Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Субботин, Минимаксные решения уравнений с частными производными первого порядка, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 2, 105–138

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm945>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 15:54:17

УДК 517.952+517.977

МИНИМАКСНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

А. И. СУББОТИН

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	105
§ 1 . Некоторые понятия и результаты негладкого анализа	108
§ 2 . Основные определения	110
§ 3 . Эквивалентность минимаксных и вязкостных решений	115
§ 4 . Обобщенные характеристики	117
§ 5 . Кусочно гладкие решения	120
§ 6 . Задача Коши для уравнения Гамильтона–Якоби	123
§ 7 . Разрывные решения задачи Дирихле для УЧП первого порядка	127
§ 8 . Минимаксные решения и функция цены дифференциальной игры	130
Список литературы	136

Введение

Нелинейные уравнения с частными производными (УЧП) первого порядка рассматриваются во многих разделах математики, механики и физики. Как правило, имеющие содержательный смысл решения краевых задачи и задач Коши для этих уравнений не являются дифференцируемыми в классическом смысле функциями. В 50-х–70-х годах задачи, в которых требуется вводить негладкие решения УЧП 1-го порядка, рассматривали многие математики. Обзор исследований, проведенных в этой области, выходит за рамки данной работы. Достаточно полная библиография имеется в [12], [14], [36].

Среди работ этого периода отметим результаты С. Н. Кружкова. В частности, была рассмотрена задача Коши–Дирихле для уравнения

$$F(x, u, Du) = 0.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 93-011-16032).

Приведем, опуская некоторые детали, определение решения, введенное в работе [13]. Обобщенным решением называется функция $u(x)$ из класса E , удовлетворяющая граничному условию и указанному уравнению в каждой точке, где она дифференцируема. Класс E – совокупность функций $u(x)$ таких, что для любого шара $K_r(y) = \{x : \|x - y\| < r\}$ из области определения и для любых $x - \xi, x, x + \xi \in K_r(y)$ должно выполняться неравенство $u(x - \xi) - 2u(x) + u(x + \xi) \geq -c(y, r)\|\xi\|^2$. Важным условием, при котором была доказана единственность этого обобщенного решения, было предположение о выпуклости функции $s \rightarrow F(x, z, s)$.

В последние годы публикуется много работ зарубежных авторов, посвященных исследованиям вязкостных решений, которые были введены в начале 80-х годов М. Дж. Крэндаллом и П.-Л. Лионсом [35], [36]. Теория вязкостных решений позволила существенно продвинуть исследования УЧП 1-го порядка и эллиптических уравнений. В рамках этой теории доказаны теоремы единственности и существования для различных типов уравнений и краевых задач, изучены также некоторые приложения к задачам управления и дифференциальных игр. Обзор результатов, полученных в теории вязкостных решений, имеется в работе [34]. Определение вязкостного решения будет приведено в § 2, ниже приводятся также некоторые факты, относящиеся к теории вязкостных решений.

В данной работе рассматриваются минимаксные решения УЧП 1-го порядка, происхождение которых связано с теорией дифференциальных игр. Отметим сначала, что минимаксные операции (в частности, операции минимума и максимума) присущи обобщенным решениям УЧП 1-го порядка и проявляются в различных конструкциях, например, в известных формулах Хопфа [43] и в исследованиях на базе идемпотентного анализа, которые проводят в последнее время В. П. Маслов и его сотрудники. Концепция обобщенного решения, предлагаемая в работах этого направления (см., например, [6], [18]) подобна классическим подходам. Главное отличие состоит в том, что традиционная структура поля в $\mathbb{R}$ с операциями $a + b$ и $a \cdot b$ заменяется структурой полукольца с операциями $a \oplus b = \min(a, b)$, $a \odot b = a + b$. Согласно этому подходу “скалярное произведение” функций f и g определяется равенством $(f, g) = \inf_{x \in X} (f(x) + g(x))$. На базе этого подхода развиты исследования УЧП 1-го порядка с выпуклым по импульсной переменной гамильтонианом и получены приложения к задачам математической физики.

Основные понятия и результаты, представленные в настоящей работе, возникли как развитие исследований, которые проводились в теории позиционных дифференциальных игр в 60-х–70-х годах Н. Н. Красовским и его сотрудниками (см., например, [7], [11]). Важное место в этой теории занимают u -стабильные и v -стабильные функции, которые мажорируют и минорируют функцию цены дифференциальной игры. Функция цены – единственная функция, обладающая одновременно свойствами u - и v -стабильности. Известно также, что функция цены в тех точках, где она дифференцируема, удовлетворяет УЧП 1-го порядка (уравнению Айзекса–Беллмана). Таким образом, упомянутые свойства определяют одно и только одно обобщенное (минимаксное) решение уравнения Айзекса–Беллмана.

Свойство u -стабильности (v -стабильности) означает слабую инвариантность надграфика (подграфика) функции относительно некоторого семейства дифференциальных включений. Эти свойства можно выразить различными способами, в том числе в

дифференциальной форме, например, неравенствами для производных по направлениям. Такие неравенства были введены в работах [22], [26] для определения обобщенного (минимаксного) решения уравнения Айзекса–Беллмана. Они были, по-видимому, первыми среди различных по форме определений (включая определения вязкостных решений), в основе которых лежит пара дифференциальных неравенств.

В дальнейшем было показано (см., например, [23]), что предлагаемый подход можно использовать для изучения широкого круга краевых задач и задач Коши для различных типов УЧП 1-го порядка, т.е. не только для уравнений Айзекса–Беллмана. При этом сохраняется конструктивная основа подхода, согласно которому минимаксное решение должно быть слабо инвариантно относительно “характеристических” дифференциальных включений, т.е. по графику минимаксного решения через любую точку графика должны проходить траектории этих обыкновенных дифференциальных включений.

Исследования минимаксных решений существенно опираются на методы негладкого анализа. Необходимые сведения из этой области приведены в §1. Этот параграф содержит определения контингентных конусов, производных по направлениям, суб- и супердифференциалов. В §1 приведено также определение свойства слабой инвариантности множества относительно дифференциального включения. Сформулированы критерии слабой инвариантности.

В §2 сформулированы теоремы об эквивалентности различных определений минимаксных решений УЧП 1-го порядка. Показана совместность минимаксных и классических решений. Различные по форме (двойственные) определения расширяют возможности теории обобщенных решений УЧП 1-го порядка и ее приложений.

Доказательство эквивалентности минимаксных и вязкостных решений приведено в §3. Важную роль в этом доказательстве играет лемма 1.1 из §1 об отделимости выпуклого компакта и надграфика первой вариации полунепрерывной снизу функции (вообще говоря, невыпуклой). Отметим, что из этой леммы следует также возможность овыпукления контингентных конусов и производных по направлениям, используемых в определениях минимаксных решений. Выпуклые структуры инфинитезимальных конструкций подтверждают известные из классической теории замечания о том, что теория уравнений Гамильтона–Якоби переплетена с идеей двойственности и выпуклости.

В §4 показано, что определение минимаксного решения в форме свойства слабой инвариантности его графика, можно трактовать как редукцию или релаксацию классического метода характеристик. Используемые в этом определении дифференциальные включения называются характеристическими. Для некоторых типов УЧП 1-го порядка удобно ввести характеристические дифференциальные включения специального вида, учитывающего специфику уравнения. Эти построения описаны во второй части §4.

В §5 рассматриваются кусочно-гладкие минимаксные решения. Согласно определению кусочно-гладкой функции, область, на которой она задана, разбивается на гладкие многообразия так, что сужения функции на эти многообразия дифференцируемы. Показано, что общие определения из §2 приводят к следующему положению: кусочно-гладкая функция является обобщенным решением (в минимаксном и/или вязкостном смысле) тогда и только тогда, когда ее сужения на многообразия, образую-

шие упомянутое разбиение, удовлетворяют в классическом смысле некоторым УЧП 1-го порядка, определенным в § 5.

В рамках минимаксного подхода можно доказать существование и единственность решения для широкого круга краевых задач и задач Коши. В качестве примера в § 6 сформулирована теорема существования и единственности задачи Коши для уравнения Гамильтона–Якоби. Приведено доказательство единственности минимаксного решения, которое опирается на метод функций Ляпунова. В общих чертах описано также доказательство существования решения.

В § 7 рассматривается задача типа Дирихле для УЧП 1-го порядка. В этой задаче приходится вводить определение разрывных минимаксных решений. Сформулирована теорема существования и единственности такого решения. Отмечено, что необходимость вводить разрывные решения возникает, например, в задачах оптимального быстрогодействия и в теории сингулярно возмущенных уравнений эллиптического типа. Приведен простой иллюстрирующий пример.

Как отмечалось выше, происхождение понятия минимаксного решения и методы исследований минимаксных решений тесно связаны с теорией позиционных дифференциальных игр. В последнем параграфе приведены основные понятия этой теории, в частности, даны определения u -стабильных (v -стабильных) функций. Показано, что эти понятия эквивалентны понятиям верхних (нижних) решений уравнения Айзекса–Беллмана.

Список основных обозначений

$\mathbb{R}^n$ – n -мерное евклидово пространство,

$\langle x, y \rangle$ – скалярное произведение $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$\|x\| := \langle x, x \rangle^{1/2}$,

$\text{conv } \mathbb{R}^n$ – совокупность выпуклых компактных множеств $M \subset \mathbb{R}^n$,

$\text{gr } u$ – график функции $\mathbb{R}^n \supset G \ni x \rightarrow u(x) \in \mathbb{R}$, т.е. $\text{gr } u := \{(x, u(x)) : x \in G\}$,

$\text{epi } u := \{(x, z) : z \geq u(x), x \in G\}$ (надграфик функции u),

$\text{hypo } u := \{(x, z) : z \leq u(x), x \in G\}$ (подграфик функции u).

§ 1. Некоторые понятия и результаты негладкого анализа

1. Пусть W – непустое множество в $\mathbb{R}^m$. Положим

$$(1.1) \quad T(w; W) := \left\{ h \in \mathbb{R}^m : \liminf_{\delta \downarrow 0} \frac{\text{dist}(w + \delta h; W)}{\delta} = 0 \right\},$$

где $\text{dist}(y; W) := \inf_{w \in W} \|y - w\|$ – расстояние от точки y до множества W . Множество $T(w; W)$ называется конусом, контингентным к множеству W в точке w (оно называется также конусом Булигана, верхним касательным конусом).

Пусть G – открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $u : G \rightarrow \mathbb{R}$ – некоторая вещественная функция. Будем использовать следующие обозначения:

$$(1.2) \quad d^- u(x; f) := \liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \left\{ \frac{u(x + \varepsilon f') - u(x)}{\varepsilon} : \varepsilon \in (0, \varepsilon), \|f - f'\| < \varepsilon \right\},$$

$$(1.3) \quad d^+ u(x; f) := \limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \left\{ \frac{u(x + \varepsilon f') - u(x)}{\varepsilon} : \varepsilon \in (0, \varepsilon), \|f - f'\| < \varepsilon \right\}.$$

Величины $d^-u(x; f)$ и $d^+u(x; f)$ называют нижней и верхней полупроизводными Дини функции u в точке $x \in G$ по направлению $f \in \mathbb{R}^n$, в некоторых работах они называются производными Адамара, используются также другие термины.

Нетрудно проверить, что

$$(1.4) \quad d^-u(x; f) = \inf \{g \in \mathbb{R} : (f, g) \in T((x, u(x)); \text{epi } u)\},$$

$$(1.5) \quad d^+u(x; f) = \sup \{g \in \mathbb{R} : (f, g) \in T((x, u(x)); \text{hypo } u)\},$$

где $T((x, u(x)); \text{epi } u)$ и $T((x, u(x)); \text{hypo } u)$ – конусы, контингентные к надграфику и подграфику функции u в точке $(x, u(x))$.

Положим

$$(1.6) \quad D^-u(x) := \{p \in \mathbb{R}^n : \langle p, f \rangle - d^-u(x; f) \leq 0 \ \forall f \in \mathbb{R}^n\},$$

$$(1.7) \quad D^+u(x) := \{p \in \mathbb{R}^n : \langle p, f \rangle - d^+u(x; f) \geq 0 \ \forall f \in \mathbb{R}^n\}.$$

Множество $D^-u(x)$ (множество $D^+u(x)$) называется субдифференциалом (супердифференциалом) функции u в точке $x \in G$. Элементы множества $D^-u(x)$ (множества $D^+u(x)$) называются субградиентами (суперградиентами).

Более полное представление о приведенных выше понятиях и, в целом, о негладком анализе можно получить во многих книгах (см., например, [3], [4]).

2. Важную роль в дальнейшем играет следующая

ЛЕММА 1.1. Пусть v – полунепрерывная снизу функция, определенная на открытом множестве $Y \subset \mathbb{R}^m$. Пусть H – выпуклое компактное множество в $\mathbb{R}^m$, и пусть $y_0 \in Y$. Предположим, что выполнено неравенство

$$(1.8) \quad \inf_{h \in H} d^-v(y_0; h) > 0.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует точка $y_\varepsilon \in Y$ и субградиент $s_\varepsilon \in D^-v(y_\varepsilon)$ такие, что

$$(1.9) \quad \|y_0 - y_\varepsilon\| < \varepsilon, \quad \inf_{h \in H} \langle s_\varepsilon, h \rangle > 0,$$

$$(1.10) \quad |v(y_0) - v(y_\varepsilon)| < \varepsilon.$$

Импликация (1.8) $\Rightarrow$ (1.9) была получена в [24]. Этот результат был усилен в работе [5], в частности, было показано, что точку y_ε можно выбрать так, чтобы выполнялись не только соотношения (1.9), но и неравенство (1.10).

