Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. М. Натанзон, А. М. Пратусевич, Пространство модулей горенштейновых квазиоднородных особенностей поверхностей, *УМН*, 2011, том 66, выпуск 5, 189–190

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9445>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 16:51:02

Пространство модулей горенштейновых квазиоднородных особенностей поверхностей

С. М. Натанзон, А. М. Пратусевич

1. В этой работе мы описываем топологию пространства горенштейновых гиперболических квазиоднородных особенностей поверхностей. Мы определяем количество компонент связности этого пространства и описываем их топологию. Квазиоднородные особенности поверхностей и их аффинные координатные кольца активно изучались в 70-е годы И. В. Долгачевым, Дж. Милнором, В. Нойманом, Г. Пинкхэмом и другими. Назовем особенность гиперболической, если соответствующий орбифолд гиперболический, т. е. имеет вид $\mathbb{H}/\Gamma$, где $\mathbb{H}$ – гиперболическая плоскость и Γ – фуксова группа. Нормальная изолированная особенность поверхности горенштейнова, если на проколотой окрестности особой точки существует везде ненулевая голоморфная 2-форма. Например, все изолированные особенности полных пересечений горенштейновы. И. В. Долгачев [1] показал, что горенштейновы гиперболические квазиоднородные особенности поверхностей уровня m однозначно соответствуют особым m -коспिनорным расслоениям над компактными гиперболическими римановыми орбифолдами, т. е. линейным расслоениям, m -я степень которых изоморфна касательному расслоению.

Имеется взаимно однозначное соответствие между m -коспिनорными и m -спинорными расслоениями. Классические (т. е. $m = 2$) спинорные расслоения на компактных римановых поверхностях совпадают с эта-характеристиками Римана. Их современная интерпретация и классификация предложены М. Ф. Атьей [2] и Д. Мамфордом [3]. Классификация 2-спинорных расслоений и их модулей на некомпактных поверхностях дана в [4]. Описание пространств модулей m -спинорных расслоений дано в [5] для компактных поверхностей с проколами и в [6], [7] для поверхностей с произвольной конечно порожденной фундаментальной группой.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть p – точка компактного гиперболического риманова орбифолда P . Пусть $\pi_1^0(P, p) \subset \pi_1(P, p)$ – подмножество фундаментальной группы орбифолда, состоящее из элементов, представимых простыми контурами. Отображение $\sigma: \pi_1^0(P, p) \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ назовем *m -функцией Арфа*, если для любых элементов $a, b \in \pi_1^0(P, p)$ выполнены условия: 1) $\sigma(bab^{-1}) = \sigma(a)$; 2) $\sigma(a^{-1}) = -\sigma(a)$, если порядок элемента a не равен 2; 3) $\sigma(ab) = \sigma(a) + \sigma(b)$, если a и b можно представить простыми контурами таким образом, чтобы точка p была их единственной общей точкой и их индекс пересечения не 0; 4) $\sigma(ab) = \sigma(a) + \sigma(b) - 1$, если: а) индекс пересечения a и b равен 0, б) a и b можно представить простыми контурами таким образом, чтобы точка p была их единственной общей точкой, в) ориентированные контуры a, b и $(ab)^{-1}$ свободно гомотопны попарно не пересекающимся простым контурам $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$, ориентации которых противоположны индуцированным комплексной структурой сферы с 3 дырами, которую они отсекают от P ; 5) для всякого эллиптического элемента c порядка p число $p\sigma(c) + 1$ делится на m .

ТЕОРЕМА 1. *Существует естественное взаимно однозначное соответствие между горенштейновыми гиперболическими квазиоднородными особенностями поверхностей уровня t и m -функциями Арфа на компактных гиперболических римановых орбифолдах.*

Доказательство основано на связи между m -спинорными расслоениями на орбифолде $\mathbb{H}/\Gamma$ и поднятиями фуксовой группы $\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{R})$ на единственное m -листное накрытие $\varphi: G_m \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ-10-01-00678-а, НШ-8462.2010.1, SFB 611 (DFG), RCMM (Liverpool).

