Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. А. Яськов, Асимптотическое поведение плотностей бернуллиевских сверток $\sum \pm n^{-\alpha}$ при $1/2 < \alpha \leq 1$, *УМН*, 2011, том 66, выпуск 6, 191–192

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9450>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 11:55:31

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Асимптотическое поведение плотностей
бернуллиевских сверток $\sum \pm n^{-\alpha}$ при $1/2 < \alpha \leq 1$

П. А. Яськов

1. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n X_n$, где $(X_n)_{n \geq 1}$ — независимые бернуллиевские величины с $P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = 1/2$. Данный ряд сходится по распределению к некоторой случайной величине X тогда и только тогда, когда $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 < \infty$ (критерий Колмогорова). Распределение величины X называют *бернуллиевской сверткой*, а X интерпретируют как предельное положение случайного блуждания $\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i$ с затухающими шагами λ_n . Подобные блуждания возникают в некоторых физических моделях (см. [1]), а также при анализе эффекта межсимвольной интерференции в каналах связи (см. ссылки в [2]).

Согласно теореме 3.7.5 в [3], при $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \infty$ носитель распределения X есть $\mathbb{R}$. В этом случае, как установлено в [4], хвосты распределения X убывают быстрее гауссовских, т. е. $P(|X| > x)/x^2 \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow \infty$. В [5] с помощью некоторых теорем о целых функциях доказано, что при $\lambda_n = n^{-1}$ имеет место куда более сильное свойство

$$\overline{\lim}_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\ln f(x)}{e^{|x|}} = -\frac{e^{-2\gamma}\pi}{4},$$

где γ — константа Эйлера, а $f = f(x)$ — непрерывный вариант плотности X . В данной работе мы уточним этот результат и исследуем случай $\lambda_n = n^{-\alpha}$, $1/2 < \alpha < 1$.

2. Основной результат настоящей заметки содержит следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Для каждого $1/2 < \alpha \leq 1$ величина $X_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} X_n$ имеет бесконечно гладкую плотность $f_\alpha = f_\alpha(x)$, $x \in \mathbb{R}$. При этом имеют место соотношения

$$\overline{\lim}_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\ln f_\alpha(x)}{|x|^{1/(1-\alpha)}} = -(1-\alpha) \left(\frac{\alpha}{C_\alpha} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln P(X_\alpha > x)}{x^{1/(1-\alpha)}} = -(1-\alpha) \left(\frac{\alpha}{C_\alpha} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}},$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 10-01-00397 и № 11-01-00949).

когда $1/2 < \alpha < 1$ и $C_\alpha = \int_0^\infty \ln \operatorname{ch} u^{-\alpha} du$. Кроме того, при $\alpha = 1$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\ln f_1(x)}{e^{|x|}} = -\frac{e^{-2\gamma}\pi}{4} \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln P(X_1 > x)}{e^x} = -\frac{e^{-2\gamma}\pi}{4}.$$

Существование бесконечно гладкой плотности в теореме 1 вытекает, к примеру, из результатов [6]. Доказательство асимптотики f_α , $1/2 < \alpha < 1$, проводится в два шага – устанавливаются верхняя и нижняя оценки указанного предела. Верхняя оценка получается с помощью соотношений

$$f_\alpha(x) \leq \frac{e^{sx}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\varphi_\alpha(t + is)| dt, \quad s, x \in \mathbb{R}, \quad \text{и} \quad \overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s^{1/\alpha}} \ln \int_{\mathbb{R}} |\varphi_\alpha(t + is)| dt \leq C_\alpha,$$

первое из которых вытекает из формулы обращения; здесь $\varphi_\alpha(z) = \mathbb{E}e^{izX_\alpha}$, $z \in \mathbb{C}$. Нижняя оценка выводится из равенства

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s^{-1/\alpha} \ln \varphi_\alpha(is) = C_\alpha. \quad (1)$$

Полученное предельное соотношение на f_α позволяет установить подходящую верхнюю оценку для хвоста распределения X_α . Асимптотическая оценка снизу для $P(X_\alpha > x)$ выводится из (1), равенств $\varphi_\alpha(is) = \varphi_\alpha(-is) = s \int_{\mathbb{R}} e^{sx} P(X_\alpha > x) dx$ и монотонности функции $P(X_\alpha > x)$.

Ввиду результатов [5] в случае $\alpha = 1$ достаточно доказать, что

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\ln f_1(x)}{e^{|x|}} = -\frac{e^{-2\gamma}\pi}{4}.$$

Последнее проверяется с помощью соотношения (см. формулу (3) в [5])

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \{s^{-1} \ln \varphi_1(is) - \ln s\} = 2\gamma - 1 + \ln \frac{4}{\pi}$$

с учетом унимодальности плотности f_1 (см. [7]).

Теорема 1 весьма тесным образом связана с тауберовыми теоремами для логарифмически вогнутых плотностей, в связи с чем отметим работы [8]–[10], а также книгу [11].

Список литературы

- [1] P. L. Krapivsky, S. Redner, *Amer. J. Phys.*, **72**:5 (2004), 591–598. [2] R. Barakat, *Inform. Sci.*, **14**:3 (1978), 189–197. [3] Е. Лукач, *Характеристические функции*, Наука, М., 1979, 424 с.; пер. с англ.: E. Lukacs, *Characteristic functions*, 2nd ed., revised and enlarged, Hafner Publishing Co., New York; Charles Griffin and Co., London, 1970, x+350 pp. [4] A. Wintner, *Amer. J. Math.*, **57**:4 (1935), 821–826. [5] C. D. Offner, *Math. Z.*, **175**:3 (1980), 189–217. [6] J. I. Reich, *Ann. Probab.*, **14**:3 (1986), 1005–1013. [7] B. Schmul, *Amer. Math. Monthly*, **110**:5 (2003), 407–416. [8] P. D. Feigin, E. Yashchin, *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb.*, **65**:1 (1983), 35–48. [9] A. A. Balkema, C. Klüppelberg, S. I. Resnick, *Proc. London Math. Soc.* (3), **66**:3 (1993), 568–588. [10] A. A. Balkema, C. Klüppelberg, U. Stadtmüller, *J. London Math. Soc.* (2), **51**:2 (1995), 383–400. [11] А. Л. Якимив, *Вероятностные приложения тауберовых теорем*, Физматлит, М., 2005, 256 с.; англ. изд.: A. L. Yakimiv, *Probabilistic applications of Tauberian theorems*, Mod. Probab. Statist., VSP, Leiden, 2005, viii+225 pp.

П. А. Яськов (P. A. Yaskov)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: yaskov_pavel@mail.ru

Представлено Д. В. Трещёвым
Принято редколлегией
11.11.2011