3. Напомним понятие множества, слабо инвариантного относительно дифференциального включения. Пусть W – непустое локально замкнутое множество в $\mathbb{R}^m$, т.е. для любой точки $w_0 \in W$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что пересечение $W \cap B(w_0; \varepsilon)$ замкнуто. Здесь и ниже $B(w; r) := \{y \in \mathbb{R}^m : \|y - w\| \leq r\}$ – замкнутый шар. Рассмотрим многозначное отображение

$$W \ni w \rightarrow E(w) \in \text{conv } \mathbb{R}^m,$$

удовлетворяющее следующему свойству полунепрерывности сверху: для любой точки $w_0 \in W$ и любого числа $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любой точки $w \in B(w_0; \delta) \cap W$

$$E(w) \subset E(w_0) + B(0; \varepsilon) := \{e \in \mathbb{R}^m : \text{dist}(e, E(w_0)) \leq \varepsilon\}.$$

Множество W называется слабо инвариантным относительно дифференциального включения

$$(1.11) \quad \dot{w}(t) \in E(w(t)),$$

если для любой точки $w_0 \in W$ существует $\theta > 0$ и абсолютно непрерывная функция $[0, \theta] \ni t \rightarrow w(t): [0, \theta] \mapsto W$, удовлетворяющая этому дифференциальному включению при почти всех $t \in [0, \theta]$ и начальному условию $w(0) = w_0$. Такая функция $w(t)$ называется траекторией, выживающей в множестве W . Следующая теорема содержит критерий слабой инвариантности.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть $E: W \mapsto \text{сopv } \mathbb{R}^m$ – полунепрерывное сверху многозначное отображение, $W \subset \mathbb{R}^m$ – локально замкнутое множество. Тогда следующие три условия эквивалентны:

- (а) множество W слабо инвариантно относительно дифференциального включения (1.11);
- (б) $T(w; W) \cap E(w) \neq \emptyset \quad \forall w \in W$;
- (с) $\text{co}T(w; W) \cap E(w) \neq \emptyset \quad \forall w \in W$.

Отметим, что критерий слабой инвариантности в форме условия (б) был получен в работе Хаддада [42]. Слабо и сильно инвариантные множества и их приложения в теории управления и теории дифференциальных игр изучались многими авторами (см., например, [16], [28], [31], [41], [42] и обзор в [27]). Первый результат в этом направлении был опубликован в работе [47], в которой были получены необходимые и достаточные условия слабой инвариантности множества относительно дифференциального уравнения. Отметим, что критерии слабой инвариантности, близкие по своему содержанию теореме Хаддада, были независимо получены в ряде работ. Эквивалентность условий (б) и (с) следует из леммы 1.1, доказательство приведено в [25]. Результат, близкий к теореме 1.1, был получен в работе [41], относящейся к теории дифференциальных игр, где рассматривались дифференциальные включения, с непрерывной многозначной правой частью.

§ 2. Основные определения

1. Рассмотрим уравнение с частными производными первого порядка

$$(2.1) \quad F(x, u(x), Du(x)) = 0, \quad x \in G \subset \mathbb{R}^n,$$

где G – открытое множество в $\mathbb{R}^n$, Du – градиент вещественной функции u , определенной на множестве G . Будем предполагать, что функция $(x, z, p) \rightarrow F(x, z, p): G \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по переменной p :

$$(2.2) \quad |F(x, z, p) - F(x, z, q)| \leq \|p - q\| \rho(x, z) \quad \forall (p, q) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,$$

где $\rho(x, z)$ — функция, непрерывная на $G \times \mathbb{R}$. Предполагается также, что функция $z \rightarrow F(x, z, p)$ не возрастает, т.е.

$$(2.3) \quad F(x, z', p) \geq F(x, z'', p) \quad \forall z' \leq z'', (x, p) \in G \times \mathbb{R}^n.$$

Условие (2.2) позволяет упростить конструкции минимаксного решения, его можно заменить более слабым предположением (см. ниже п. 5). Условие (2.3) используется в доказательстве эквивалентности различных по форме определений минимаксных и вязкостных решений, оно используется также в доказательствах основных теорем единственности и существования решений. Заметим, что это условие выполняется для большинства задач, возникающих в теории оптимального управления и дифференциальных игр.

В основе определения минимаксного решения лежит свойство слабой инвариантности его графика относительно так называемых характеристических дифференциальных включений. Это свойство можно выразить различными способами. Приведем сначала следующее наиболее простое по форме определение.

Минимаксным решением уравнения (2.1) называется непрерывная функция $G \ni x \rightarrow u(x) \in \mathbb{R}$ такая, что для любых $(x_0, z_0) \in \text{gr } u$ и $p \in \mathbb{R}^n$ существуют число $\tau > 0$ и липшицева функция $(x(\cdot), z(\cdot)): [0, \tau] \mapsto G \times \mathbb{R}$, удовлетворяющая уравнению

$$(2.4) \quad \dot{z}(t) = \langle \dot{x}(t), p \rangle - F(x(t), z(t), p) \quad \text{при п.в. } t \in [0, \tau],$$

начальному условию $(x(0), z(0)) = (x_0, z_0)$ и равенству $z(t) = u(x(t))$ при всех $t \in [0, \tau]$.

Исходя из этого определения, нетрудно показать, что минимаксное решение совместно с классическим, т.е. классическое решение (если оно существует) удовлетворяет определению минимаксного, с другой стороны, минимаксное решение удовлетворяет уравнению (2.1) в каждой точке, где это решение дифференцируемо. Ниже этот факт будет получен как прямое следствие теоремы 2.2.

Минимаксное решение можно определить также как функцию, которая одновременно является верхним и нижним решением уравнения (2.1). Эти понятия играют важную роль в теории обобщенных (минимаксных и вязкостных) решений УЧП 1-го порядка. В частности, доказательство единственности обобщенного решения сводится к проверке неравенства $u \geq v$, где u и v — произвольные верхнее и нижнее решения. Рассмотрим сначала определение верхних и нижних решений, которое не требует каких-либо предварительных конструкций.

Верхним (нижним) решением уравнения (2.1) называется полунепрерывная снизу (соответственно, сверху) функция $G \ni x \rightarrow u(x) \in \mathbb{R}$, удовлетворяющая следующему условию: для любых $(x_0, z_0) \in \text{epi } u$ (соответственно, $(x_0, z_0) \in \text{hypo } u$) и $p \in \mathbb{R}^n$ существуют число $\tau > 0$ и липшицева функция $(x(\cdot), z(\cdot)): [0, \tau] \mapsto G \times \mathbb{R}$, удовлетворяющая уравнению (2.4), начальному условию $(x(0), z(0)) = (x_0, z_0)$ и неравенству $z(t) \geq u(x(t))$ (соответственно, $z(t) \leq u(x(t))$) при всех $t \in [0, \tau]$.

2. Рассмотрим теперь другие определения, в том числе, с помощью инфинитезимальных конструкций негладкого анализа: контингентных конусов, производных по направлениям, субдифференциалов и супердифференциалов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Минимаксным решением уравнения (2.1) называется непрерывная функция $u: G \mapsto \mathbb{R}$, удовлетворяющая одному из эквивалентных условий (def.1)–(def.6), указанных в теореме 2.2. Верхним (нижним) минимаксным решением уравнения (2.1) называется полунепрерывная снизу (сверху) функция $u: G \mapsto \mathbb{R}$, удовлетворяющая одному из эквивалентных условий (def.1a)–(def.7a) (условий (def.1b)–(def.7b)), указанных в теореме 2.1.

ТЕОРЕМА 2.1. Для полунепрерывной снизу функции $u: G \rightarrow \mathbb{R}$ эквивалентны следующие свойства:

(def.1a) для любых $x_0 \in G$, $z_0 \geq u(x_0)$ и $p \in \mathbb{R}^n$ существует липшицева функция $(x(\cdot), z(\cdot)): [0, \tau] \mapsto G \times \mathbb{R}$, определенная на некотором отрезке $[0, \tau]$, $\tau > 0$, удовлетворяющая равенству $(x(0), z(0)) = (x_0, z_0)$ и неравенству

$$z(t) = z_0 + \int_0^t [\langle \dot{x}(\zeta), p \rangle - F(x(\zeta), z(\zeta), p)] d\zeta \geq u(x(t)) \quad \text{при } t \in [0, \tau];$$

(def.2a) (слабая инвариантность надграфика) при любом выборе вектора $p \in \mathbb{R}^n$ надграфик функции u слабо инвариантен относительно характеристического дифференциального включения

$$(2.5) \quad (\dot{x}(t), \dot{z}(t)) \in E(x(t), z(t), p),$$

где

$$(2.6) \quad E(x, z, p) := \{(f, g) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \|f\| \leq \rho(x, z), \quad g = \langle f, p \rangle - F(x, z, p)\};$$

(def.3a) $T((x, u(x)); \text{epi } u) \cap E(x, u(x), p) \neq \emptyset \quad \forall x \in G, p \in \mathbb{R}^n$;

(def.4a) $\text{co } T((x, u(x)); \text{epi } u) \cap E(x, u(x), p) \neq \emptyset \quad \forall x \in G, p \in \mathbb{R}^n$;

(def.5a) $F(x, u(x), s) \leq 0 \quad \forall x \in G, s \in D^-u(x)$;

(def.6a) $\inf \{d^-u(x; f) - g : (f, g) \in E(x, u(x), p)\} \leq 0 \quad \forall x \in G, p \in \mathbb{R}^n$;

(def.7a) $\inf \{d^-u(x; f) - \langle p, f \rangle + F(x, u(x), p) : f \in \mathbb{R}^n\} \leq 0 \quad \forall x \in G, p \in \mathbb{R}^n$.

Аналогично, для полунепрерывной сверху функции u эквивалентны следующие свойства:

(def.1b) для любых $x_0 \in G$, $z_0 \leq u(x_0)$ и $p \in \mathbb{R}^n$ существует липшицева функция $(x(\cdot), z(\cdot)): [0, \tau] \mapsto G \times \mathbb{R}$, определенная на некотором отрезке $[0, \tau]$, $\tau > 0$, удовлетворяющая равенству $(x(0), z(0)) = (x_0, z_0)$ и неравенству

$$z(t) = z_0 + \int_0^t [\langle \dot{x}(\zeta), p \rangle - F(x(\zeta), z(\zeta), p)] d\zeta \leq u(x(t)) \quad \text{при } t \in [0, \tau];$$

(def.2b) (слабая инвариантность подграфика) при любом выборе вектора $p \in \mathbb{R}^n$ подграфик функции u слабо инвариантен относительно характеристического дифференциального включения (2.5);

(def.3b) $T((x, u(x)); \text{hypo } u) \cap E(x, u(x), p) \neq \emptyset \quad \forall x \in G, p \in \mathbb{R}^n$;

(def.4b) $\text{co } T((x, u(x)); \text{hypo } u) \cap E(x, u(x), p) \neq \emptyset \quad \forall x \in G, p \in \mathbb{R}^n$;

(def.5b) $F(x, u(x), s) \geq 0 \quad \forall x \in G, s \in D^+u(x)$;

(def.6b) $\sup \{d^+u(x; f) - g : (f, g) \in E(x, u(x), p)\} \geq 0 \quad \forall x \in G, p \in \mathbb{R}^n$;

(def.7b) $\sup \{d^+u(x; f) - \langle p, f \rangle + F(x, u(x), p) : f \in \mathbb{R}^n\} \geq 0 \quad \forall x \in G, p \in \mathbb{R}^n$.

В формулировке теоремы 2.2 используются следующие обозначения. Пусть $u: G \mapsto \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Символом $T(u)(x)$ будем обозначать конус, контингентный к $g u$ в точке $(x, u(x))$, т.е. $T(u)(x) := T((x, u(x)); g u)$. Положим

$$(2.7) \quad \Gamma(x, z, p) := \{(f, g) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : g = \langle f, p \rangle - F(x, z, p)\}.$$

ТЕОРЕМА 2.2. *Для непрерывной функции $u: G \mapsto \mathbb{R}$ эквивалентны следующие свойства:*

- (def.1) *для любых $(x_0, z_0) \in g u$ и $p \in \mathbb{R}^n$ существуют число $\tau > 0$ и липшицева функция $(x(\cdot), z(\cdot)): [0, \tau] \mapsto G \times \mathbb{R}$, удовлетворяющая уравнению (2.4), начальному условию $(x(0), z(0)) = (x_0, z_0)$ и равенству $z(t) = u(x(t))$ при всех $t \in [0, \tau]$;*
- (def.2) *(слабая инвариантность графика) при любом выборе вектора $p \in \mathbb{R}^n$ график функции u слабо инвариантен относительно характеристического дифференциального включения (2.5);*
- (def.3) $T(u)(x) \cap E(x, u(x), p) \neq \emptyset \quad \forall x \in G, p \in \mathbb{R}^n$;
- (def.4) $co T(u)(x) \cap E(x, u(x), p) \neq \emptyset \quad \forall x \in G, p \in \mathbb{R}^n$;
- (def.5) *функция u одновременно является верхним и нижним минимаксным решением, т.е. удовлетворяет паре условий (def.ia), (def.jb), сформулированных в теореме 2.1 ($i, j = 1, 2, \dots, 7$);*
- (def.6) $T(u)(x) \cap \Gamma(x, u(x), p) \neq \emptyset \quad \forall x \in G, p \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство одного из наиболее важных утверждений теорем 2.1 и 2.2 приведено в §3. Заметим, что указанные в этих теоремах соотношения эквивалентны, если они выполняются при всех x из открытой области G . Если рассматривать эти условия в фиксированной точке x , то некоторые из указанных условий будут неравносильны. Например, если условие (def.4a) рассматривать для фиксированной точки x , то понятно, что в этом случае условие (def.3a) может не выполняться.

