Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Житлухин, А. А. Муравлёв, Об уравнениях для оптимальных границ в задаче Чернова различения двух гипотез, *УМН*, 2011, том 66, выпуск 5, 183–184

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9447>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 17:06:15

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Об уравнениях для оптимальных границ
в задаче Чернова различения двух гипотез

М. В. Житлухин, А. А. Муравлёв

1. Пусть на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ заданы стандартное броуновское движение $B = (B_t)_{t \geq 0}$ и нормальная случайная величина $\mu \sim \mathcal{N}(\mu_0, \sigma_0^2)$, не зависящая от B . Предполагается, что μ является ненаблюдаемой, а наблюдению подлежит процесс $B^\mu = (B_t^\mu)_{t \geq 0}$ с $B_t^\mu = \mu t + \sigma B_t$, где $\sigma > 0$ — известная константа.

Г. Чернов [1]–[4] рассматривал задачу о проверке гипотез $H_1: \mu > 0$ и $H_2: \mu \leq 0$ по результатам последовательного наблюдения за B^μ , которая состоит в нахождении

$$W = \inf_{(\tau, d)} \mathbb{E} [c\tau + k|\mu| I_{\{d \neq \text{sgn}(\mu)\}}], \quad (1)$$

где $c, k > 0$ — произвольные константы, а инфимум берется по всем *решающим правилам* (τ, d) , состоящим из момента остановки τ , согласованного с фильтрацией $(\mathcal{F}_t^{B^\mu})_{t \geq 0}$, порожденной процессом B^μ , и $\mathcal{F}_\tau^{B^\mu}$ -измеримой функции d , принимающей значения $+1$ и -1 в соответствии с принятием гипотезы H_1 или H_2 в момент τ (в (1) считаем, что $\text{sgn}(0) = -1$). Таким образом, с каждым решающим правилом (τ, d) связана функция потерь $c\tau + k|\mu| I_{\{d \neq \text{sgn}(\mu)\}}$, первая компонента которой является платой за наблюдения (пропорциональной времени наблюдения), а вторая — штрафом за ошибочное решение (пропорциональным абсолютному значению μ). Задача (1) состоит в нахождении правила с минимальными средними потерями.

2. Как показано в [1], без ограничения общности можно считать, что $\sigma = c = k = 1$. В [1] также устанавливается, что задача (1) эквивалентна задаче о нахождении

$$V(t, x) = \sup_{\tau \geq t} \mathbb{E}_{t,x} [G(\tau, X_\tau) - (\tau - t)], \quad t \geq \frac{1}{\sigma_0^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

где процесс $X = (X_t)_{t \geq 1/\sigma_0^2}$ задан как $X_t = B_{t-1/\sigma_0^2}^\mu + \mu_0/\sigma_0^2$ и удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению $dX_t = (X_t/t) dt + d\bar{B}_t$ с броуновским движением $\bar{B}$ (отличным от B); супремум берется по моментам остановки $\tau \geq t$ относительно фильтрации, порожденной процессом X ; $\mathbb{E}_{t,x}$ обозначает условное математическое ожидание $\mathbb{E}(\cdot | X_t = x)$; а $G(t, x) = (|x|/t)\Phi(-|x|/\sqrt{t}) - (1/\sqrt{t})\varphi(x/\sqrt{t})$, где $\Phi(\cdot)$ и $\varphi(\cdot)$ суть стандартные нормальные функция распределения и плотность.

При этом W и $V(t, x)$ связаны соотношением $W = V(1/\sigma_0^2, \mu_0/\sigma_0^2)$, и если τ^* — оптимальный момент остановки в задаче (2) с $t = 1/\sigma_0^2$, $x = \mu_0/\sigma_0^2$, то решающее правило $(\tau^* - 1/\sigma_0^2, d^*)$ с $d^* = \text{sgn}(X_{\tau^*})$ является оптимальным в задаче (1).

