = a_i$ для $i \notin J \cup \{j\}$ и $c_i = b_i$ для $i \in J \cup \{j\}$. Тогда C полностью покрашено в синий цвет в σ , причем $|C \cap \mathcal{A}| = n - |J| - 1$, т. е. это число четное и $\geq n/2$. Следовательно, $C \in \mathcal{C}$ является ребром H_2 , которое одноцветно в σ .

Во всех ситуациях мы получили, что H_2 содержит ребро, которое одноцветно в σ , что противоречит изначальному выбору раскраски σ . Значит, $\chi(H_2) > 2$. Лемма 8 доказана.

Завершим доказательство теоремы 59. Применим теорему 58 к гиперграфам H_1 и H_2 . В качестве множества F_1 мы возьмем все ребра H_1 , т. е. $F_1 = E_1$, а $F_2 = \emptyset$. Выделенной вершиной гиперграфа H_2 будет как раз вершина x (то

же обозначение, что и в теореме 58). Пусть $H = (V, E)$ – гиперграф, получающийся применением теоремы 58 к гиперграфам H_1 и H_2 . Согласно теореме 58, $\chi(H) > 2$. Сколько ребер имеет H ? В силу нашего выбора параметров ребрами H являются ребра H_2 , не содержащие вершины x (т. е. $\mathcal{C} \subset E$), а также все множества вида $A \cup B$, где A – ребро H_1 , а $B = \{a_i, b_i\}$ – ребро H_2 , из которого удалили вершину x (т. е. $B \cup \{x\} \in F$). Тогда

$$|E| = |F| \cdot |E_1| + |\mathcal{C}|.$$

Ясно, что $|F| = n$ и $|\mathcal{C}| = 2^{n-1} + \frac{1}{2} \binom{n}{n/2}$. Кроме того, H является n -однородным, поэтому с учетом того, что $\chi(H) > 2$, мы получаем искомое соотношение (126):

$$m(n) \leq |E| = |F| \cdot |E_1| + |\mathcal{C}| = m(n-2)n + 2^{n-1} + \frac{1}{2} \binom{n}{n/2}.$$

Теорема 59 доказана.

Авторы обзора выражают благодарность доктору физико-математических наук А. М. Зубкову за плодотворное обсуждение формальных конструкций вероятностных алгоритмов, использующихся в доказательствах многих результатов в задаче Эрдеша–Хайнала и ее обобщений.

Список литературы

- [1] А. А. Зыков, “Гиперграфы”, *УМН*, **29:6** (1974), 89–154; англ. пер.: А. А. Zykov, “Hypergraphs”, *Russian Math. Surveys*, **29:6** (1974), 89–156.
- [2] C. Berge, *Graphes et hypergraphes*, Monographies Universitaires de Mathématiques, **37**, Dunod, Paris, 1970, xviii+502 pp.
- [3] B. Bollobás, *Combinatorics. Set systems, hypergraphs, families of vectors and combinatorial probability*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1986, xii+177 pp.
- [4] J. L. Gross, J. Yellen (eds.), *Handbook of graph theory*, CRC Press, Boca Raton, FL, 2004, xiv+1167 pp.
- [5] P. Erdős, A. Hajnal, “On a property of families of sets”, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **12:1-2** (1961), 87–123.
- [6] P. Erdős, “On a combinatorial problem”, *Nordisk Mat. Tidskr.*, **11** (1963), 5–10.
- [7] P. Erdős, “On a combinatorial problem. II”, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **15:3-4** (1964), 445–447.
- [8] П. Эрде́ш, Дж. Спенсер, *Вероятностные методы в комбинаторике*, Мир, М., 1976, 131 с.; пер. с англ.: P. Erdős, J. Spencer, *Probabilistic methods in combinatorics*, Probab. Math. Statist., **17**, Academic Press, New York–London, 1974, 106 pp.
- [9] Н. Алон, Дж. Спенсер, *Вероятностный метод*, 2-е изд., Бином. Лаборатория знаний, М., 2007, 320 с.; пер. с англ.: N. Alon, J. H. Spencer, *The probabilistic method*, 2nd ed., Wiley-Intersci. Ser. Discrete Math. Optim., Wiley-Interscience, New York, 2000, xviii+301 pp.
- [10] W. M. Schmidt, “Ein kombinatorisches Problem von P. Erdős und A. Hajnal”, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **15** (1964), 373–374.
- [11] P. Erdős, L. Lovász, “Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions”, *Infinite and finite sets* (Colloq., Keszthely, 1973), Vol. II, Colloq. Math. Soc. János Bolyai, **10**, North-Holland, Amsterdam, 1975, 609–627.