3. Проверим совместность минимаксных и классических решений. Воспользуемся определением в форме условия (def.6) из теоремы 2.2. Пусть функция u дифференцируема в точке x . Тогда

$$T(u)(x) = \{(f, g) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : g = \langle f, Du(x) \rangle\},$$

т.е. здесь контингентный конус $T(u)(x)$ является гиперплоскостью. Если $p \neq Du(x)$, то две гиперплоскости $T(u)(x)$ и $\Gamma(x, u(x), p)$ обязательно пересекаются. Поэтому в случае, когда функция u дифференцируема в точке x , условие (def.6) равносильно условию

$$\{(f, g) : g = \langle f, Du(x) \rangle\} \cap \{(f, g) : g = \langle f, Du(x) \rangle - F(x, u(x), Du(x))\} \neq \emptyset.$$

Очевидно, что последнее условие эквивалентно равенству (2.1). Итак, получаем, что минимаксные и классические решения совместны.

Исследования минимаксных решений базируются на определении в форме условий (def.2a) и (def.2b) (условий слабой инвариантности надграфика и подграфика относительно дифференциальных включений (2.5)). В частности, в доказательстве теорем

существования и единственности минимаксных решений краевых задач для уравнения (2.1) используется определение в форме этих условий.

4. Напомним определение вязкостного решения уравнения (2.1), введенное М. Дж. Крэндаллом и П.-Л. Лионсом [35], [36]. Заметим сначала, что в этих работах предполагается, что функция $z \rightarrow F(x, z, s)$ не убывает. В наших построениях удобнее полагать, что она не возрастает. Поэтому в данной работе дифференциальные неравенства имеют знаки, противоположные тем, что приведены в работах [32], [35], [36] и последующих статьях по теории вязкостных решений.

Верхним (нижним) вязкостным решением уравнения (2.1) называется непрерывная функция $u(x)$, удовлетворяющая следующему условию: если разность функций $u(x) - \varphi(x)$ достигает локального минимума (максимума) в точке x_0 и в этой точке функция φ дифференцируема, то должно выполняться неравенство

$$F(x_0, u(x_0), D\varphi(x_0)) \leq (\geq) 0.$$

Вязкостным решением называется функция, которая одновременно обладает свойствами верхнего и нижнего решений.

Нетрудно проверить, что верхнее (нижнее) вязкостное решение можно определить как непрерывную функцию, удовлетворяющую неравенству (def.5a) (соответственно, (def.5b)). Эти неравенства были введены в работе [32]. Происхождение термина “вязкостное решение” связано с методом исчезающей вязкости, который использовался сначала для доказательства существования решения (см., например, [32], [36]). Известно, что предел последовательности решений эллиптических или параболических уравнений сходится к вязкостному решению УЧП 1-го порядка, в которое вырождается соответствующая последовательность сингулярно возмущенных уравнений.

Согласно теоремам 2.1 и 2.2 вязкостные и минимаксные решения эквивалентны. Отметим, что доказательство этого факта опирается на лемму 1.1, из которой следует также возможность выпукления инфинитезимальных конструкций (например, возможность замены контингентных конусов их выпуклыми оболочками). Различные по форме (двойственные) определения дают возможность взглянуть с разных точек зрения на одно и то же понятие и расширяют средства изучения обобщенных (минимаксных и вязкостных) решений.

5. В заключение этого параграфа заметим, что условие Липшица (2.2) можно заменить более слабым предположением

$$(2.8) \quad |F(x, z, p) - F(x, z, q)| \leq \mu(x, z, p)(1 + \|p - q\|) \quad \forall q \in \mathbb{R}^n,$$

где $\mu(x, z, p)$ — непрерывная функция. Определения, в которых не фигурируют характеристические дифференциальные включения (например, определения (def.5a), (def.7a), (def.6)) остаются без изменений. Однако для доказательства таких утверждений, как единственность минимаксных решений, требуется определить верхние и нижние решения в форме условий слабой инвариантности их надграфиков и подграфиков. В случае, когда условие (2.2) заменяется предположением (2.8), определение (def.2a) трансформируется следующим образом: для любых $p \in \mathbb{R}^n$, $\alpha > 0$ и

$(x_0, z_0) \in \text{epi } u$ и существуют числа $\tau > 0$, $\rho > 0$ и траектория $(x(\cdot), z(\cdot))$ дифференциального включения

$$(2.9) \quad (\dot{x}, \dot{z}) \in E(x, z, p, \alpha, \rho)$$

такие, что $(x(0), z(0)) = (x_0, z_0)$, $(x(t), z(t)) \in \text{epi } u$ при $t \in [0, \tau]$. Здесь

$$E(x, z, p, \alpha, \rho) := \{(f, g) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \|f\| \leq \rho, |g - \langle p, f \rangle + F(x, z, p)| \leq \alpha\}.$$

Аналогично формулируется условие слабой инвариантности подграфика нижнего минимаксного решения.

§3. Эквивалентность минимаксных и вязкостных решений

Доказательство всех утверждений теорем 2.1 и 2.2 заняло бы много места, поэтому приведем лишь доказательство эквивалентности условий (def.5a) и (def.6a). Условие (def.5a) определяет верхнее вязкостное решение, условие (def.6a) – одно из определений верхнего минимаксного решения.

Пусть выполнено условие (def.6a). Выберем произвольно $s \in D^-u(x)$. Отметим, что функция $f \rightarrow d^-u(x; f)$ полунепрерывна снизу, поэтому согласно условию (def.6a) при некотором $(f_*, g_*) \in E(x, u(x), s)$ имеет место неравенство

$$d^-u(x; f_*) - g_* = d^-u(x; f_*) - \langle f_*, s \rangle + F(x, u(x), s) \leq 0$$

(здесь использовано равенство (2.6)). По определению субдифференциала (1.6) имеем также неравенство $d^-u(x; f_*) - \langle s, f_* \rangle \geq 0$. Объединяя эти неравенства, получаем $F(x, u(x), s) \leq 0$. Импликация (def.6a) $\Rightarrow$ (def.5a) доказана.

В доказательстве импликации (def.5a) $\Rightarrow$ (def.6a) используется равенство

$$(3.1) \quad \max_{q \in \mathbb{R}^n} \min_{(f, g) \in E(x, z, q)} [\langle s, f \rangle - g] = F(x, z, s).$$

Приведем вывод этого равенства. Непосредственно из (2.6) имеем неравенство

$$\max_{q \in \mathbb{R}^n} \min_{(f, g) \in E(x, z, q)} [\langle s, f \rangle - g] \geq \min_{(f, g) \in E(x, z, s)} [\langle s, f \rangle - g] = F(x, z, s).$$

Положим

$$f_* = \frac{F(x, z, q) - F(x, z, s)}{\|q - s\|^2} (q - s), \quad g_* = \langle q, f_* \rangle - F(x, z, q).$$

Заметим, что $g_* = \langle s, f_* \rangle - F(x, z, s)$ и $\|f_*\| \leq \rho(x, z)$. Поэтому

$$(f_*, g_*) \in E(x, z, q) \cap E(x, z, s),$$

$$\min_{(f, g) \in E(x, z, q)} [\langle s, f \rangle - g] \leq [\langle s, f_* \rangle - g_*] = F(x, z, s).$$

Следовательно,

$$\max_{q \in \mathbb{R}^n} \min_{(f,g) \in E(x,z,q)} [\langle s, f \rangle - g] \leq F(x, z, s).$$

Равенство (3.1) доказано.

Докажем импликацию (def.5a) $\Rightarrow$ (def.6a). Пусть выполнено условие (def.5a). Допустим от противного, что $\min\{d^-u(x_0; f) - g : (f, g) \in E(x_0, u(x_0), p)\} > 0$ при некоторой $(x_0, p) \in G \times \mathbb{R}^n$. Поскольку функция $f \rightarrow d^-u(x_0; f)$ полунепрерывна снизу, то существует положительное число α такое, что

$$(3.2) \quad \min\{d^-u(x_0; f) - g : (f, g) \in E^\alpha\} > 0,$$

где E^α — α -окрестность множества $E(x_0, u(x_0), p)$.

Воспользуемся леммой 1.1. Положим

$$y = (x, z) \in Y := G \times \mathbb{R}, \quad v(x, z) := u(x) - z, \quad h = (f, g) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \\ H := E^\alpha, \quad y_0 = (x_0, 0).$$

Заметим, что $d^-v(y; h) = d^-v(x, z; f, g) = d^-u(x; f) - g$.

Пусть $D^-v(x, z) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ — субдифференциал функции v , $(s, a) \in D^-v(x, z)$ — субградиент этой функции. По определению (см. (1.6)) имеем

$$\langle s, f \rangle + ag - d^-v(x, z; f, g) = \langle s, f \rangle + ag - d^-u(x; f) + g \leq 0$$

при всех $(f, g) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Следовательно,

$$(3.3) \quad a = -1, \quad s \in D^-u(x).$$

Из (3.2) следует, что функция v удовлетворяет предположениям, указанным в лемме 1.1. Поскольку многозначное отображение $(x, z) \rightarrow E(x, z, p)$ непрерывно, то можно выбрать число $\varepsilon > 0$ так, чтобы выполнялось вложение $E(x', z', p) \subset E^\alpha$ для всех $x' \in B(x_0; \varepsilon)$ и $|z'| \leq 2\varepsilon$. Согласно лемме 1.1, существует точка $y_\varepsilon = (x_\varepsilon, z_\varepsilon) \in Y$ и субградиент $(s_\varepsilon, -1) \in D^-v(y_\varepsilon)$ такие, что

$$\|x_0 - x_\varepsilon\| < \varepsilon, \quad |z_\varepsilon| < \varepsilon, \quad |u(x_0) - u(x_\varepsilon) + z_\varepsilon| < \varepsilon, \\ \langle s_\varepsilon, f \rangle - g > 0 \quad \forall (f, g) \in E^\alpha.$$

Поскольку $E(x_\varepsilon, u(x_\varepsilon), p) \subset E^\alpha$, то из (3.1) и последнего неравенства имеем

$$F(x_\varepsilon, u(x_\varepsilon), s_\varepsilon) = \max_{q \in \mathbb{R}^n} \min_{(f,g) \in E(x_\varepsilon, u(x_\varepsilon), q)} [\langle s_\varepsilon, f \rangle - g] \\ \geq \min_{(f,g) \in E(x_\varepsilon, u(x_\varepsilon), p)} [\langle s_\varepsilon, f \rangle - g] > 0.$$

Согласно (3.3), имеем $s_\varepsilon \in D^-u(x_\varepsilon)$. Итак, приходим к противоречию с условием (def.5a). Импликация (def.5a) $\Rightarrow$ (def.6a) доказана.

Полное доказательство теорем 2.1 и 2.2 имеется в [51].

§ 4. Обобщенные характеристики

1. Согласно условию (def.2), график минимаксного решения должен быть слабо инвариантен относительно дифференциального включения (2.5), которое можно переписать следующим образом:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \|\dot{x}\| &\leq \rho(x, z), \\ \dot{z} &= \langle \dot{x}, p \rangle - F(x, z, p). \end{aligned}$$

Эту систему можно трактовать как редукцию или релаксацию характеристической системы. Напомним, что в классическом методе характеристик вводится система обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [15], [21])

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= D_p F(x, z, p), \\ \dot{p} &= -D_x F(x, z, p) - D_z F(x, z, p)p, \\ \dot{z} &= \langle p, D_p F(x, z, p) \rangle. \end{aligned}$$

Функция F – интеграл характеристической системы, она принимает постоянное значение $F(x(t), z(t), p(t)) = 0$ вдоль рассматриваемых решений этой системы. Поэтому, учитывая первое уравнение системы (4.2), третье уравнение этой системы обращается во второе уравнение системы (4.1). При такой записи правая часть этого уравнения не содержит производной $D_p F$, существование которой здесь не предполагается. Первое уравнение системы (4.2) заменяется в системе (4.1) ограничением на норму производной $\dot{x}$. Вместо второго уравнения характеристической системы в определении минимаксного решения требуется, чтобы свойство слабой инвариантности имело место при выборе любого параметра p .

