Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Ю. Ероховец, Момент-угол многообразия простых n -мерных многогранников с $n + 3$ гипергранями, *УМН*, 2011, том 66, выпуск 5, 187–188

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9446>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 13:24:16

Момент-угол многообразия простых n -мерных многогранников с $n + 3$ гипергранями

Н. Ю. Ероховец

В основе данной публикации лежит работа [1]. Пусть P – простой выпуклый n -мерный многогранник и $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_m\}$ – множество его гиперграней. Каждой гиперграну F_i сопоставим одномерную координатную подгруппу $T^{F_i} \subset T^{\mathcal{F}} = T^m$, грани G сопоставим подгруппу $T^G = \prod_{F_i \supset G} T^{F_i}$. Момент-угол многообразия много-

гранника P определяется как факторпространство $\mathcal{Z}_P = (T^{\mathcal{F}} \times P)/\sim$, где $(t_1, p) \sim (t_2, q) \Leftrightarrow p = q, t_1 t_2^{-1} \in T^{G(p)}, G(p) = \bigcap_{F_i \ni p} F_i$. Топологический тип пространства

$\mathcal{Z}_P$ зависит только от комбинаторного типа многогранника P . Оно имеет структуру гладкого $(m + n)$ -мерного многообразия с каноническим действием тора T^m , индуцированным очевидным действием тора T^m на $T^m \times P$. Ясно, что $\mathcal{Z}_P/T^m = P$ и стабилизатором точки $[(t, q)]$ является $T^{G(q)}$. Числом Бухштабера $s(P)$ называется максимальная размерность подгруппы $H \cong T^s$, действующих свободно. Это число является комбинаторным инвариантом многогранника, причем $1 \leq s(P) \leq m - n$.

ПРОБЛЕМА 1 (В.М. Бухштабер, 2002). Дать алгоритм вычисления инварианта $s(P)$ в терминах комбинаторики многогранника P .

ЛЕММА 1. Пусть $\mathcal{F} = \bigcup_{i=1}^r \mathcal{F}_i$, где $\bigcap_{F_j \in \mathcal{F}_i} F_j = \emptyset$. Тогда $s(P) \geq m - \sum_{i=1}^r |\mathcal{F}_i| + r$.

Простой многогранник P называется k -флаговым, если любой набор его гиперграней, из которых любые k пересекаются, имеет непустое пересечение. Любой n -мерный многогранник, кроме симплекса Δ^n , является n -флаговым.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть P – k -флаговый многогранник. Тогда $s(P) \geq \lceil (m - n)/k \rceil$.

Рассмотрим биградуированную дифференциальную алгебру

$$R^{*,*}(P) = \Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbb{Z}[P]/(v_i^2 = u_i v_i = 0, i = 1, \dots, m),$$

где $\text{bideg } u_i = (-1, 2)$, $\text{bideg } v_i = (0, 2)$, $du_i = v_i$, $dv_i = 0$. В [2] доказан изоморфизм градуированных алгебр $H^*(\mathcal{Z}_P) \simeq H^*[R^*(P)]$, где $\deg x = -q + 2p$ для $x \in R^{-q, 2p}(P)$. Он задает на $H^*(\mathcal{Z}_P)$ структуру биградуированного кольца. Числа $\{\beta^{-q, 2p}(P) = \text{rank } H^{-q, 2p}(\mathcal{Z}_P)\}$ являются комбинаторными инвариантами многогранника P и называются биградуированными числами Бетти. Как известно, число минимальных наборов гиперграней, имеющих пустое пересечение, равно $l(P) = \sum_p \beta^{-1, 2p}(P)$.

Из теоремы 1 (см. ниже) мы получаем следующий результат по проблеме 1.

СЛЕДСТВИЕ 2. Для многогранника P^n с $m = n + 3$ имеем: $s(P) = 3$, если $l(P) \leq 7$, и $s(P) = 2$, если $l(P) > 7$. Таким образом, для многогранника с $m \leq n + 3$ инвариант $s(P)$ выражается через биградуированные числа Бетти $\{\beta^{-q, 2p}(P)\}$.

Известно (см. [3]), что любой простой многогранник P с $m = n + 3$ гипергранями комбинаторно описывается при помощи правильного $(2k - 1)$ -угольника $M_{2k-1} = \text{conv}\{\mathbf{w}_r = e^{2\pi i r/(2k-1)}, r \in \mathbb{Z}_{2k-1}\}$ и следующего обобщения хроматического числа в виде сюръективного отображения $\zeta: \mathcal{F} \rightarrow \text{vert}(M_{2k-1})$ такого, что для любой тройки F_r, F_s, F_t дополнительные к ним гиперграну пересекаются в вершине

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 10-01-92102-ЯФ-а, 11-01-00694-а), гранта Президента РФ МД-2253.2011.1 и гранта Правительства РФ 2010-220-01-077 (дог. 11.G34.31.005).