- [12] J. Beck, “On a combinatorial problem of P. Erdős and L. Lovász”, *Discrete Math.*, **17**:2 (1977), 127–131.
- [13] J. Beck, “On 3-chromatic hypergraphs”, *Discrete Math.*, **24**:2 (1978), 127–137.
- [14] J. Spencer, “Coloring n -sets red and blue”, *J. Combin. Theory Ser. A*, **30**:1 (1981), 112–113.
- [15] J. Radhakrishnan, A. Srinivasan, “Improved bounds and algorithms for hypergraph 2-coloring”, *Random Structures Algorithms*, **16**:1 (2000), 4–32.
- [16] M. Herzog, J. Schönheim, “The B_r property and chromatic numbers of generalized graphs”, *J. Combin. Theory Ser. B*, **12** (1972), 41–49.
- [17] P. Erdős, “Some old and new problems in various branches of combinatorics”, *Proceedings of the Tenth Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing* (Florida Atlantic Univ., Boca Raton, Fla., 1979), Congr. Numer., **23–24**, Utilitas Math. Publ., Winnipeg, Man., 1979, 19–37.
- [18] A. V. Kostochka, “Color-critical graphs and hypergraphs with few edges: a survey”, *More sets, graphs and numbers*, Bolyai Soc. Math. Stud., **15**, eds. E. Győri, G. O. H. Katona, L. Lovász, Springer, Berlin, 2006, 175–197; <http://www.springerlink.com/content/978-3-540-32377-8/#section=791726&page=1&locus=0>.
- [19] N. Alon, “Hypergraphs with high chromatic number”, *Graphs Combin.*, **1** (1985), 387–389.
- [20] P. Frankl, V. Rödl, “Lower bounds for Turán’s problem”, *Graphs Combin.*, **1** (1985), 213–216.
- [21] K. H. Kim, F. W. Roush, “On a problem of Turán”, *Studies in pure mathematics*, Birkhäuser, Basel, 1983, 423–425.
- [22] A. V. Kostochka, “Coloring uniform hypergraphs with few colors”, *Random Structures Algorithms*, **24**:1 (2004), 1–10.
- [23] Д. А. Шабанов, “О хроматическом числе конечных систем подмножеств”, *Матем. заметки*, **85**:6 (2009), 951–954; англ. пер.: D. A. Shabanov, “On the chromatic number of finite systems of subsets”, *Math. Notes*, **85**:6 (2009), 902–905.
- [24] A. Pluhár, “Greedy colorings for uniform hypergraphs”, *Random Structures Algorithms*, **35**:2 (2009), 216–221.
- [25] Д. А. Шабанов, “Об улучшении нижней оценки в комбинаторной задаче Эрдеша–Хайнала”, *Докл. РАН*, **426**:2 (2009), 177–178; англ. пер.: D. A. Shabanov, “Improvement of the lower bound in the Erdős–Hajnal combinatorial problem”, *Dokl. Math.*, **79**:3 (2009), 349–350.
- [26] Д. А. Шабанов, “О нижних оценках числа ребер гиперграфа из некоторых классов”, *Докл. РАН*, **434**:1 (2010), 33–37; англ. пер.: D. A. Shabanov, “Lower bounds for the number of edges in hypergraphs of certain classes”, *Dokl. Math.*, **82**:2 (2010), 705–708.
- [27] L. Lovász, “A generalization of König’s theorem”, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **21** (1970), 443–446.
- [28] L. Lovász, “Coverings and colorings of hypergraphs”, *Proceedings of the Fourth Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing* (Florida Atlantic Univ., Boca Raton, Fla., 1973), Utilitas Math. Publ., Winnipeg, Man., 1973, 3–12.
- [29] P. D. Seymour, “On the two-coloring of hypergraphs”, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, **25** (1974), 303–312.
- [30] D. R. Woodall, “Property B and four-color problem”, *Combinatorics*, Proc. Conf. Combinatorial Math. (Math. Inst., Oxford, 1972), Inst. Math. Appl., Southend-on-Sea, England, 1972, 322–340.
- [31] М. Бурштейн, “Критические гиперграфы с минимальным числом ребер”, *Сообщ. АН ГССР*, **83**:2 (1976), 285–288.