2. Возможны модификации условий, сформулированных в теоремах 2.1 и 2.2. Например, вместо многозначного отображения E вида (2.6) в условии (def.2a) можно использовать любое отображение

$$(x, z, q) \rightarrow E_a(x, z, q): G \times \mathbb{R} \times Q \mapsto \text{conv } \mathbb{R}^{n+1},$$

удовлетворяющее следующим требованиям:

- (C.a1) для любого $q \in Q$ (Q – некоторое непустое множество) отображение $G \times \mathbb{R} \ni (x, z) \rightarrow E_a(x, z, q)$ полунепрерывно;
 (C.a2) для любых $(x, z, s) \in G \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ справедливо равенство

$$\sup_{q \in Q} \min \{ \langle f, s \rangle - g : (f, g) \in E_a(x, z, q) \} = F(x, z, s);$$

- (C.a3) для любых $q \in Q$, $x \in G$, $z' \leq z''$ и $(f, g') \in E_a(x, z', q)$ существует $(f, g'') \in E_a(x, z'', q)$ такая, что $g'' \geq g'$.

Аналогично, в формулировке условия (def.2b) многозначное отображение (2.6) можно заменить любым отображением $E_b(x, z, p)$, которое обладает следующими свойствами:

(C.b1) отображение $G \times \mathbb{R} \ni (x, z) \mapsto E_b(x, z, p)$ полунепрерывно при любом $p \in P$;

(C.b2) справедливо равенство

$$\inf_{p \in P} \max \{ \langle f, s \rangle - g : (f, g) \in E_b(x, z, p) \} = F(x, z, s);$$

(C.b3) для любых $p \in P$, $x \in G$, $z' \leq z''$ и $(f, g'') \in E_b(x, z'', p)$ существует $(f, g') \in E_b(x, z', p)$ такая, что $g'' \geq g'$.

Отметим, что отображение E вида (2.6), где $P = Q = \mathbb{R}^n$, удовлетворяет всем этим требованиям (C.a1)–(C.a3) и (C.b1)–(C.b3).

3. Проиллюстрируем использование многозначных отображений E с указанными свойствами. Рассмотрим сначала линейное УЧП 1-го порядка

$$(4.3) \quad \langle f(x), Du(x) \rangle = g(x, u(x)).$$

Будем предполагать, что функции $G \ni x \rightarrow f(x) \in \mathbb{R}^n$, $G \times \mathbb{R} \ni (x, z) \rightarrow g(x, z) \in \mathbb{R}$ удовлетворяют условию Липшица, функция $g(x, \cdot)$ не убывает. Положим

$$(4.4) \quad E(x, z, p) = \{ (f(x), g(x, z)) \},$$

множество P параметров p здесь можно определить произвольно. В данном случае отображение E вида (4.4) удовлетворяет всем требованиям (C.a1)–(C.a3) и (C.b1)–(C.b3). Характеристическое дифференциальное включение $(\dot{x}, \dot{z}) \in E(x, z, p)$ обращается в систему уравнений

$$(4.5) \quad \dot{x} = f(x), \quad \dot{z} = g(x, z).$$

Поэтому приходим к следующему определению: минимаксным решением уравнения (4.3) называется непрерывная функция $G \ni x \rightarrow u(x) \in \mathbb{R}$, график которой инвариантен относительно системы (4.5), т.е. при любом выборе точки $(x_0, z_0) \in \text{gr } u$ справедливо равенство $z(t) = u(x(t))$ при $0 \leq t \leq \tau$, где $(x(\cdot), z(\cdot)) : [0, \tau] \mapsto \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ – траектория системы (4.5) с начальным условием $x(0) = x_0$, $z(0) = u(x_0)$, τ – некоторое положительное число.

Данное определение эквивалентно общему определению в форме условий (def.1)–(def.6) и согласуется с классической теорией линейных УЧП 1-го порядка.

4. Рассмотрим уравнение УЧП 1-го порядка вида

$$(4.6) \quad \sum_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial \xi_i} h_i(\xi, x) + H(\xi, x, z, D_x u) = 0.$$

Это уравнение – частный случай уравнения (2.1), в котором

$$F(\hat{x}, z, \hat{s}) = \sum_{i=1}^m h_i(\xi, x) \eta_i + H(\xi, x, z, s).$$

Здесь $\hat{x} := (\xi, x) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, $\hat{s} := (\eta, s) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. Будем предполагать, что функции $G \ni (\xi, x) \rightarrow h_i(\xi, x)$ непрерывны (G – открытая область в $\mathbb{R}^{n+m}$); функция H непрерывна на $G \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, не возрастает по переменной z и удовлетворяет следующему условию Липшица:

$$(4.7) \quad |H(\xi, x, z, p) - H(\xi, x, z, q)| \leq \|p - q\| \rho(\xi, x, z) \quad \forall (p, q) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,$$

где $\rho(\xi, x, z)$ – функция, непрерывная на $G \times \mathbb{R}$.

К уравнениям вида (4.6) относятся, в частности, линейные уравнения (4.3) и уравнения Гамильтона–Якоби вида (6.1). Поскольку уравнение (4.6) – частный случай уравнения (2.1), то все определения из §2 переносятся на рассматриваемый случай. Вместе с тем, можно дополнить общие определения конструкциями, учитывающими специфику уравнения (4.6). Это замечание относится к характеристическим дифференциальным включениям, которые используются в исследованиях уравнений рассматриваемого вида, особенно в исследованиях уравнений Гамильтона–Якоби.

Пусть $(\xi, x, z, q) \rightarrow E_a(\xi, x, z, q) \in \text{conv } \mathbb{R}^{n+1}$ – многозначное отображение, определенное для всех $(\xi, x) \in G$, $z \in \mathbb{R}$, $q \in Q$, где P – некоторое непустое множество. Элементами множества $E_a(\xi, x, z, q)$ являются пары $(f, g) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Предполагается, что отображение E_a обладает следующими свойствами (они подобны условиям (C.a1)–(C.a3)):

(C.a1') для любого $q \in Q$ отображение $(\xi, x, z) \rightarrow E_a(\xi, x, z, q) \in \text{conv } \mathbb{R}^{n+1}$ полунепрерывно сверху;

(C.a2') для любых $(\xi, x) \in G$, $z \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}^n$ справедливо равенство

$$\sup_{q \in Q} \min \{ \langle f, s \rangle - g : (f, g) \in E_a(\xi, x, z, q) \} = H(\xi, x, z, s);$$

(C.a3') для любых $q \in Q$, $(\xi, x) \in G$, $z' \leq z''$ и $(f, g') \in E_a(\xi, x, z', q)$ существует $(f, g'') \in E_a(\xi, x, z'', q)$ такая, что $g'' \geq g'$.

Нетрудно проверить, что многозначное отображение

$$\hat{E}_a(\hat{x}, z, q) := \{h(\xi, x)\} \times E_a(\xi, x, z, q)$$

удовлетворяет всем требованиям (C.a1)–(C.a3), указанным в п. 2. Поэтому для определения верхнего решения уравнения (4.6) можно использовать характеристическое дифференциальное включение

$$(4.8) \quad \dot{\xi} = h(\xi, x), \quad (\dot{x}, \dot{z}) \in E_a(\xi, x, z, q).$$

Таким образом, в рассматриваемом случае можно использовать следующее определение.

Верхним решением уравнения (4.6) называется полунепрерывная снизу функция $G \ni (\xi, x) \rightarrow u(\xi, x) \in \mathbb{R}$ такая, что при любом выборе $q \in Q$ надграфик функции u слабо инвариантен относительно дифференциального включения (4.8), т.е. для любых $q \in Q$ и $(\xi_0, x_0, z_0) \in \text{epi } u$ существуют число $\tau > 0$ и траектория дифференциального включения (4.8), удовлетворяющая начальному условию $(\xi(0), x(0), z(0)) = (\xi_0, x_0, z_0)$ и неравенству $z(t) \geq u(\xi(t), x(t))$ при $t \in [0, \tau]$.

Аналогично, нижнее решение уравнения (4.6) можно определить как полунепрерывную сверху функцию $u(\xi, x)$ такую, что при любом $p \in P$ ее подграфик слабо инвариантен относительно дифференциального включения

$$(4.9) \quad \dot{\xi} = h(\xi, x), \quad (\dot{x}, \dot{z}) \in E_b(\xi, x, z, p).$$

Формулировки условий, которым должно удовлетворять отображение E_b опускаем, поскольку они аналогичны условиям (C.a1')–(C.a3').

В заключение заметим, что многозначное отображение вида

$$(4.10) \quad E(\xi, x, z, p) := \{(f, g) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \|f\| \leq \rho(\xi, x, z), g = \langle f, p \rangle - H(\xi, x, z, p)\}$$

обладает всеми свойствами рассматриваемых отображений E_a и E_b (здесь $P = Q = \mathbb{R}^n$). Поэтому, в дополнение к общим определениям из § 2, можно использовать следующее определение.

Минимаксным решением уравнения (4.6) называется непрерывная функция $G \ni (\xi, x) \rightarrow u(\xi, x) \in \mathbb{R}$ такая, что при любом выборе $p \in \mathbb{R}^n$ график функции u слабо инвариантен относительно дифференциального включения

$$(4.11) \quad \dot{\xi} = h(\xi, x), \quad (\dot{x}, \dot{z}) \in E(\xi, x, z, p),$$

где многозначное отображение E определено равенством (4.10).

§ 5. Кусочно гладкие решения

1. В общих определениях, приведенных в § 2, минимаксные решения рассматриваются в классе непрерывных функций. Вместе с тем, известны условия, при которых обобщенное решение содержится в более узких классах функций. Например, если гамильтониан и краевая функция в задаче Коши для уравнения Гамильтона–Якоби (6.1) удовлетворяют условию Липшица, то обобщенное решение этой задачи является липшицевой функцией. В теории УЧП 1-го порядка изучаются также кусочно гладкие минимаксные и/или вязкостные решения. В общих словах, результат, представленный в этом параграфе, можно описать следующим образом. Согласно определению, область, на которой задана кусочно гладкая функция разбивается на гладкие многообразия так, что ее сужения на эти многообразия дифференцируемы. Показано, что кусочно гладкая функция является обобщенным решением (в минимаксном и/или вязкостном смысле) тогда и только тогда, когда ее сужения на многообразия, образующие упомянутое разбиение, удовлетворяют в классическом смысле определенным ниже УЧП 1-го порядка.

В этом параграфе используются следующие обозначения: X – n -мерное евклидово пространство, X^* – пространство, сопряженное к X , $\langle s, f \rangle$ – значение линейного функционала $s \in X^*$ на элементе $f \in X$. Ниже используются также обозначения $[r]^+ := \max\{r, 0\}$, $[r]^- := \min\{r, 0\}$, где $r \in [-\infty, +\infty]$. Для вещественной функции $A \ni a \rightarrow r(a)$ и множества $A' \subset A$ полагаем $\max_{a \in A'} r(a) = -\infty$, $\min_{a \in A'} r(a) = \infty$, если $A' = \emptyset$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Непрерывную функцию $u: G \mapsto \mathbb{R}$ будем называть кусочно гладкой, если

- (а) существует конечное разбиение $\mathcal{M} := \{M_i : i \in I\}$ (I – конечное множество) области G на дифференцируемые многообразия M_i , т.е.

$$G = \bigcup_{i \in I} M_i, \quad M_i \cap M_j = \emptyset \quad \text{при } i \neq j;$$

- (б) для любого $i \in I$ и любых $x', x'' \in M_i$ справедливо равенство $J_i(x') := \{j \in J : x' \in \overline{M_j}\} = J_i(x'') := \{j \in J : x'' \in \overline{M_j}\}$, где $\overline{M_j}$ – замыкание в X множества M_j , $J := \{i \in I : M_i \text{ — } n\text{-мерное многообразие}\}$;
- (с) для любых $j \in J$ и $x \in \overline{M_j}$ существует выпуклое открытое в X множество $C \subset M_j$, замыкание которого содержит x ;
- (д) для любого $j \in J$ сужение u_j функции u на множество $\overline{M_j}$ непрерывно дифференцируемо на $\overline{M_j}$, т.е. существует непрерывная функция $s_j: \overline{M_j} \mapsto X^*$ такая, что $u(y) - u(x) = \langle s_j(x), y - x \rangle + o(\|y - x\|)$ для всех $x, y \in \overline{M_j}$, где $\lim_{r \rightarrow 0} r^{-1} o(r) = 0$ при $r \rightarrow 0$.

2. Пусть u – кусочно гладкая функция, $\mathcal{M}$ – разбиение, определенное для этой функции, $M_i \in \mathcal{M}$ одно из гладких многообразий разбиения $\mathcal{M}$. Будем предполагать, что размерность многообразия M_i не равна нулю. Символом $L_i(x)$ обозначим пространство, касательное к многообразию M_i в точке $x \in M_i$. Пространство $L_i(x)$ будем рассматривать как подпространство в X . Символом u_i обозначим сужение функции u на многообразии M_i . Нетрудно доказать следующее утверждение.

ЛЕММА 5.1. *Кусочно гладкая функция u дифференцируема по направлениям, т.е. для любых $x \in G$ и $f \in X$ существует предел*

$$du(x; f) := \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{u(x + \delta f) - u(x)}{\delta}.$$

Если $x \in M_i$ и $f \in L_i(x)$, то

$$du(x; f) = \langle s_\mu(x), f \rangle = \langle s_\nu(x), f \rangle$$

для любых $\mu, \nu \in J_i(x)$. Функция u_i непрерывно дифференцируема на M_i .

