Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Г. Павлова, А. О. Ремизов, Геодезические на гипер-
поверхностях в пространстве Минковского: особенности
смены сигнатуры, *УМН*, 2011, том 66, выпуск 6, 193–194

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9449>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 14:15:52

Геометрические на гиперповерхностях в пространстве Минковского: особенности смены сигнатуры

Н. Г. Павлова, А. О. Ремизов

В этой заметке анонсируются новые результаты о геометрических в вырождающихся (сингулярных) метриках, см. предыдущие работы [1]–[3], а также [4].

Рассматриваются геометрические на гиперповерхности в пространстве Минковского – 4-мерном псевдоевклидовом пространстве с сигнатурой $+++-$. Метрика объемлющего пространства индуцирует на такой гиперповерхности метрику ds^2 , являющуюся римановой (сигнатура $+++$) в одной области и индефинитной (сигнатура $++-$) в другой. Эти области разделены двумерной поверхностью, состоящей из точек, в которых метрика вырождена (ее детерминант Δ обращается в нуль) – так называемые *точки смены сигнатуры*. В точках смены сигнатуры уравнение геодезического потока имеет особенность, приводящую к интересному явлению: геодезические могут проходить через такую точку не в произвольных, а лишь в некоторых *допустимых* направлениях. При этом число геодезических, проходящих через данную точку в разных допустимых направлениях, может быть различно. Этим вопросам и посвящена заметка.

Пусть в объемлющем пространстве Минковского с координатами t, x, y, z метрика имеет вид $-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ и гиперповерхность S задана в виде графика гладкой (класса C^∞) функции. Очевидно, достаточно рассмотреть два случая: $z = f(t, x, y)$ и $t = g(x, y, z)$. Мы ограничимся первым случаем, второй исследуется аналогично.

На гиперповерхности $z = f(t, x, y)$ индуцированная метрика имеет вид

$$ds^2 = a dx^2 + b dy^2 + c dt^2 + 2e dx dy + 2\varepsilon dt dx + 2\delta dt dy \quad (1)$$

с коэффициентами $a = f_x^2 + 1$, $b = f_y^2 + 1$, $c = f_t^2 - 1$, $e = f_x f_y$, $\varepsilon = f_t f_x$, $\delta = f_t f_y$. При этом $\Delta = f_t^2 - f_x^2 - f_y^2 - 1$, и точки смены сигнатуры задаются уравнением $f_t^2 - f_x^2 - f_y^2 = 1$.

Без ограничения общности будем считать рассматриваемую точку смены сигнатуры началом координат 0 пространства t, x, y . Используя подходящее лоренцево преобразование этого пространства, можно добиться выполнения условий $f_x(0) = f_y(0) = 0$, $f_t(0) = \pm 1$, не меняя метрику объемлющего пространства Минковского. Тогда изотропный конус метрики (1) в точке 0 имеет уравнение $dx^2 + dy^2 = 0$, т.е. состоит из единственного изотропного направления $dx : dy : dt = 0 : 0 : 1$. Предположим, что это направление трансверсально поверхности $\Delta = 0$ (это равносильно условию $f_{tt}(0) \neq 0$). В проективизированном касательном расслоении TS введем неоднородные координаты: $p = dx/dt$, $q = dy/dt$.

Геодезические будем определять как экстремали функционала длины в метрике (1). Хотя функционал с лагранжианом $L = \sqrt{F}$, где функция $F(t, x, y; p, q) = ap^2 + 2epq + bq^2 + 2\varepsilon p + 2\delta q + c$ знакопеременная, является комплексным, соответствующее уравнение Эйлера–Лагранжа вещественно и определяет в TS поле направлений, проекции траекторий которого на базу S и являются геодезическими.

Для того, чтобы выписать это поле направлений в явном виде, удобно выбрать в пространстве t, x, y локальные координаты с началом в точке 0, в которых $e(t, x, y)$ тождественно равно 0. Нетрудно показать, что такие координаты существуют, причем переход к ним является гладким диффеоморфизмом с тождественной линейной частью¹. В предположении $e \equiv 0$ искомое поле направлений принимает вид:

$$-2\Delta \left(\frac{\partial}{\partial t} + p \frac{\partial}{\partial x} + q \frac{\partial}{\partial y} \right) + P \frac{\partial}{\partial p} + Q \frac{\partial}{\partial q}, \quad (2)$$

¹Заметим, что в окрестности точки смены сигнатуры ($\Delta = 0$) невозможно диагонализировать метрику (1), т.е. обнулить сразу все три коэффициента e , ε , δ , даже на уровне 1-струй.