- [32] A. V. Kostochka, J. Nešetřil, “Properties of Decartes’ construction of triangle-free graphs with high chromatic number”, *Combin. Probab. Comput.*, **8**:5 (1999), 467–472.
- [33] A. V. Kostochka, M. Steibitz, “On the number of edges in colour-critical graphs and hypergraphs”, *Combinatorica*, **20**:4 (2000), 521–530.
- [34] H. L. Abbot, L. Moser, “On a combinatorial problem of Erdős and Hajnal”, *Canad. Math. Bull.*, **7** (1964), 177–181.
- [35] H. L. Abbot, D. Hanson, “On a combinatorial problem of Erdős”, *Canad. Math. Bull.*, **12** (1969), 823–829.
- [36] B. Toft, “On color-critical hypergraphs”, *Infinite and finite sets* (Colloq., Keszthely, 1973), Vol. III, Colloq. Math. Soc. János Bolyai, **10**, eds. A. Hajnal et al., North-Holland, Amsterdam, 1975, 1445–1457.
- [37] T. R. Jensen, B. Toft, *Graph coloring problems*, Wiley-Intersci. Ser. Discrete Math. Optim., Wiley, New York, 1995, xxii+295 pp.
- [38] P. D. Seymour, “A note on a combinatorial problem of Erdős and Hajnal”, *J. London Math. Soc.* (2), **8**:2 (1974), 681–682.
- [39] P. Erdős, “On a combinatorial problem. III”, *Canad. Math. Bull.*, **12** (1969), 413–416.
- [40] H. L. Abbot, A. C. Liu, “On property B of families of sets”, *Canad. Math. Bull.*, **23**:4 (1980), 429–435.
- [41] G. Exoo, “On constructing hypergraphs without Property B”, *Ars Combin.*, **30** (1990), 3–12.
- [42] M. K. Goldberg, H. C. Russell, “Toward computing $m(4)$ ”, *Ars Combin.*, **39** (1995), 139–148.
- [43] P. Aizley, J. L. Selfridge, “A lower bound for $m(4)$ ”, Abstract #747-05-18, *Notices Amer. Math. Soc.*, **24**:5 (1977), A-452.
- [44] G. M. Manning, “Some results on the $m(4)$ problem of Erdős and Hajnal”, *Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc.*, **1**:3 (1995), 112–113.
- [45] P. Erdős, “Graph theory and probability”, *Canad. J. Math.*, **11** (1959), 34–38.
- [46] D. A. Grable, K. T. Phelps, V. Rödl, “The minimum independence number for designs”, *Combinatorica*, **15**:2 (1995), 175–185.
- [47] A. Kostochka, D. Mubayi, V. Rödl, P. Tetali, “On the chromatic number of set systems”, *Random Structures Algorithms*, **19**:2 (2001), 87–98.
- [48] T. Bohman, A. Frieze, D. Mubayi, “Coloring $\mathcal{H}$ -free hypergraphs”, *Random Structures Algorithms*, **36**:1 (2010), 11–25.
- [49] A. V. Kostochka, V. Rödl, “Constructions of sparse uniform hypergraphs with high chromatic number”, *Random Structures Algorithms*, **36**:1 (2010), 46–56.
- [50] Z. Szabó, “An application of Lovasz Local Lemma – a new lower bound for the van der Waerden number”, *Random Structures Algorithms*, **1**:3 (1990), 343–360.
- [51] A. V. Kostochka, M. Kumbhat, “Coloring uniform hypergraphs with few edges”, *Random Structures Algorithms*, **35**:3 (2009), 348–368.
- [52] А. П. Розовская, Д. А. Шабанов, “О правильных раскрасках гиперграфов в предписанные цвета”, *Дискрет. матем.*, **22**:3 (2010), 94–109; англ. пер.: A. P. Rozovskaya, D. A. Shabanov, “On proper colourings of hypergraphs using prescribed colours”, *Discrete Math. Appl.*, **20**:4 (2010), 391–409.
- [53] Д. А. Шабанов, “О нижних оценках в комбинаторной задаче Эрдеша–Ловаса”, *Докл. РАН*, **431**:5 (2010), 602–604; англ. пер.: D. A. Shabanov, “Lower bounds in the combinatorial problem of Erdős and Lovász”, *Dokl. Math.*, **81**:2 (2010), 286–288.
- [54] J. Steiner, “Combinatorische Aufgabe”, *J. Reine Angew. Math.*, **45** (1853), 181–182.
- [55] E. F. Assmus (Jr.), J. D. Key, “Steiner systems”, *Designs and their codes*, Cambridge Tracts in Math., **103**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992, 295–316.
- [56] T. Beth, D. Jungnickel, H. Lenz, *Design theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1986, 688 pp.