Чтобы упростить обозначения, положим $d(f) := du(x; f)$, $D^- := D^- u(x)$, $D^+ := D^+ u(x)$. Согласно определениям субдифференциала и супердифференциала (1.6), (1.7) имеем

$$(5.1) \quad D^- := \{s \in X^* : \langle s, f \rangle - d(f) \leq 0 \quad \forall f \in X\},$$

$$(5.2) \quad D^+ := \{s \in X^* : \langle s, f \rangle - d(f) \geq 0 \quad \forall f \in X\}.$$

Отметим, что $T(u)(x) = \{(f, d(f)) : f \in X\}$, т.е. в рассматриваемом случае контингентный конус совпадает с графиком функции $f \rightarrow du(x; f) = d(f)$.

Пусть $s^* \in D^-$, $s_* \in D^+$. Имеем

$$\sup_{f \in X} [\langle s^*, f \rangle - d(f)] = 0, \quad \inf_{f \in X} [\langle s_*, f \rangle - d(f)] = 0,$$

т.е. $\langle s^*, f \rangle \leq d(f) \leq \langle s_*, f \rangle$ при всех $f \in X$. Поэтому $\langle s^*, f \rangle \leq \langle s_*, f \rangle$ при всех $f \in X$. Из последнего неравенства следует равенство $s^* = s_*$. Таким образом, справедлива

ЛЕММА 5.2. *Если $D^- \neq \emptyset$ и $D^+ \neq \emptyset$, то $D^- = D^+ = \{p\}$, где p — некоторый элемент пространства X^* .*

Пусть $x \in M_i$. Положим

$$N' := \{s \in X^* : \langle s, f \rangle = 0 \ \forall f \in L_i(x)\}.$$

Определим подпространство N как алгебраическое дополнение N' в X^* . Отметим, что N — пространство, кокасательное к многообразию M_i в точке x .

Пусть $s' \in N'$, $s \in N$ и $s' + s \in D^-$, $f \in L_i(x)$. Согласно определению подпространства N' имеем $\langle s' + s, f \rangle = \langle s, f \rangle$. Поскольку функция u_i дифференцируема на M_i , то

$$d(f) = \langle Du_i(x), f \rangle \quad \forall f \in L_i(x).$$

Из (5.1) следует

$$\langle s, f \rangle - d(f) = \langle s, f \rangle - \langle Du_i(x), f \rangle \leq 0 \quad \forall f \in L_i(x).$$

Из последнего соотношения получаем $s = Du_i(x)$.

Итак, если множество D^- или D^+ не пусто, то его проекция на подпространство N содержит единственный элемент $Du_i(x)$ — градиент функции u_i в точке x , т.е. имеет место

ЛЕММА 5.3. *Пусть $s' \in N'$, $s \in N$ и $s' + s \in D^- \cup D^+$. Тогда $s = Du_i(x)$.*

3. Введем обозначения

$$S^- := \{s' \in N' : N + s' \cap D^- u(x) \neq \emptyset\},$$

$$S^+ := \{s' \in N' : N + s' \cap D^+ u(x) \neq \emptyset\},$$

т.е. S^- и S^+ — проекции субдифференциала $D^- u(x)$ и супердифференциала $D^+ u(x)$ на подпространство N' .

Определим функцию

$$(x, z, s) \mapsto F_i(x, z, s) := \left[\max_{s' \in S^-} F(\xi, z, s + s') \right]^+ + \left[\min_{s' \in S^+} F(\xi, z, s + s') \right]^-,$$

Здесь $z \in \mathbb{R}$, $x \in M_i$, $s \in T_i^*(x)$, где $T_i^*(x)$ — пространство, кокасательное к многообразию M_i в точке x . Заметим, что в случае $\dim M_i = n$ ($\dim M_i$ — размерность многообразия M_i) имеем $N = X^*$, $D^- = D^+ = \{Du(x)\}$, $N' = \{0\}$, $F_i(x, z, s) = F(x, z, s)$. Если $\dim M_i = 0$, то $N = \{0\}$, $M_i = \{\xi\}$, $T_i^*(\xi) = \{0\}$, где ξ — единственный элемент, который содержится в многообразии M_i , 0 — нулевой элемент пространства X^* . В этом случае согласно определению функции F_i имеем

$$F_i(\xi, z, 0) := \left[\max_{s \in D^-} F(\xi, z, s) \right]^+ + \left[\min_{s \in D^+} F(\xi, z, s) \right]^-,$$

Используя леммы 5.1–5.3, получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $u: G \mapsto \mathbb{R}$ – кусочно гладкое минимаксное (и/или вязкостное) решение уравнения (2.1). Тогда сужение u_i функции u на любое многообразие M_i удовлетворяет (в классическом смысле) уравнению

$$(5.3) \quad F_i(x, u_i(x), Du_i(x)) = 0.$$

Обратно, пусть u – кусочно гладкая функция такая, что ее сужение на любое многообразие M_i удовлетворяет уравнению (5.3). Тогда эта функция есть минимаксное (и/или вязкостное) решение уравнения (2.1).

Отметим, что необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять кусочно гладкие решения уравнения Айзекса–Беллмана, были получены в форме неравенств для производных по направлениям в работе [26]. Отдельные результаты для кусочно гладких решений получены в теории вязкостных решений, например, в работе (36) была рассмотрена склейка двух гладких функций, образующих вязкостное решение. Отметим также, что в теории дифференциальных игр (см., например, [2], [17]) большое место занимают исследования сингулярных множеств, на которых происходят склейки гладких кусков функции цены дифференциальной игры.

§ 6. Задача Коши для уравнения Гамильтона–Якоби

1. В рамках предлагаемого подхода можно доказать существование и единственность минимаксного решения для широкого круга краевых задач и задач Коши. В качестве примера приведем теорему существования и единственности задачи Коши для уравнения Гамильтона–Якоби. Чтобы упростить изложение, будем предполагать, что гамильтониан удовлетворяет условию Липшица по фазовой и импульсной переменным.

Итак, рассмотрим задачу Коши для уравнения Гамильтона–Якоби

$$(6.1) \quad \partial u / \partial t + H(t, x, u, D_x u) = 0, \quad (t, x) \in G :=]0, \theta[\times \mathbb{R}^n,$$

$$(6.2) \quad u(x, \theta) = \sigma(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Будем предполагать, что гамильтониан $H(t, x, z, p)$ и функция σ удовлетворяют следующим условиям:

(Н.1) гамильтониан $H(t, x, z, p)$ непрерывен на $D :=]0, \theta[\times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, функция $z \mapsto H(t, x, z, p)$ не возрастает, т.е.

$$(6.3) \quad H(t, x, z_1, p) \geq H(t, x, z_2, p), \quad (t, x, z_i, p) \in D, \quad z_1 \leq z_2;$$

(Н.2) выполняется условие Липшица по переменной p

$$(6.4) \quad |H(t, x, z, p^{(1)}) - H(t, x, z, p^{(2)})| \leq \rho(x) \|p^{(1)} - p^{(2)}\|$$

при всех $(t, x, z, p^{(i)}) \in D$ и ограничение

$$(6.5) \quad |H(t, x, z, 0)| \leq (1 + \|x\| + |z|)c \quad \forall (t, x, z) \in]0, \theta[\times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R},$$

где $\rho(x) := (1 + \|x\|)c$, c — некоторое положительное число;

(Н.3) для любого ограниченного множества $B \subset \mathbb{R}^n$ существует постоянная $\lambda(B)$ такая, что

$$(6.6) \quad |H(t, x^{(1)}, z, p) - H(t, x^{(2)}, z, p)| \leq \lambda(B) \|x^{(1)} - x^{(2)}\| (1 + \|p\|) \\ \forall (x^{(1)}, x^{(2)}, t, z, p) \in B \times B \times]0, \theta[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n;$$

(Н.4) функция $x \rightarrow \sigma(x): \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ непрерывна.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Непрерывная (полу непрерывная снизу или сверху) функция $(t, x) \rightarrow u(t, x): [0, \theta] \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ называется минимаксным (соответственно, верхним или нижним) решением задачи Коши (6.1), (6.2), если она удовлетворяет условию (6.2) и ее сужение на $G :=]0, \theta[\times \mathbb{R}^n$ является минимаксным (верхним или нижним) решением уравнения (6.1).

Понятно, что минимаксные решения, а также верхние и нижние решения уравнения Гамильтона–Якоби (6.1) можно определить в инфинитезимальной форме, используя контингентные конусы, или производные по направлениям, или субдифференциалы и супердифференциалы. Эти определения состоят в простом переносе формулировок из §2 на рассматриваемое уравнение. Отметим лишь, что, как и в общем случае, минимаксные и вязкостные решения уравнения Гамильтона–Якоби эквивалентны.

Доказательство теорем единственности и существования минимаксного решения задачи (6.1), (6.2) опирается на определение решений в форме условий слабой инвариантности графика, надграфика и подграфика относительно характеристического дифференциального включения (см. ниже (6.7), (6.8)).

Уравнение (6.1) имеет вид (4.6) (в данном случае $m = 1$, $h_1 = 1$, $\xi = t$). Используя замечание, приведенное в §4, п. 4, и опуская уравнение $\dot{t} = 1$, получаем следующее характеристическое дифференциальное включение:

$$(6.7) \quad (\dot{x}, \dot{z}) \in E(t, x, z, p),$$

где

$$(6.8) \quad E(t, x, z, p) := \{(f, g) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \|f\| \leq \rho(x), g = \langle f, p \rangle - H(t, x, z, p)\}.$$

Пусть выбрана некоторая точка $(t_0, x_0, z_0, p) \in D$. Символом $\mathcal{S}(t_0, x_0, z_0, p)$ обозначим множество абсолютно непрерывных функций $(x(\cdot), z(\cdot)): [t_0, \theta] \mapsto \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, которые удовлетворяют условию $x(t_0) = x_0$, $z(t_0) = z_0$, и при почти всех $t \in [t_0, \theta]$ удовлетворяют дифференциальному включению (6.7).

Опуская формулировки в инфинитезимальной форме, приведем определения минимаксных, верхних и нижних решений уравнения Гамильтона–Якоби в форме условия слабой инвариантности относительно характеристического дифференциального включения (6.7).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Непрерывная функция $(t, x) \rightarrow u(t, x): G \mapsto \mathbb{R}$ называется минимаксным решением уравнения (6.1), если при любом выборе параметра $p \in \mathbb{R}^n$ ее график $\text{gr } u := \{(t, x, u(t, x)) : (t, x) \in G\}$ слабо инвариантен относительно дифференциального включения (6.7), т.е. для любых $(t_0, x_0, z_0) \in \text{gr } u$ и любого $p \in \mathbb{R}^n$ существует траектория $(x(\cdot), z(\cdot)) \in \mathcal{S}(x_0, t_0, z_0, p)$ такая, что

$$z(t) = u(t, x(t)) \quad \forall t \in [t_0, \theta].$$

Аналогично, полунепрерывная снизу (сверху) функция $u: G \mapsto \mathbb{R}$ называется верхним (нижним) решением уравнения (6.1), если при любом выборе параметра $p \in \mathbb{R}^n$ ее надграфик (подграфик) слабо инвариантен относительно дифференциального включения (6.7).

Заметим, что, в отличие от определений (def.2a), (def.2b) и (def.2) (см. §2), здесь траектории характеристического дифференциального включения рассматриваются на отрезке $[t_0, \theta]$, где θ – фиксированное число.

2. Справедливы следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 6.1. *Для любого верхнего решения u задачи Коши (6.1), (6.2) и любого нижнего решения v этой задачи справедливо неравенство $u \geq v$.*

ТЕОРЕМА 6.2. *Существует верхнее решение u задачи (6.1), (6.2) и нижнее решение v этой задачи такие, что $u \leq v$.*

ТЕОРЕМА 6.3. *Существует одно и только одно минимаксное решение задачи (6.1), (6.2).*

Теорема 6.3 следует из теорем 6.1 и 6.2. Доказательство теоремы 6.1 (согласно которой минимаксное решение единственно) приведено ниже, в этом параграфе. Отметим, что предлагаемое доказательство опирается на метод функций Ляпунова.

Доказательство теоремы 6.2 можно провести по следующей схеме. Рассматривается нижняя огибающая семейства верхних минимаксных решений задачи Коши (6.1), (6.2). Проверяется, что определенная таким способом функция u_* удовлетворяет определению верхнего минимаксного решения. Далее проверяется, что верхнее замыкание функции u_* , определенное при $(t, x) \in \overline{G}$ равенством

$$u^*(t, x) := \inf_{\varepsilon > 0} \sup \{u_*(\tau, \xi) : \|\xi - x\| \leq \varepsilon, |\tau - t| \leq \varepsilon, \tau \in [0, \theta]\},$$

удовлетворяет определению нижнего минимаксного решения. Понятно, что $v := u^* \geq u_*$.