3. Опишем теперь простейшие топологические инварианты m -функций Арфа σ . К ним мы отнесем род g орбифолда P и порядки $p_1, \dots, p_r$ особых точек на P . Из определения m -функций Арфа сразу следует, что группа Mod гомотопических классов сохраняющих ориентацию автогомеоморфизмов орбифолда P естественно действует на множестве Σ всех m -функций Арфа на P .

ТЕОРЕМА 2. *Множество Σ всех m -функций Арфа на компактном гиперболическом орбифолде P сигнатуры $(g : p_1, \dots, p_r)$ не пусто, тогда и только тогда, когда порядки $p_1, \dots, p_r$ взаимно просты с m и $(p_1 \cdots p_r) \left(\sum_{1 \leq i \leq r} \frac{1}{p_i} - (2g - 2) - r \right)$ делится на m . В этом случае число m -функций Арфа равно m^{2g} . Действие группы Mod на непустом множестве Σ транзитивно, если $g = 0$ или же если $g > 1$ и m нечетно; имеет ровно две орбиты, если $g > 1$ и m четно; имеет число орбит, равное числу делителей $\text{НОД}(m, p_1 - 1, \dots, p_r - 1)$, если $g = 1$.*

Доказательство использует явный вид дэновских образующих группы Mod .

4. Используем теперь m -функции Арфа для изучения пространства S^m гиперболических горенштейновых квазиоднородных особенностей поверхностей уровня m . Пространство S^m естественно распадается на подмножества $S_{g:p_1, \dots, p_r}^m$, отвечающие простейшим топологическим инвариантам соответствующих m -функций Арфа. Из теоремы 2 сразу следует

ТЕОРЕМА 3. *Пространство $S_{g:p_1, \dots, p_r}^m$ не пусто, тогда и только тогда, когда порядки $p_1, \dots, p_r$ взаимно просты с m и $(p_1 \cdots p_r) \left(\sum_{1 \leq i \leq r} \frac{1}{p_i} - (2g - 2) - r \right)$ делится на m . Непустое пространство $S_{g:p_1, \dots, p_r}^m$ связно, если $g = 0$ или же если $g > 1$ и m нечетно; имеет ровно две компоненты связности, если $g > 1$ и m четно; имеет число компонент связности, равное числу делителей $\text{НОД}(m, p_1 - 1, \dots, p_r - 1)$, если $g = 1$.*

Из теорем 1–3 и теоремы Фрике–Клейна [8] в форме [9], выводится

ТЕОРЕМА 4. *Каждая компонента связности пространства $S_{g:p_1, \dots, p_r}^m$ гомеоморфна $\mathbb{R}^d/G$, где $d = 6g - 6 + 2r$ и $G \subset \text{Mod}$ – дискретная группа.*

Список литературы

- [1] I. V. Dolgachev, *Math. Ann.*, **265**:4 (1983), 529–540. [2] M. F. Atiyah, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4), **4** (1971), 47–62. [3] D. Mumford, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4), **4** (1971), 181–192. [4] С. М. Натанзон, *Матем. заметки*, **45**:4 (1989), 111–116. [5] T. J. Jarvis, *Internat. J. Math.*, **11**:5 (2000), 637–663. [6] С. Натанзон, А. Пратусевич, *УМН*, **60**:2(362) (2005), 169–170. [7] S. Natanzon, A. Pratussevitch, *J. Lie Theory*, **19**:1 (2009), 107–148. [8] R. Fricke, F. Klein, *Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen*. В. I, II, Johnson Reprint Corp., New York; Teubner, Stuttgart, 1965. [9] С. М. Натанзон, *Модули римановых поверхностей, вещественных алгебраических кривых и их супераналоги*, МЦНМО, М., 2003.

С. М. Натанзон (S. M. Natanzon)
ВШЭ; ИФХБ им. А. Н. Белозерского, МГУ; ИТЭФ
E-mail: natanzons@mail.ru

Представлено С. М. Гусейн-Заде
Принято редколлегией
09.09.2011

А. М. Пратусевич (A. M. Pratushevich)
University of Liverpool
E-mail: annap@liv.ac.uk