- [57] K. T. Phelps, V. Rödl, “Steiner triple systems with minimum independence number”, *Ars Combin.*, **21** (1986), 167–172.
- [58] V. Rödl, E. Šiňajová, “Note on independent sets in Steiner systems”, Proceedings of the Fifth International Seminar on Random Graphs and Probabilistic Methods in Combinatorics and Computer Science (Poznań, 1991), *Random Structures Algorithms*, **5**:1 (1994), 183–190.
- [59] Ф. Харари, *Теория графов*, 3-е изд., КомКнига, М., 2006, 296 с.; пер. с англ.: F. Harary, *Graph theory*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1969, ix+274 pp.
- [60] В. Г. Визинг, “Раскраска вершин графа в предписанные цвета”, *Методы дискретного анализа в теории кодов и схем*, Сборник научных трудов, Дискретный анализ, **29**, Институт математики СО АН СССР, Новосибирск, 1976, 3–10.
- [61] P. Erdős, A. L. Rubin, H. Taylor, “Choosability in graphs”, *Proceedings of the West Coast Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing* (Humboldt State Univ., Arcata, Calif., 1979), *Congr. Numer.*, **26**, Utilitas Math. Publ., Winnipeg, Man., 1980, 125–157.
- [62] A. P. Rozovskaya, D. A. Shabanov, “On the problem of Erdős and Hajnal in the case of list colorings”, *European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications (EuroComb 2009)*, *Electron. Notes Discrete Math.*, **34**, Elsevier, Amsterdam, 2009, 387–391.
- [63] A. V. Kostochka, D. R. Woodall, “Density conditions for panchromatic colourings of hypergraphs”, *Combinatorics*, **21**:4 (2001), 515–541.
- [64] A. Kostochka, “On a theorem by Erdős, Rubin and Taylor on choosability of complete bipartite graphs”, *Electron. J. Combin.*, **9**:1 (2002), Note 9, 4 pp.; http://www.combinatorics.org/Volume_9/PDF/v9i1n9.pdf.
- [65] N. Alon, “Choice number of graphs: a probabilistic approach”, *Combin. Probab. Comput.*, **1**:2 (1992), 107–114.
- [66] Д. А. Шабанов, “Об одной комбинаторной задаче Эрдеша”, *Докл. РАН*, **396**:2 (2004), 166–169; англ. пер.: D. A. Shabanov, “On one combinatorial problem of Erdős”, *Dokl. Math.*, **69**:3 (2004), 359–362.
- [67] Д. А. Шабанов, “Экстремальные задачи для раскрасок равномерных гиперграфов”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **71**:6 (2007), 183–222; англ. пер.: D. A. Shabanov, “Extremal problems for colourings of uniform hypergraphs”, *Izv. Math.*, **71**:6 (2007), 1253–1290.
- [68] Д. А. Шабанов, “О существовании полноцветных раскрасок для равномерных гиперграфов”, *Матем. сб.*, **201**:4 (2010), 137–160; англ. пер.: D. A. Shabanov, “The existence of panchromatic colourings for uniform hypergraphs”, *Sb. Math.*, **201**:4 (2010), 607–630.
- [69] D. A. Shabanov, “On a generalization of Rubin’s theorem”, *J. Graph Theory*, **67**:3 (2011), 226–234.
- [70] А. П. Розовская, Д. А. Шабанов, “Об улучшении нижней оценки в задаче Косточки о полноцветных раскрасках гиперграфов”, *Матем. заметки*, **89**:6 (2011), 948–950; англ. пер.: A. P. Rozovskaya, D. A. Shabanov, “Improvement of the lower bound in the Kostochka problem of panchromatic coloring of a hypergraph”, *Math. Notes*, **89**:6 (2011), 903–906.
- [71] Н. Н. Кузюрин, “Асимптотическое исследование задачи о покрытии”, *Проблемы кибернетики*, **37**, 1980, 19–56.
- [72] А. М. Райгородский, *Системы общих представителей в комбинаторике и их приложения в геометрии*, МЦНМО, М., 2009, 132 с.
- [73] P. Turán, “Research problems”, *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Internat. Közl.*, **6** (1961), 417–423.
- [74] A. Sidorenko, “What we know and what we do not know about Turán numbers”, *Graphs Combin.*, **11**:2 (1995), 179–199.