Используемый здесь подход имеет своим источником конструкции, разработанные в теории позиционных дифференциальных игр для доказательства теоремы об альтернативе в дифференциальной игре сближения-уклонения [11]. Полное доказательство теоремы 6.2 по указанной схеме приведено в работах [23], [48], [49]. Отметим также, что верхние (нижние) огибающие семейства вязкостных субрешений (суперрешений) рассматривались в работе [44], где исследовалось существование вязкостного решения УЧП 1-го порядка.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6.1. Допустим от противного, что существуют верхнее решение u задачи Коши (6.1), (6.2), нижнее решение v этой задачи, точка $(t_0, x_0) \in \overline{G}$ и число $a > 0$ такие, что $u(t_0, x_0) < v(t_0, x_0) - a$.

Обозначим через $\mathcal{X}(t_0, x_0)$ совокупность абсолютно непрерывных функций $x(\cdot) : [t_0, \theta] \mapsto \mathbb{R}^n$, которые удовлетворяют дифференциальному неравенству $\|\dot{x}(t)\| \leq \rho(x(t))$ и условию $x(t_0) = x_0$. Пусть λ – постоянная Липшица в условии (6.6), где полагаем

$$B := \{x(t) : t \in [t_0, \theta], x(\cdot) \in \mathcal{X}(t_0, x_0)\}.$$

Введем обозначения

$$(6.9) \quad \begin{aligned} r_\varepsilon(x, y) &:= \sqrt{\varepsilon^4 + \|x - y\|^2}, \quad \alpha_\varepsilon(t) := \frac{(e^{-\lambda t} - \varepsilon)}{\varepsilon}, \\ w_\varepsilon(t, x, y) &:= \alpha_\varepsilon(t) r_\varepsilon(x, y). \end{aligned}$$

Рассмотрим следующую функцию:

$$(6.10) \quad L_\varepsilon(t, x, y, \xi, \eta) := w_\varepsilon(t, x, y) + \xi - \eta,$$

где $(t, x, y, \xi, \eta) \in [0, \theta] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Число $\varepsilon > 0$ выберем так, чтобы выполнялись неравенства $0 < \varepsilon^2 \alpha_\varepsilon(t) < a$ при всех $t \in [t_0, \theta]$.

Вычислим производную функции L_ε (функции Ляпунова). В силу системы дифференциальных уравнений и дифференциальных неравенств

$$(6.11) \quad \begin{aligned} \|\dot{x}\| &\leq \rho(x), \quad \dot{\xi} = \langle \dot{x}, p \rangle - H(t, x, \xi, p), \\ \|\dot{y}\| &\leq \rho(y), \quad \dot{\eta} = \langle \dot{y}, q \rangle - H(t, y, \eta, q), \\ p &= q = D_y w_\varepsilon(t, x, y) = -D_x w_\varepsilon(t, x, y) = -\alpha_\varepsilon(t) \frac{(x - y)}{r_\varepsilon(x, y)}. \end{aligned}$$

Будем рассматривать решения этой системы, удовлетворяющие начальному условию

$$x(t_0) = y(t_0) = x_0, \quad \xi(t_0) = \xi_0 := u(x_0, t_0), \quad \eta(t_0) = \eta_0 := v(x_0, t_0).$$

Заметим, что $(x_0, y_0, \xi_0, \eta_0) \in N := \{(x, y, \xi, \eta) \in B \times B \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \xi \leq \eta\}$. Пусть на некотором промежутке времени $[t_0, \tau] \subset [t_0, \theta]$ траектория $(x(t), y(t), \xi(t), \eta(t))$ системы (6.11) не покидает множество N . Положим

$$L_\varepsilon[t] := L_\varepsilon(t, x(t), y(t), \xi(t), \eta(t)).$$

Используя условия (6.3), (6.6), получаем

$$\dot{L}_\varepsilon[t] \leq 0 \quad \text{при п.в. } t \in [t_0, \tau].$$

Поскольку $L_\varepsilon[t_0] = \varepsilon^2 \alpha_\varepsilon(t_0) + \xi_0 - \eta_0 < \varepsilon^2 \alpha_\varepsilon(t_0) - a < 0$ и $\dot{L}_\varepsilon[t] \leq 0$ при почти всех $t \in [t_0, \tau]$, то получаем, что движения системы (6.11) не выходят из области N при всех $t \in [t_0, \theta]$.

Из определения верхнего решения u и нижнего решения v можно получить, что существует траектория $(x_\varepsilon(\cdot), y_\varepsilon(\cdot), \xi_\varepsilon(\cdot), \eta_\varepsilon(\cdot))$ системы (6.11) такая, что

$$(6.12) \quad \xi_\varepsilon(\theta) \geq u(\theta, x_\varepsilon(\theta)) = \sigma(x_\varepsilon(\theta)), \quad \eta_\varepsilon(\theta) \leq v(\theta, y_\varepsilon(\theta)) = \sigma(y_\varepsilon(\theta)).$$

Неравенство $\dot{L}_\varepsilon[t] \leq 0$ справедливо для любого решения системы (6.11). В частности, оно выполняется для решения, удовлетворяющего неравенствам (6.12). Поэтому получаем

$$\begin{aligned} L_\varepsilon[t_0] &= \varepsilon^2 \alpha_\varepsilon(t_0) + u(t_0, x_0) - v(t_0, x_0) \geq L_\varepsilon[\theta] \\ &\geq \alpha_\varepsilon(\theta) r_\varepsilon(x_\varepsilon(\theta), y_\varepsilon(\theta)) + \sigma(x_\varepsilon(\theta)) - \sigma(y_\varepsilon(\theta)) \geq \sigma(x_\varepsilon(\theta)) - \sigma(y_\varepsilon(\theta)). \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\varepsilon^2 \alpha_\varepsilon(\theta) \rightarrow 0, \quad \alpha_\varepsilon(\theta) \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Понятно также, что

$$|\sigma(x_\varepsilon(\theta)) - \sigma(y_\varepsilon(\theta))| \leq \max_{(x,y) \in B \times B} |\sigma(x) - \sigma(y)| := K < \infty.$$

Поэтому из неравенства

$$\alpha_\varepsilon(\theta) r_\varepsilon(x_\varepsilon(\theta), y_\varepsilon(\theta)) \leq \varepsilon^2 \alpha_\varepsilon(t_0) + u(t_0, x_0) - v(t_0, x_0) + K$$

имеем

$$\|x_\varepsilon(\theta) - y_\varepsilon(\theta)\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Далее, переходя в неравенстве

$$\varepsilon^2 \alpha_\varepsilon(t_0) + u(t_0, x_0) - v(t_0, x_0) \geq \sigma(x_\varepsilon(\theta)) - \sigma(y_\varepsilon(\theta))$$

к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем неравенство $u(t_0, x_0) \geq v(t_0, x_0)$. Таким образом, предположение $u(t_0, x_0) < v(t_0, x_0)$ приводит к противоречию. Теорема 6.1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Функция w_ε вида (6.9) удовлетворяет условию А4, введенному в работе [33]. Из приведенного выше доказательства видно, что условие НЗ можно заменить условием А4.

§ 7. Разрывные решения задачи Дирихле для УЧП первого порядка

1. В теории обобщенных решений уравнений с частными производными первого порядка изучаются не только непрерывные, но и разрывные решения. Необходимость вводить такие решения возникает, например, в задачах оптимального быстрогодействия (см. ниже § 8), а также в теории сингулярно возмущенных уравнений эллиптического типа.

Рассмотрим следующую краевую задачу

$$(7.1) \quad H(x, Du) - u = 0, \quad x \in G \subset \mathbb{R}^n,$$

$$(7.2) \quad u(x) = \sigma(x), \quad x \in \partial G.$$

Здесь G — открытая область в $\mathbb{R}^n$, ∂G — граница области G . Будем предполагать, что выполняются следующие предположения:

(A.1) существуют числа c и μ такие, что

$$(7.3) \quad \forall x \in G \quad |H(x, 0)| \leq c,$$

$$(7.4) \quad |H(x, p_1) - H(x, p_2)| \leq (1 + \|x\|)\|p_1 - p_2\|\mu$$

при всех $x \in G$, $p_i \in \mathbb{R}^n$ ($i = 1, 2$);

(A.2) для любого ограниченного множества $\Delta \subset G$ существует постоянная $\lambda(\Delta)$ такая, что

$$(7.5) \quad |H(x_1, p) - H(x_2, p)| \leq \lambda(\Delta)\|x_1 - x_2\|(1 + \|p\|)$$

для любых $p \in \mathbb{R}^n$, $x_i \in \Delta$ ($i = 1, 2$);

(A.3) краевая функция $\sigma(x)$ непрерывна на ∂G и удовлетворяет ограничению

$$(7.6) \quad \forall x \in \partial G \quad |\sigma(x)| \leq c.$$

Более слабые предположения, при которых можно доказать существование и единственность обобщенного решения задачи (7.1), (7.2), формулируются более громоздко (см., например, [33], [50]) и здесь не рассматриваются. Введем определение минимаксного решения задачи (7.1), (7.2), в котором учитывается специфика этой задачи и допускаются разрывные решения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Верхним решением задачи (7.1), (7.2) называется полунепрерывная снизу функция $u: \overline{G} \mapsto \mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям:

- (i) сужение функции u на область G является верхним решением уравнения (7.1) (в том смысле, как это определено в §2);
- (ii) выполняются краевое условие (7.2) и ограничение

$$(7.7) \quad \forall x \in \overline{G} \quad |u(x)| \leq c.$$

Нижним решением задачи (7.1), (7.2) называется полунепрерывная сверху функция $u: \overline{G} \mapsto \mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям:

- (j) сужение функции u на область G является нижним решением уравнения (7.1);
- (jj) выполняется краевое условие (7.2) и ограничение (7.7);
- (jjj) функция u непрерывна в каждой точке $x \in \partial G$.

Минимаксным решением задачи (7.1), (7.2) называется функция $u: \overline{G} \mapsto \mathbb{R}$, удовлетворяющая соотношениям

$$(7.8) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} u^{(k)}(x) = u(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x) \quad \forall x \in \overline{G},$$

где $u^{(k)}$ (соответственно, u_k) ($k = 1, 2, 3, \dots$) — последовательность верхних (соответственно, нижних) минимаксных решений этой задачи.

При выполнении предположений (A.1)–(A.3) справедливы следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 7.1. *Если существует нижнее решение задачи (7.1), (7.2), то существует одно и только одно минимаксное решение этой задачи. Минимаксное решение совпадает с минимальным верхним решением.*

ТЕОРЕМА 7.2. *Минимаксное решение задачи (7.1), (7.2) удовлетворяет инфинитезимальным соотношениям, указанным в теоремах 2.1 и 2.2 (где $F(x, z, p) = H(x, p) - z$), в любой точке $x \in G$, в которой функция u непрерывна. Минимаксное решение удовлетворяет уравнению (7.1) в каждой точке $x \in G$, в которой она дифференцируема.*

Отметим, что согласно теореме 7.1 минимаксное решение полунепрерывно снизу, что обычно согласуется с содержанием многих задач, возникающих в теории оптимального управления и дифференциальных игр. В тех случаях, когда решение должно быть полунепрерывным сверху, определение решения и теорему 7.1 можно изменить следующим образом: условие (jjj) (непрерывность в точках $x \in \partial G$) переносится из определения нижнего решения в определение верхнего решения; в модифицированной теореме 7.1 предполагается существование верхнего решения. Если существуют верхнее и нижнее решения, непрерывные в точках $x \in \partial G$, то существует и единственно непрерывное обобщенное (минимаксное и/или вязкостное) решение задачи (7.1), (7.2).

В случае, когда $G = \mathbb{R}^n$, краевое условие (7.2) заменяется требованием ограниченности решения $u(x)$ на $\mathbb{R}^n$. Понятно, что в этом случае функции $u^+(x) = c$ и $u^-(x) = -c$ суть верхнее и нижнее минимаксные решения. Поэтому, согласно приведенному здесь утверждению, существует и единственно непрерывное минимаксное решение уравнения (7.1). Отметим, что теоремы о единственности и существовании ограниченных вязкостных решений уравнения (7.1) были получены в работах [33], [36], [44]. Эта проблема и ее приложения к задачам оптимального управления и дифференциальных игр исследовалась также в [1], [30], [32] и других работах.

Доказательство теорем 7.1 и 7.2 приведено в [50]. Чтобы проиллюстрировать понятие минимаксного решения и сформулированные теоремы, рассмотрим следующий пример.