где

$$P(t, x, y; p, q) = (ap + \varepsilon) b K_0 + a^{-1} \Delta K_1, \quad Q(t, x, y; p, q) = a(bq + \delta) K_0 - b^{-1} \Delta K_2, \\ K_i(t, x, y; p, q) = \mu_1^i p^2 + 2\mu_2^i pq + \mu_3^i q^2 + 2\mu_4^i p + 2\mu_5^i q + \mu_6^i, \quad i = 0, 1, 2,$$

а коэффициенты $\mu_1^i, \dots, \mu_6^i$ выражаются через коэффициенты $a, b, c, \varepsilon, \delta$ и их производные первого порядка, т.е. являются гладкими функциями от t, x, y .

Чтобы понять расположение траекторий поля (2), заметим, что вертикальный слой касательного расслоения TS , расположенный над точкой смены сигнатуры ($\Delta = 0$), является двумерной инвариантной поверхностью этого поля. Траектории, лежащие на вертикальном слое над точкой 0, в проекции на S дают саму точку 0. Следовательно, геодезические получают лишь из тех траекторий поля (2), которые не лежат на вертикальном слое, т.е. геодезические, проходящие через точку 0, должны иметь касательные направления (p, q) , в которых $P(0; p, q) = 0$ и $Q(0; p, q) = 0$. С учетом равенств $\Delta(0) = 0$ и $\varepsilon(0) = \delta(0) = 0$ полученная система уравнений распадается на $p = q = 0$ и $K_0(0; p, q) = 0$. Это и есть допустимые направления геодезических в точке 0.

В окрестности точки $t = x = y = 0, p = q = 0$ проецивизированного касательного расслоения TS поле направлений (2) гладко эквивалентно

$$2\xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_1 \frac{\partial}{\partial \eta_1} + \eta_2 \frac{\partial}{\partial \eta_2} + 0 \frac{\partial}{\partial \zeta_1} + 0 \frac{\partial}{\partial \zeta_2},$$

и через точку 0 в изотропном направлении $p = q = 0$ проходит двупараметрическое семейство геодезических, имеющих вид полукубических парабол с каспом 0. В этом семействе присутствуют геодезические всех типов: времениподобные, пространственноподобные и изотропные (последние образуют однопараметрическое семейство).

Пусть A – конус асимптотических направлений гиперповерхности $z = f(t, x, y)$, рассматриваемой в евклидовой метрике $dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$, в точке 0. Допустимые направления, определяемые из уравнения $K_0(0; p, q) = 0$, суть направления конуса A . Предположим, что конус A непуст и не пересекается с касательной плоскостью к поверхности $\Delta = 0$ в точке 0. Тогда в окрестности каждой точки $t = x = y = 0, (p, q) \in A$ проецивизированного касательного расслоения TS поле (2) гладко эквивалентно

$$\xi \frac{\partial}{\partial \xi} - \eta \frac{\partial}{\partial \eta} + \xi \eta \frac{\partial}{\partial \zeta_1} + 0 \frac{\partial}{\partial \zeta_2} + 0 \frac{\partial}{\partial \zeta_3},$$

и через точку 0 в каждом асимптотическом направлении $(p, q) \in A$ проходит ровно одна геодезическая, эта геодезическая неизотропная и гладкая. Если конус A пересекается с касательной плоскостью к поверхности $\Delta = 0$, то аналогичный результат имеет место для всех точек $t = x = y = 0, (p, q) \in A$, кроме точек, соответствующих направлениям пересечения.

Список литературы

- [1] А. О. Ремизов, *Матем. сб.*, **200:3** (2009), 75–94. [2] А. О. Ремизов, Тр. МИАН, **268**, 2010, 258–267. [3] А. О. Ремизов, *УМН*, **65:1**(391) (2010), 187–188. [4] D. Genin, B. Khesin, S. Tabachnikov, *Enseign. Math.* (2), **53:3-4** (2007), 307–331; B. Khesin, S. Tabachnikov, *Adv. in Math.*, **221:4** (2009), 1364–1396.

Н. Г. Павлова (N. G. Pavlova)

Российский университет дружбы народов, Москва

E-mail: natasharussia@mail.ru

Представлено М. И. Зеликиным

Принято редколлегией

20.10.2011

А. О. Ремизов (A. O. Remizov)

École Polytechnique, Centre de Mathématiques,
Palaiseau, France

E-mail: remizov@cmap.polytechnique.fr