- [75] Z. Füredi, “Turán’s type problems”, *Surveys in combinatorics*, 1991, Proc. of the 13th British Combin. Conference (Guildford, 1991), London Math. Soc. Lecture Note Ser., **166**, ed. A. D. Keedwell, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991, 253–300.
- [76] В. Е. Тараканов, *Комбинаторные задачи и $(0, 1)$ -матрицы*, Наука, М., 1985, 192 с.
- [77] Д. А. Шабанов, “О нижней оценке функции Ван дер Вардена”, *Матем. заметки*, **87**:6 (2010), 951–953; англ. пер.: D. A. Shabanov, “On the lower bound for van der Waerden functions”, *Math. Notes*, **87**:6 (2010), 918–920.
- [78] A. Frieze, D. Mubayi, *Coloring simple hypergraphs*, arXiv:0809.2979v2.
- [79] A. Frieze, D. Mubayi, “On the chromatic number of simple triangle-free triple systems”, *Electron. J. Combin.*, **15**:1 (2008), Research Paper 121, 27 pp.; http://www.emis.de/journals/EJC/Volume_15/PDF/v15i1r59.pdf.
- [80] D. Shabanov, “On coloring uniform hypergraphs without 3-cycles”, *Moscow J. Combin. Number Theory*, **1**:2 (2011) (to appear).
- [81] А. В. Косточка, Н. П. Мазурова, “Неравенство в теории раскрасок графов”, *Методы дискретного анализа в решении комбинаторных задач*, Дискретный анализ, **30**, 1977, 23–29.
- [82] В. А. Ташкинов, “О нижней границе для хроматического числа графов с заданными максимальной степенью вершин и обхватом”, *Сиб. электрон. матем. изв.*, **1** (2004), 99–109.
- [83] J. H. Kim, “On Brook’s theorem for sparse graphs”, *Combin. Probab. Comput.*, **4**:2 (1995), 97–132.
- [84] A. Johanssen, *Asymptotic choice number for triangle free graphs*, DIMACS Technical Report 91-95, 1996.
- [85] B. L. van der Waerden, “Beweis einer Baudetschen Vermutung”, *Nieuw Archief voor Wiskunde*, **15** (1927), 212–216.
- [86] А. Я. Хинчин, *Три жемчужины теории чисел*, 2-е изд., УРСС, М., 2004, 72 с.
- [87] Р. Грэхем, *Начала теории Рамсея*, Мир, М., 1984, 97 с.; пер. с англ.: R. L. Graham, *Rudiments of Ramsey theory*, CBMS Reg. Conf. Ser. Math., **45**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1981, v+65 pp.
- [88] R. L. Graham, B. L. Rotshild, J. H. Spencer, *Ramsey theory*, Wiley-Intersci. Ser. Discrete Math., Wiley, New York, 1980, ix+174 pp.
- [89] А. М. Райгородский, *Вероятность и алгебра в комбинаторике*, МЦНМО, М., 2008, 48 с.
- [90] В. А. Успенский, *Лекции о вычислимых функциях*, Фитматлит, М., 1960, 492 с.
- [91] S. Shelah, “Primitive recursive bounds for van der Waerden numbers”, *J. Amer. Math. Soc.*, **1**:3 (1988), 683–697.
- [92] И. Д. Шкредов, “Теорема Семереди и задачи об арифметических прогрессиях”, *УМН*, **61**:6 (2006), 111–178; англ. пер.: I. D. Shkredov, “Szemerédi’s theorem and problems on arithmetic progressions”, *Russian Math. Surveys*, **61**:6 (2006), 1101–1166.
- [93] J. Bourgain, “Roth’s theorem on progressions revisited”, *J. Anal. Math.*, **104**:1 (2008), 155–192.
- [94] W. T. Gowers, “A new proof of Szemerédi theorem”, *Geom. Funct. Anal.*, **11**:3 (2001), 465–588.
- [95] V. Chvátal, “Some unknown van der Waerden numbers”, *Combinatorial structures and their applications*, Proc. Calgary Internat. Conf. (Calgary, Alta., 1969), Gordon and Breach, New York, 1970, 31–33.
- [96] R. S. Stevens, R. Shantaram, “Computer-generated van der Waerden partitions”, *Math. Comp.*, **32**:142 (1978), 635–636.
- [97] M. D. Beeler, P. E. O’Neil, “Some new van der Waerden numbers”, *Discrete Math.*, **28**:2 (1979), 135–146.