2. ПРИМЕР. В задаче (7.1), (7.2) положим

$$n = 1, G =]0, 1[, H(x, s) = s + 1, 0 < x < 1, s \in \mathbb{R}, \sigma(0) = \sigma(1) = 0.$$

Таким образом, в этом случае имеем краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения

$$(7.9) \quad \frac{du}{dx} - u + 1 = 0, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Задача (7.9) не имеет непрерывного решения $u(x)$ ($0 \leq x \leq 1$). Однако нетрудно проверить, что функция $u(x) = 0$ ($x \in [0, 1]$) есть нижнее минимаксное решение этой задачи. Следовательно, согласно теореме 7.1, существует одно и только одно минимаксное решение задачи (7.9). Можно показать, что это решение определяется формулой

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x = 0, \\ 1 - \exp(x - 1) & \text{при } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Отметим, что минимаксное решение совпадает с асимптотикой решений следующих краевых задач для сингулярно возмущенных “эллиптических” уравнений

$$\varepsilon \frac{d^2 u_\varepsilon}{dx^2} + \frac{du_\varepsilon}{dx} - u_\varepsilon + 1 = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(1) = 0 \quad (\varepsilon > 0).$$

Решение этой задачи имеет вид

$$u_\varepsilon(x) = 1 + \frac{\exp(\lambda_\varepsilon x + \mu_\varepsilon) - \exp(\mu_\varepsilon x + \lambda_\varepsilon) - \exp \lambda_\varepsilon x + \exp \mu_\varepsilon x}{\exp \lambda_\varepsilon - \exp \mu_\varepsilon},$$

$$\lambda_\varepsilon := (-1 + \sqrt{1 + 4\varepsilon})/2\varepsilon \rightarrow 1,$$

$$\mu_\varepsilon := (-1 - \sqrt{1 + 4\varepsilon})/2\varepsilon \rightarrow -\infty \quad \text{при } \varepsilon \downarrow 0.$$

Следовательно, для любого $x \in [0, 1]$ имеем $u_\varepsilon(x) \rightarrow u(x)$ при $\varepsilon \downarrow 0$.

Другой пример, относящийся к дифференциальным играм, рассмотрен в §8.

§8. Минимаксные решения и функция цены дифференциальной игры

1. Как отмечалось во введении, происхождение предлагаемого подхода и методы исследования минимаксных решений связаны с теорией позиционных дифференциальных игр (см., например, [7]–[11]).

Опишем кратко постановку одной из типичных дифференциальных игр. Пусть движение управляемой системы описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(8.1) \quad \dot{x}(t) = f(t, x(t), p(t), q(t)), \quad t_0 \leq t \leq \theta, \quad x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Здесь $p(t) \in P$ и $q(t) \in Q$ – управления первого и второго игроков, соответственно, P и Q – компакты. Обозначим символом $S(t_0, x_0)$ множество, состоящее из всевозможных троек $(x(\cdot), p(\cdot), q(\cdot))$, где $p(\cdot): [t_0, \theta] \mapsto P$, $q(\cdot): [t_0, \theta] \mapsto Q$ – измеримые функции, $x(\cdot): [t_0, \theta] \mapsto \mathbb{R}^n$ – абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая уравнению (8.1) и условию $x(t_0) = x_0$. Тройка $(x(\cdot), p(\cdot), q(\cdot))$ называется управляемым процессом.

Предполагается, что задан функционал платы

$$(8.2) \quad \gamma(t_0, x(\cdot), p(\cdot), q(\cdot)) := \sigma(x(\theta)) - \int_{t_0}^{\theta} g(\tau, x(\tau), p(\tau), q(\tau)) d\tau.$$

Первый игрок, который выбирает управление $p(\cdot)$, стремится минимизировать плату, цель второго игрока, выбирающего управление $q(\cdot)$, противоположна. Будем предполагать, что игрокам известна позиция игры – текущее время t и фазовое состояние $x(t)$ системы. Стратегии, выбранные игроками, формируют управления в системе (8.1) по принципу обратной связи. Стратегиями игроков называются произвольные функции

$$(8.3) \quad T \times \mathbb{R}^n \ni (t, x) \rightarrow U(t, x) \in P, \quad T \times \mathbb{R}^n \ni (t, x) \rightarrow V(t, x) \in Q.$$

Подчеркнем, что функции $U(t, x)$ и $V(t, x)$ могут быть разрывными.

Пусть первый игрок выбрал некоторую стратегию U и некоторое разбиение

$$\Delta = \{t_i : i = 0, \dots, m+1\}, \quad t_0 < t_1 < \dots < t_{m+1} = \theta.$$

Обозначим символом $\mathbf{S}(t_0, x_0, U, \Delta)$ множество троек $(x(\cdot), p(\cdot), q(\cdot)) \in \mathbf{S}(t_0, x_0)$ таких, что $q(\cdot) : [t_0, \theta] \mapsto Q$ – некоторая измеримая функция, а $p(\cdot)$ – кусочно постоянное управление, которое формируется по принципу обратной связи:

$$(8.4) \quad p(t) = U(t_i, x(t_i)), \quad t_i \leq t < t_{i+1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m.$$

В соответствии с концепцией гарантированного результата, качество пошаговой процедуры управления (U, Δ) , выбранной первым игроком, оценивается величиной

$$(8.5) \quad \Gamma_1(t_0, x_0, U, \Delta) := \sup \gamma(t_0, \mathbf{S}(t_0, x_0, U, \Delta)).$$

Оптимальный результат в классе пошаговых процедур управления первого игрока определяется равенством

$$(8.6) \quad \Gamma_1^*(t_0, x_0) := \inf_{U, \Delta} \Gamma_1(t_0, x_0, U, \Delta).$$

Аналогично, оптимальный гарантированный результат второго игрока определяется равенством

$$(8.7) \quad \Gamma_2^*(t_0, x_0) := \sup_{V, \Delta} \Gamma_2(t_0, x_0, V, \Delta),$$

где

$$(8.8) \quad \Gamma_2(t_0, x_0, V, \Delta) := \inf \gamma(t_0, \mathbf{S}(t_0, x_0, V, \Delta)).$$

Здесь $\mathbf{S}(t_0, x_0, V, \Delta)$ совокупность троек $(x(\cdot), p(\cdot), q(\cdot)) \in \mathbf{S}(t_0, x_0)$, где $q(\cdot)$ – кусочно постоянное управление:

$$q(t) = V(t_i, x(t_i)), \quad t_i \leq t < t_{i+1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m,$$

V – стратегия второго игрока, $x(\cdot)$ – движение системы (8.1), порожденное этим управлением $q(\cdot)$ и произвольным измеримым управлением $p(\cdot) : [t_0, \theta] \mapsto P$ первого игрока.

Будем предполагать, что выполнены следующие условия.

- (а) Функции f и g непрерывны на $[0, \theta] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q$; функции f , g и σ удовлетворяют условию Липшица по переменной x :

$$(8.9) \quad \|f(t, x^{(1)}, p, q) - f(t, x^{(2)}, p, q)\| + |g(t, x^{(1)}, p, q) - g(t, x^{(2)}, p, q)| + |\sigma(x^{(1)}) - \sigma(x^{(2)})| \leq \lambda \|x^{(1)} - x^{(2)}\|$$

при $(t, x^{(i)}, p, q) \in [0, \theta] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q, i = 1, 2$.

- (б) Для любых $s \in \mathbb{R}^n$ и $(t, x) \in [0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ выполняется равенство

$$(8.10) \quad \min_{p \in P} \max_{q \in Q} [\langle s, f(t, x, p, q) \rangle - g(t, x, p, q)] = \max_{q \in Q} \min_{p \in P} [\langle s, f(t, x, p, q) \rangle - g(t, x, p, q)] := H(t, x, s).$$

Величина H , определенная этим равенством, называется гамильтонианом дифференциальной игры (8.1), (8.2).

Отметим, что

$$S(t_0, x_0, U, \Delta_1) \cap S(t_0, x_0, V, \Delta_2) \neq \emptyset.$$

Поэтому справедливо неравенство $\Gamma_1(t_0, x_0, U, \Delta_1) \geq \Gamma_2(t_0, x_0, V, \Delta_2)$, из которого имеем

$$(8.11) \quad \Gamma_1^*(t_0, x_0) \geq \Gamma_2^*(t_0, x_0).$$

Последнее неравенство – аналог известного в теории игр неравенства для минимакса и максимина. В тех случаях, когда в (8.11) имеет место равенство, оно определяет цену дифференциальной игры, которую обозначим через $u(t_0, x_0)$.

Цена игры зависит от начальной позиции. Поэтому можно определить функцию цены $(t_0, x_0) \rightarrow u(t_0, x_0)$: $[0, \theta] \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$. Известно, что функция цены в тех точках, где она дифференцируема, удовлетворяет уравнению Айзекса–Беллмана

$$(8.12) \quad \partial u / \partial t + H(t, x, D_x u) = 0.$$

2. В теории позиционных дифференциальных игр вводятся понятия u -стабильных и v -стабильных функций, которые играют ключевую роль в этой теории. Для дифференциальной игры (8.1)–(8.2) u -стабильной называется функция $[0, \theta] \times \mathbb{R}^n \ni (t, x) \rightarrow u(t, x) \in \mathbb{R}$, обладающая следующим свойством: для любых $(t_0, x_0) \in [0, \theta] \times \mathbb{R}^n$, $\tau \in [t_0, \theta]$ и $q \in Q$ существует решение дифференциального включения

$$(8.13) \quad (\dot{x}(t), \dot{z}(t)) \in E_a(t, x(t), q),$$

удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = x_0$, $z(t_0) = u(t_0, x_0)$ и неравенству $z(\tau) \geq u(\tau, x(\tau))$. Здесь

$$(8.14) \quad E_a(t, x, q) := \text{co}\{(f(t, x, p, q), g(t, x, p, q)) : p \in P\}.$$

Напомним, что уравнение (8.12) имеет вид (4.6) (здесь $m = 1$, $h_1 = 1$). Отметим, что отображение E_a удовлетворяет всем требованиям (C.a1')–(C.a3'), указанным в § 4, п. 4. Поэтому для полунепрерывной снизу функции u свойство u -стабильности означает, что эта функция является верхним решением уравнения Айзекса–Беллмана.

Аналогично, свойство v -стабильности означает, что при любом выборе параметра $p \in P$ подграфик нулю u слабо инвариантен относительно дифференциального включения

$$(\dot{x}(t), \dot{z}(t)) \in E_b(t, x(t), p),$$

где

$$E_b(t, x, p) := \text{co}\{(f(t, x, p, q), g(t, x, p, q)) : q \in Q\}.$$

Для полунепрерывной сверху функции u свойство v -стабильности означает, что эта функция является верхним решением уравнения Айзекса–Беллмана.

Известно (см., например, [11]), что существует одна и только одна непрерывная функция, удовлетворяющая краевому условию $u(\theta, x) = \sigma(x)$ и обладающая свойствами u -стабильности и v -стабильности. Эта функция есть функция цены дифференциальной игры вида (8.1), (8.2). Поскольку функция цены является одновременно верхним и нижним решением уравнения Айзекса–Беллмана, то функция цены дифференциальной игры (8.1), (8.2) совпадает с минимаксным и/или вязкостным решением задачи Коши для уравнения (8.12) (краевое условие в этой задаче $u(\theta, x) = \sigma(x)$).

3. В данной работе u -стабильные и v -стабильные функции рассматриваются после того, как определены верхние, нижние, минимаксные и вязкостные (в смысле Крэндалла и Лионса) решения. Важно отметить, что развитие исследований в этой области происходило в другой последовательности. Понятия u -стабильных и v -стабильных функций были введены в конце 60-х годов и широко использовались в теории дифференциальных игр (см., например, [7], [10], [19]). Для уравнений Айзекса–Беллмана эти понятия совпадают с понятиями верхних и нижних решений (в минимаксном и вязкостном смысле). Определения обобщенных решений уравнения Айзекса–Беллмана в инфинитезимальной форме (в форме неравенств для производных по направлениям) были опубликованы в конце 70-х – начале 80-х годов [22], [26]. Дальнейшее развитие этого подхода показало, что его можно использовать для изучения широкого круга задач, не связанных непосредственно с дифференциальными играми (см., например, [23]). При этом сохраняется его конструктивная основа – построение решений УЧП 1-го порядка на траекториях обыкновенных дифференциальных включений, которые играют роль обобщенных характеристик.

Для УЧП 1-го порядка общего вида понятие вязкостного решения было введено в начале 80-х годов в работах М. Дж. Крэндалла и П.-Л. Лионса [35], [36], которые инициировали интенсивные исследования в этой области (работа [34] содержит достаточно полный обзор результатов и библиографию работ, относящихся к теории вязкостных решений). Отметим, в частности, что в ряде работ (см., например, [29], [38], [46], [52]) показано, что для различных типов задач оптимального управления и дифференциальных игр функция цены совпадает с вязкостным решением соответствующего уравнения Айзекса–Беллмана. С другой стороны, УЧП 1-го порядка достаточно общего вида рассматривались как уравнение Айзекса–Беллмана для подобранной определенным способом дифференциальной игры. Такие конструкции описаны и использовались для доказательства существования вязкостных решений краевых задач и задач Коши (см., например, [37], [38], [40]). Большое число публикаций посвящено приложениям теории вязкостных решений к изучению различных проблем теории оптимального управления и дифференциальных игр.

4. Рассмотрим построение ε -оптимальных стратегий, которое в основном следует конструкциям, предложенным в работах Н. Н. Красовского, (см., например, [8], [9]). Вместе с тем, в предлагаемых конструкциях используются элементы теории обобщенных решений УЧП 1-го порядка.