тогда и только тогда, когда $0 \in \operatorname{conv}\{\zeta(F_r), \zeta(F_s), \zeta(F_t)\}$. Введем числа вершин $a_r = |\zeta^{-1}(w_r)|$ и положим $P \sim (a_1, \dots, a_{2k-1})$. Многогранники P и Q комбинаторно эквивалентны тогда и только тогда, когда существует ортогональное преобразование многоугольников, сохраняющее числа вершин. Для $k \geq 3$ любой многоугольник $(M_{2k-1}, a_1, \dots, a_{2k-1})$ реализуется, а для $k = 2$ имеем $\Delta^a \times \Delta^b \times \Delta^c \sim (a+1, b+1, c+1)$, $a, b, c \geq 0$. Положим $\varphi_r = a_r + \dots + a_{r+k-2}$ и $\psi_r = a_r + \dots + a_{r+k-1}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [4]. Пусть $P \sim (a_1, \dots, a_{2k-1})$. Тогда $s(P) = 3$, если $k \leq 4$, и $s(P) = 2$, если $k \geq 5$.

ТЕОРЕМА 1. Если $P \sim (a_1, \dots, a_{2k-1})$, то $H^{*,*}(\mathcal{Z}_P) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^{2k-1} \oplus \mathbb{Z}^{2k-1} \oplus \mathbb{Z}$ — группа с образующими: $\{1, X_i, Y_j, Z : i, j = 1, \dots, 2k-1\}$, $\operatorname{bideg} X_i = (-1, 2\varphi_i)$, $\operatorname{bideg} Y_j = (-2, 2\psi_j)$, $\operatorname{bideg} Z = (-3, 2(n+3))$. Для $k = 2$ имеем: $X_i^2 = 0$, $X_i X_{i+1} = Y_i$, $X_1 X_2 X_3 = Z$. Для $k \geq 3$ имеем: $X_i X_j = 0$, $X_i Y_j = \delta_{i+k-1, j} Z$, $Y_i Y_j = 0$.

Доказательство опирается на изоморфизм $H^*(\mathcal{Z}_P) \simeq H[R^*(P)]$ и комбинаторику совокупности минимальных множеств непересекающихся гиперграней.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если $P \sim (a_1, \dots, a_{2k-1})$, то $2k-1 = \sum_i \beta^{-1, 2i}(P) = \sum_j \beta^{-2, 2j}(P)$.

Далее P и Q — многогранники с $m = n+3$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Имеем $H^{*,*}(\mathcal{Z}_P) \simeq H^{*,*}(\mathcal{Z}_Q)$ тогда и только тогда, когда биградуированные числа $\beta^{-q, 2p}(P) = \beta^{-q, 2p}(Q)$ равны для всех p, q .

ПРИМЕР 1. Если $P \sim (a, a, \dots, a)$, $a \geq 1$, и $\beta^{-q, 2p}(Q) = \beta^{-q, 2p}(P)$ для всех p, q , то $Q = P$.

ПРИМЕР 2. Если $P \sim (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ и $Q \sim (a_1, a_2, a_4 + a_5 - a_2, a_2 + a_3 - a_5, a_5)$, то $H^{*,*}(\mathcal{Z}_P) = H^{*,*}(\mathcal{Z}_Q)$. В случае $P \sim (1, 1, 2, 2, 2)$ и $Q \sim (1, 1, 3, 1, 2)$, например, многогранники комбинаторно не эквивалентны, но $H^{*,*}(\mathcal{Z}_P) = H^{*,*}(\mathcal{Z}_Q)$.

Известно (см. [4]), что в общем случае число $s(P)$ не определяется f -вектором $f(P)$ и хроматическим числом $\gamma(P)$ многогранника P . Например, для $P \sim (2, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ и $Q \sim (2, 1, 2, 1, 1, 2, 1)$ имеем: $f(P) = f(Q)$, $\gamma(P) = \gamma(Q)$, но $s(P) = 2$, $s(Q) = 3$.

Следствие 2 приводит к вопросу: можно ли вычислить инвариант $s(P)$ по биградуированным числам Бетти $\{\beta^{-q, 2p}(P)\}$ при $m > n+3$?

Результат работы [5] о момент-угол комплексах позволяет связать теорему 1 с результатом Лопе де Медрано [6] о полном пересечении квадрик. Пусть $k = 2$. Тогда $\mathcal{Z}_P = S^{2a+1} \times S^{2b+1} \times S^{2c+1}$, где $P \sim (a+1, b+1, c+1)$. Пусть $k \geq 3$. Тогда $\mathcal{Z}_P = \#_{i=1}^{2k-1} S^{2\varphi_i-1} \times S^{2\psi_{i+k-1}-2}$, где $P \sim (a_1, \dots, a_{2k-1})$.

Автор благодарен В. М. Бухштаберу за постановку задачи и внимание к работе.

Список литературы

- [1] N. Erokhovets, *Buchstaber invariant of simple polytopes*, arXiv:0908.3407v1. [2] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, *Торические действия в топологии и комбинаторике*, МЦНМО, М., 2004. [3] B. Grünbaum, *Convex polytopes*, Springer, New York, 2003. [4] Н. Ю. Ероховец, *УМН*, **63:5** (2008), 187–188. [5] V. M. Buchstaber, T. E. Panov, N. Ray, *Moscow Math. J.*, **7:2** (2007), 219–242; arXiv:0609346. [6] S. López de Medrano, *Lecture Notes in Math.*, **1370**, 1989, 280–292.

Н. Ю. Ероховец (N. Yu. Erokhovets)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: erokhovetsn@hotmail.com

Представлено В. М. Бухштабером
Принято редколлегией
09.09.2011