Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, С. П. Суетин, Аппроксимации Паде–Чебышёва для многозначных аналитических функций, вариация равновесной энергии и S -свойство стационарных компактов, *УМН*, 2011, том 66, выпуск 6, 3–36

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9452>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 05:55:07

УДК 517.53

Аппроксимации Паде–Чебышёва для многозначных аналитических функций, вариация равновесной энергии и S -свойство стационарных компактов

А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, С. П. Суетин

Рассматриваются аппроксимации Паде–Чебышёва для многозначных аналитических функций, заданных и вещественных на единичном отрезке $[-1, 1]$. Основное внимание уделяется нелинейным аппроксимациям Паде–Чебышёва. Для таких рациональных аппроксимаций получен аналог классической теоремы Шталя о сходимости по емкости аппроксимаций Паде в соответствующей “максимальной” области голоморфности заданной функции. Скорость сходимости характеризуется в терминах стационарного компакта для смешанной (гриново-логарифмической) теоретико-потенциальной задачи равновесия.

Библиография: 79 названий.

Ключевые слова: рациональные аппроксимации, аппроксимации Паде, многочлены Чебышёва, нелинейные аппроксимации Паде–Чебышёва, стационарный компакт, теорема Шталя, сходимость по емкости.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение.....	3
2. Обозначения и формулировка основных результатов.....	13
3. Доказательство теоремы 5.....	20
4. Доказательство теоремы 6.....	26
Список литературы.....	31

1. Введение

1.1. Пусть на единичном отрезке $E = [-1, 1]$ задана вещественная функция f , голоморфная на E . Для произвольного натурального числа n через $\mathcal{R}_n$ обозначим класс всех рациональных функций r вида $r = p/q$, где p, q – произвольные алгебраические полиномы степени $\leq n$, $q \neq 0$. Отметим, что число свободных параметров, определяющих функцию из класса $\mathcal{R}_n$, равно $2n + 1$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 11-01-00330) и программы “Ведущие научные школы” (грант НШ-8033.2010.1).

Пусть функция f продолжается с отрезка E в некоторую область $G \supset E$ как (однозначная) голоморфная функция. Тогда для величины

$$\varepsilon_n(f) = \inf_{r \in \mathcal{R}_n} \|f - r\|_E = \inf_{r \in \mathcal{R}_n} \sup_{x \in E} |(f - r)(x)| \quad (1)$$

– наилучшего равномерного приближения f рациональными дробями из класса $\mathcal{R}_n$ – справедливо *неравенство Уолша* (см. [1]):

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n^{1/n} \leq q, \quad (2)$$

где

$$q = \exp \left\{ -\frac{1}{C(E, \overline{\mathbb{C}} \setminus G)} \right\} < 1, \quad (3)$$

$C(E, \overline{\mathbb{C}} \setminus G)$ – емкость конденсатора $(E, \overline{\mathbb{C}} \setminus G)$.

Неравенство (2) носит *универсальный характер* – оно неулучшаемо в классе *всех* функций, голоморфных в области G . Однако для некоторых вполне естественных классов функций неравенство Уолша (2) может быть существенно усилено.

Пусть $f = \hat{\sigma}$, где $\hat{\sigma}$ – *марковская функция*:

$$\hat{\sigma}(z) = \int_c^d \frac{d\sigma(x)}{z - x}, \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus [c, d], \quad (4)$$

σ – положительная борелевская мера на отрезке $[c, d] \subset \mathbb{R}$, $[c, d] \cap E = \emptyset$. Если $\sigma' = d\sigma/dx > 0$ почти всюду (п. в.) на $[c, d]$, то для наилучших рациональных аппроксимаций функции f имеем (см. [2])

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n^{1/n} = q^2, \quad (5)$$

где величина $q < 1$ имеет тот же смысл, что и в (2), с заменой конденсатора $(E, \overline{\mathbb{C}} \setminus G)$ на конденсатор $(E, [c, d])$ (в соотношении (5) содержатся два утверждения: существование предела и информация о его величине). Таким образом, в классе марковских функций (4), голоморфных в области $G = \overline{\mathbb{C}} \setminus [c, d]$, вместо неравенства Уолша (2) имеет место существенно более сильное *равенство* (5). Соотношение (5) справедливо и для функций вида $f = \hat{\sigma} + r$, где r – рациональная функций, голоморфная на E .