Как известно (см., например, [2]), если функция цены дифференцируема, то оптимальными стратегиями игроков являются функции вида

$$U_0(t, x) = p_0(t, x, s(t, x)), \quad V_0(t, x) = q_0(t, x, s(t, x)),$$

где

$$(8.15) \quad \begin{aligned} p_0(t, x, s) &\in \operatorname{Arg} \min_{p \in P} \left\{ \max_{q \in Q} [\langle f(t, x, p, q), s \rangle - g(t, x, p, q)] \right\}, \\ q_0(t, x, s) &\in \operatorname{Arg} \max_{q \in Q} \left\{ \min_{p \in P} [\langle f(t, x, p, q), s \rangle - g(t, x, p, q)] \right\}, \end{aligned}$$

$s(t, x) = D_x u(t, x)$, $u(t, x)$ — функция цены. В общем случае (когда функция цены не является дифференцируемой) можно использовать стратегии указанного вида, заменив градиент $s(t, x)$ квазиградиентами $s_\alpha(t, x)$, которые определяются следующим образом. Пусть $T \times \mathbb{R}^n \ni (t, x) \rightarrow u(t, x) \in \mathbb{R}$ — функция цены или, что в данном случае то же самое, минимаксное решение уравнения (8.12) с краевым условием $u(\theta, x) = \sigma(x)$.

Рассмотрим ее преобразование

$$(8.16) \quad u_\alpha(t, x) := \min_{y \in \mathbb{R}^n} [u(t, y) + w_\alpha(t, x, y)],$$

где w_α — функция вида (6.9), которая использовалась в доказательстве теоремы 6.1 (о единственности решения задачи Коши). Выберем

$$(8.17) \quad y_\alpha(t, x) \in \operatorname{Arg} \min_{y \in \mathbb{R}^n} [u(t, y) + w_\alpha(t, x, y)].$$

Положим

$$(8.18) \quad s_\alpha(t, x) := D_x w_\alpha(t, x, y_\alpha(t, x)).$$

Если функция u дифференцируема по x в точке (t, x) , то $\lim_{\alpha \rightarrow 0} s_\alpha(t, x) \rightarrow D_x u(t, x)$. Поэтому $s_\alpha(t, x)$ можно назвать квазиградиентом.

Определим позиционную стратегию первого игрока равенством

$$(8.19) \quad U_\alpha(t, x) = p_0(t, x, s_\alpha(t, x)),$$

где функция p_0 определена согласно (8.15).

Справедливо следующее утверждение (ε -оптимальность стратегии U_α).

Для любого компактного множества $\mathbf{D} \subset T \times \mathbb{R}^n$ и любого положительного числа ε существуют $\alpha > 0$ и $\delta > 0$ такие, что

$$(8.20) \quad \Gamma_1(t_0, x_0, U_\alpha, \Delta) \leq u(t_0, x_0) + \varepsilon$$

для всех $(t_0, x_0) \in \mathbf{D}$ и любых разбиений, удовлетворяющих условию $\operatorname{diam}(\Delta) \leq \delta$.

Аналогично можно определить ε -оптимальные стратегии V_α второго игрока, обладающие следующим свойством: для любого компактного множества $\mathbf{D} \subset T \times \mathbb{R}^n$ и любого положительного числа ε существуют $\alpha > 0$ и $\delta > 0$ такие, что

$$(8.21) \quad \Gamma_2(t_0, x_0, V_\alpha, \Delta) \geq u(t_0, x_0) - \varepsilon$$

для всех $(t_0, x_0) \in \mathbf{D}$ и любых разбиений, удовлетворяющих условию $\operatorname{diam}(\Delta) \leq \delta$.

5. В предыдущем параграфе рассматривалась задача типа Дирихле для УЧП 1-го порядка. Было отмечено, что решение этой задачи может быть разрывным. В качестве одной из содержательной задач, в которых возникает уравнение и краевое условие вида (7.1), (7.2), можно привести дифференциальную игру быстрого действия с функционалом платы

$$(8.22) \quad \tau(x(\cdot)) := \begin{cases} \infty, & \text{если } x(t) \notin M \forall t \in [0, \infty), \\ \min\{t \in [0, \infty) : x(t) \in M\} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Здесь $M \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутое целевое множество, $x(\cdot)$ — движение управляемой системы

$$(8.23) \quad \dot{x}(t) = f(x(t), p(t), q(t)), \quad t \geq 0, \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n,$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор, $p(t) \in P$ и $q(t) \in Q$ — управления минимизирующего и максимизирующего игроков. Предполагается, что

$$(8.24) \quad \min_{p \in P} \max_{q \in Q} \langle s, f(x, p, q) \rangle = \max_{q \in Q} \min_{p \in P} \langle s, f(x, p, q) \rangle := \mathcal{H}(x, s)$$

для всех $s \in \mathbb{R}^n$ и $x \in G := \mathbb{R}^n \setminus M$.

В рассматриваемой дифференциальной игре существует функция цены $\overline{G} \ni x \rightarrow T^0(x) \in [0, \infty]$. Известно также, что функция T^0 удовлетворяет уравнению Айзекса–Беллмана

$$(8.25) \quad \mathcal{H}(x, DT^0(x)) + 1 = 0$$

в тех точках, где она дифференцируема. В данной задаче удобно воспользоваться преобразованием Кружкова

$$(8.26) \quad x \rightarrow u(x) := 1 - \exp(-T^0(x)): \overline{G} \mapsto [0, 1],$$

что позволяет перейти к рассмотрению функции, которая не имеет несобственных значений. Уравнение Айзекса–Беллмана преобразуется при этом в уравнение вида (7.1), где $H(x, s) = \mathcal{H}(x, s) + 1$, понятно также, что в данной задаче функция u удовлетворяет краевому условию (7.2), где $\sigma(x) = 0$.

Следует отметить, что обычно функция быстрого действия T^0 имеет непустое множество разрывов, стало быть, функция u тоже, как правило, разрывна. Известно, что минимаксное решение совпадает с функцией u — преобразованной функцией цены. Этот факт следует из совпадения верхних (нижних) решений с u -стабильными (v -стабильными) функциями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Адиатулина Р. А., Тарасьев А. М. Дифференциальная игра неограниченной продолжительности // Прикл. матем. и мех. 1987. Т. 51. С. 531–537.
- [2] Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.
- [3] Демьянов В. Ф., Рубинов А. М. Основы негладкого анализа и квазидифференциального исчисления. М.: Наука, 1990.
- [4] Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988.
- [5] Кларк Ф., Ледяев Ю. С. Новые формулы конечных приращений // ДАН. 1993. Т. 331. № 3. С. 275–277.
- [6] Колокольцов В. Н., Маслов В. П. Задача Коши для однородного уравнения Беллмана // ДАН СССР. 1987. Т. 296. № 4. С. 796–800.
- [7] Красовский Н. Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970.
- [8] Красовский Н. Н. Дифференциальные игры. Аппроксимационные и формальные модели // Матем. сб. 1978. Т. 107. № 4. С. 795–822.
- [9] Красовский Н. Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985.
- [10] Красовский Н. Н., Субботин А. И. Альтернатива для игровой задачи сближения // Прикл. матем. и мех. 1970. Т. 34. С. 1005–1022.
- [11] Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
- [12] Кружков С. Н. Обобщенные решения нелинейных уравнений первого порядка со многими независимыми переменными. I // Матем. сб. 1966. Т. 70. № 3. С. 394–415.
- [13] Кружков С. Н. Обобщенные решения уравнений Гамильтона–Якоби типа эйконала. I // Матем. сб. 1975. Т. 98. № 3. С. 450–493.
- [14] Кружков С. Н., Петросян Н. С. Асимптотическое поведение решений задачи Коши для нелинейных уравнений первого порядка // УМН. 1987. Т. 42. С. 3–40.
- [15] Курант Р. Уравнения с частными производными. Т. 2. М.: Мир, 1964.
- [16] Куржанский А. Б. Об аналитическом описании множества выживающих траекторий дифференциальной системы // ДАН СССР. 1986. Т. 227. № 5. С. 1047–1050.
- [17] Меликян А. А. Необходимые условия оптимальности особой поверхности в форме синтеза для нелинейной управляемой системы // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1993. № 1. С. 158–163.
- [18] Маслов В. П., Самборский С. Н. Существование и единственность решений стационарных уравнений Гамильтона–Якоби и Беллмана. Новый подход // ДАН. 1992. Т. 324. № 6. С. 1143–1148.
- [19] Осипов Ю. С. Дифференциальные игры для систем с последствием // ДАН СССР. 1971. Т. 196. № 4. С. 779–782.
- [20] Осипов Ю. С. К теории дифференциальных игр с распределенными параметрами // ДАН СССР. 1975. Т. 223. № 6. С. 1314–1317.
- [21] Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1964.
- [22] Субботин А. И. Обобщение основного уравнения теории дифференциальных игр // ДАН СССР. 1980. Т. 254. № 2. С. 293–297.
- [23] Субботин А. И. Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона–Якоби. М.: Наука, 1991.
- [24] Субботин А. И. Об одном свойстве субдифференциала // Матем. сб. 1991. Т. 182. № 9. С. 1315–1330.
- [25] Субботин А. И. Монотонные относительно предпорядка траектории дифференциальных включений // Труды Института математики и механики УрО РАН. Екатеринбург (в печати).
- [26] Субботин А. И., Субботина Н. Н. Необходимые и достаточные условия для кусочно-гладкой цены дифференциальной игры // ДАН СССР. 1978. Т. 243. № 4. С. 862–865.

- [27] Aubin J.-P. A survey of viability theory // SIAM J. Control Optim. 1990. V. 28. P. 749–788.
- [28] Aubin J.-P., Cellina A. Differential Inclusions. Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1984.
- [29] Barron E. N., Evans L. C., Jensen R. Viscosity solutions of Isaacs' equations and differential games with Lipschitz controls // J. Differential Equations. 1984. V. 53. P. 213–233.
- [30] Capuzzo-Dolcetta I., Ishii H. Approximate solutions of the Bellman equation of deterministic control theory // Appl. Math. Optim. 1984. V. 11. P. 161–181.
- [31] Clarke F. Generalized gradients and applications // Trans. Amer. Math. Soc. 1975. V. 205. P. 247–262.
- [32] Crandall M. G., Evans L. C., Lions P.-L. Some properties of viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1984. V. 282. P. 487–502.
- [33] Crandall M. G., Ishii H., Lions P.-L. Uniqueness of viscosity solutions revisited // J. Math. Soc. Japan. 1987. V. 39. P. 581–596.
- [34] Crandall M. G., Ishii H., Lions P.-L. A user's guide to viscosity solutions // Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 1992. V. 27. P. 1–67.
- [35] Crandall M. G., Lions P.-L. Condition d'unicité pour les solutions généralisées des équations Hamilton–Jacobi du 1^{er} ordre // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. A–B. 1981. V. 292. P. 183–186.
- [36] Crandall M. G., Lions P.-L. Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. V. 277. P. 1–42.
- [37] Crandall M. G., Lions P.-L. Hamilton–Jacobi equations in infinite dimensions. Part II. Existence of viscosity solutions // J. Funct. Anal. 1986. V. 65. P. 368–405.
- [38] Evans L. C., Souganidis P. E. Differential games and representation formulas for solutions of Hamilton–Jacobi–Isaacs equations // Indiana Univ. Math. J. 1984. V. 33. P. 773–797.
- [39] Fleming W. H., Sonner H. M. Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions. New York: Springer-Verlag, 1993.
- [40] Fleming W. H. The Cauchy problem for degenerate parabolic equations // J. Math. Mech. 1964. V. 13. P. 987–1008.
- [41] Guseinov H. G., Subbotin A. I., Ushakov V. N. Derivatives for multivalued mappings with applications to game theoretical problems of control // Probl. Contr. Inform. Theory. 1985. V. 14. P. 155–167.
- [42] Haddad G. Monotone trajectories of differential inclusions and functional-differential inclusions with memory // Izrael J. Math. 1981. V. 39. P. 83–100.
- [43] Hopf E. Generalized solutions of nonlinear solutions of first order // J. Math. Mech. 1965. V. 14. P. 951–973.
- [44] Ishii H. Perron's method for Hamilton–Jacobi equations // Duke Math. J. 1987. V. 55. P. 369–384.
- [45] Kurzhanski A. B., Filippova T. F. Dynamics of the set of viable trajectories to a differential inclusion: the evolution equation // Probl. Contr. Inform. Theory. 1988. V. 17. P. 137–144.
- [46] Lions P.-L., Souganidis P. E. Differential games, optimal control and directional derivatives of viscosity solutions of Bellman's and Isaacs equations // SIAM J. Control Optim. 1985. V. 23. P. 556–583.
- [47] Nagumo M. Über die Laga der integralkurven gewöhnlicher differential Gleichungen // Proc. Phys. Math. Japan. 1942. V. 24. P. 399–414.
- [48] Subbotin A. I. Generalization of the main equation of differential game theory // J. Optim. Theory Appl. 1984. V. 43. P. 103–133.
- [49] Subbotin A. I. Existence and uniqueness results for Hamilton–Jacobi equations // Nonlinear Anal. 1991. V. 16. P. 683–689.

- [50] Subbotin A. I. Discontinuous solutions of a Dirichlet type boundary value problem for first order PDE // Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1993. V. 8. P. 145–164.
- [51] Subbotin A. I. Generalized characteristics of first-order partial differential equations // Preprint CRM-1848. Montréal, 1993.
- [52] Subbotin A. I., Tarasyev A. M. Stability properties of the value function of a differential game and viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Probl. Contr. Inform. Theory. 1986. V. 15. P. 451–463.

Институт математики и механики УрО РАН,
г. Екатеринбург

Поступила в редакцию
25.10.1993