- [98] P. R. Herwig, M. J. H. Heule, P. M. van Lambalgen, H. van Maaren, “A new method to construct lower bounds for van der Warden numbers”, *Electron. J. Combin.*, **14**:1 (2007), Research Paper 6, 18 pp.; <http://www.emis.de/journals/EJC/Volume.14/PDF/v14i1r6.pdf>.
- [99] P. Erdős, R. Rado, “Combinatorial theorems on classifications of subsets of a given set”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **2**:1 (1952), 417–439.
- [100] L. Moser, “Notes on number theory. II. On a theorem of van der Waerden”, *Canad. Math. Bull.*, **3** (1960), 23–25.
- [101] W. M. Schmidt, “Two combinatorial theorems on arithmetic progressions”, *Duke Math. J.*, **29**:1 (1962), 129–140.
- [102] E. R. Berlekamp, “A construction for partitions which avoid long arithmetic progressions”, *Canad. Math. Bull.*, **11** (1968), 409–414.
- [103] T. Tao, V. Vu, *Additive combinatorics*, Cambridge Stud. Adv. Math., **105**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2006, xviii+512 pp.
- [104] Д. А. Шабанов, “Функция Ван дер Вардена и раскраски гиперграфов”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **75**:5 (2011), 195–224.
- [105] R. L. Graham, “Recent developments in Ramsey theory”, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, v. 1, 2 (Warsaw, 1983), PWN, Warsaw, 1984, 1555–1567.
- [106] P. Erdős, “Some of my favorite problems and results”, *The mathematics of Paul Erdős*, v. I, Algorithms Combin., **13**, Springer, Berlin, 1997, 47–67.
- [107] R. Graham, “Some of my favorite problems in Ramsey theory”, *Combinatorial number theory*, Proceedings of the 2nd Integers Conference 2005 in celebration of the 70th birthday of Ronald Graham (Carrollton, GA, USA, 2005), de Gruyter, Berlin, 2007, 229–236.
- [108] R. Graham, “Old and new problems and results in Ramsey theory”, *Horizons of combinatorics*, Bolyai Soc. Math. Stud., **17**, eds. E. Győri, G. O. H. Katona, L. Lovász, Springer, Berlin, 2008, 105–118; <http://www.springerlink.com/content/978-3-540-77199-9/#section=153712&page=1&locus=0>.
- [109] Г. П. Гаврилов, А. А. Сапоженко, *Задачи и упражнения по дискретной математике*, 3-е изд., перераб., Физматлит, М., 2005, 416 с.; англ. пер. 2-го изд.: G. P. Gavrilov, A. A. Sapozhenko, *Problems and exercises in discrete mathematics*, Kluwer Texts Math. Sci., **14**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1996, xi+422 pp.

А. М. Райгородский (A. M. Raigorodskii)

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова;

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

E-mail: mraigor@yandex.ru

Поступила в редакцию

01.11.2010

Д. А. Шабанов (D. A. Shabanov)

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова;

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

E-mail: shabanov@mech.math.msu.su