3. Воспользуемся тем, что для функции $G(t, x)$ и инфинитезимального оператора $\mathcal{A}$ процесса (t, X_t) справедливо $\mathcal{A}G(t, x) = 0$ при $x \neq 0$ (проверяется непосред-

венно) и $\Delta G'_x(t, 0) = 1/t$. Применяя формулу Ито–Танака находим, что $E_{t,x}G(\tau, X_\tau) = G(t, x) + E_{t,x} \int_t^\tau \frac{dL_s^0(X)}{s}$, где $L^0(X)$ – локальное время процесса X в нуле. Так как $L_t^0(X)$ изменяется только при $X_t = 0$, несложно получить, что оптимальный момент τ^* в задаче (2) имеет вид $\tau^* = \inf\{s \geq t : |X_s| \geq f(s)\}$, где $f(s) > 0$ – некоторая неизвестная функция (оптимальная граница остановки). Из общей теории следует (см. [5]), что f непрерывна, а из характера убывания $G(t, x)$ по t устанавливается, что $f(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$.

4. В работах [2]–[3] были получены асимптотические разложения для f в нуле и на бесконечности. В настоящей работе, следуя [5; гл. IV, § 14], мы получим интегральные уравнения для f . (Единственность его решения будет рассмотрена в другой работе.) По формуле Ито для произвольных $T > t \geq 1/\sigma_0^2$ имеем

$$E_{t,x}V(T, X_T) = V(t, x) + \int_t^T P_{t,x}(|X_s| < f(s)) ds, \quad (3)$$

где мы воспользовались тем, что $\mathcal{A}V(t, x) = 1$ при $|x| < f(t)$ (следует из общей теории об оптимальной остановке), а при $|x| \geq f(t)$ имеем $V(t, x) = G(t, x)$ и $\mathcal{A}G(t, x) = 0$. Далее, с помощью несложных оценок показывается, что $E_{t,x}V(T, X_T) \rightarrow 0$, $T \rightarrow \infty$. Вероятность $P_{t,x}(|X_s| < f(s))$ вычисляется непосредственно, если выразить X через B^μ и воспользоваться тем, что $\text{Law}(\mu | X_t = x) = \mathcal{N}(x/t, 1/t)$ (см. [1]). Тогда, устремляя T к ∞ в (3) и используя условие “непрерывного склеивания” $V(t, f(t)) = G(t, f(t))$ на границе $f(t)$, получаем для $x = f(t)$ уравнение

$$G(t, f(t)) = \int_t^\infty \int_{\mathbb{R}} \left[\Phi\left(\frac{-f(s) - f(t) - \mu(s-t)}{\sqrt{s-t}}\right) - \Phi\left(\frac{f(s) - f(t) - \mu(s-t)}{\sqrt{s-t}}\right) \right] \times \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{t(\mu - x/t)^2}{2}\right\} d\mu ds.$$

Можно получить и более простое уравнение, если перед тем как подставлять $x = f(t)$ продифференцировать обе части (3) по x и использовать условие “гладкого склеивания” $V'_x(t, f(t)) = G'_x(t, f(t))$:

$$\Phi(-g(t)\sqrt{t}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t^\infty \sqrt{\frac{st}{s-t}} \left(\exp\left\{-\frac{(g(s) - g(t))^2 st}{2(s-t)}\right\} - \exp\left\{-\frac{(g(s) + g(t))^2 st}{2(s-t)}\right\} \right) ds,$$

где мы обозначили $g(t) = f(t)/t$. Для сходимости интеграла при $s \rightarrow \infty$ достаточно, чтобы $g(s) = O(s^{-2})$, а для сходимости при $s \rightarrow t$ достаточно, чтобы $g(s)$ была дифференцируемой в точке t . Эти условия выполняются в данной задаче (см. [1]–[2]).

Авторы признательны А. Н. Ширяеву, обратившему их внимание на рассматриваемую задачу.

Список литературы

- [1] H. Chernoff, *Fourth Berkeley Symp.*, **1** (1961), 79–91. [2] J. Breakwell, H. Chernoff, *Ann. Math. Statist.*, **35:1** (1964), 162–173. [3] H. Chernoff, *Ann. Math. Statist.*, **36:1** (1965), 28–54. [4] H. Chernoff, *Ann. Math. Statist.*, **36:1** (1965), 55–68. [5] G. Peskir, A. Shiryaev, *Optimal stopping and free-boundary problems*, Birkhäuser, Basel, 2006.

М. В. Житлухин (M. V. Zhitlukhin)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: zhitlukhin@gmail.com

Представлено Д. В. Трещёвым
Принято редколлегией
09.09.2011

А. А. Муравлёв (A. A. Muravlev)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: almurav@mi.ras.ru