В серии работ 1985–1986 гг. Г. Шталь [3]–[7] (см. также [8], [9]) получил ряд результатов о сходимости классических и многоточечных аппроксимаций Паде для функций, голоморфных соответственно в точке $z = \infty$ и на фиксированном односвязном континууме в $\mathbb{C}$ и имеющих в $\overline{\mathbb{C}}$ конечное число особых точек многозначного характера. Из его результата, относящегося к случаю континуума, и результатов работы [10; § 1, теорема 1', формула (28)] вытекает справедливость равенства (5) в классе функций, вещественных и голоморфных на $E = [-1, 1]$ и имеющих в $\overline{\mathbb{C}} \setminus E$ конечное число особых точек многозначного характера (см. ниже определение 1). Точнее, обозначим через R_n наилучшие равномерные рациональные аппроксимации функции f на отрезке E в классе $\mathcal{R}_n$. Тогда из “второй” теоремы Шталя (см. [6]–[7], а также [11; гл. 1, § 3]) и теоремы 1' работы [10; § 1, формула (28)] вытекает справедливость следующего результата.

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция f вещественна и голоморфна на отрезке $E = [-1, 1]$ и допускает голоморфное продолжение с отрезка в $\overline{\mathbb{C}}$ всюду за исключением конечного числа особых точек многозначного характера. Тогда существует единственный компакт $F = F(f)$, не пересекающийся с E и такой, что функция f голоморфна¹ в области $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ и для любого компакта $K \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus (E \cup F)$

$$|(f - R_n)(z)|^{1/n} \xrightarrow{\text{cap}} e^{-2G_F^\lambda(z)} < 1, \quad z \in K. \quad (6)$$

(Здесь “ $\xrightarrow{\text{cap}}$ ” означает сходимость по логарифмической емкости на соответствующем компакте.) В соотношении (6) $\lambda = \lambda^F$ – единичная мера с носителем на E , $G_F^\lambda(z)$ – гринов (относительно F) потенциал меры λ . Компакт F обладает так называемым S -свойством (см. (21)), не разбивает плоскость и состоит из конечного числа аналитических дуг, а λ – равновесная мера (с носителем на E ; см. раздел 2). Соотношение (6) означает, что последовательность R_n сходится к функции f в области Шталя $D_f := \overline{\mathbb{C}} \setminus F$ со скоростью геометрической прогрессии. С учетом результатов работы [10] из (6) вытекает, что в условиях и обозначениях теоремы 1 справедлив аналог равенства (5)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n^{1/n} = q^2; \quad (7)$$

величина q имеет тот же смысл, что и в (2), с заменой конденсатора $(E, \overline{\mathbb{C}} \setminus G)$ на конденсатор (E, F) , $F = F(f)$. Отметим, что S -симметричный компакт F является стационарной точкой некоторого функционала энергии (см. раздел 2).

Обозначим через $\mu(Q)$ меру, ассоциированную с произвольным полиномом Q :

$$\mu(Q) = \sum_{\zeta: Q(\zeta)=0} \delta_\zeta,$$

где δ_ζ – мера Дирака с носителем в точке ζ . Пусть $\tilde{\lambda} = \beta_F(\lambda)$ – выметание равновесной меры λ из области Шталя $D_f = \overline{\mathbb{C}} \setminus F$ на $F = \partial D_f$. Тогда в условиях теоремы Шталя для знаменателей $q_n(z)$ рациональных функций R_n имеем:

$$\frac{1}{n} \mu(q_n) \rightarrow \tilde{\lambda}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (8)$$

где сходимость мер понимается в слабой топологии. Таким образом, мера $\tilde{\lambda}$ (с носителем на F) характеризует предельное распределение полюсов рациональной аппроксимации R_n , а сама равновесная мера λ (с носителем на E) характеризует предельное распределение точек интерполяции функции f рациональной функцией R_n (ср. (40)).

В связи с (8) напомним хорошо известную теорему Йенча–Сегё (см. [12], [13], а также [14]–[16]) для наилучших равномерных полиномиальных аппроксимаций функции f , голоморфной на E .

¹Точнее, функция f допускает голоморфное продолжение в $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$, которое мы также будем обозначать через f .

Для произвольного $\rho > 1$ через γ_ρ обозначим эллипс с фокусами в точках ± 1 и суммой полуосей, равной ρ . Внутренность эллипса γ_ρ обозначим через G_ρ ; области G_ρ будем называть *каноническими* (относительно E). Пусть $\rho_0 = \rho_0(f)$ – индекс максимальной канонической области, в которую f продолжается как голоморфная функция.

ТЕОРЕМА ЙЕНЧА–СЕГЁ. Пусть функция f голоморфна на отрезке E . Тогда существует бесконечная подпоследовательность $\Lambda = \Lambda(f) \subset \mathbb{N}$ такая, что для наилучших равномерных полиномиальных аппроксимаций P_n функции f имеет место соотношение:

$$\frac{1}{n} \mu(P_n) \rightarrow \lambda_\gamma, \quad n \in \Lambda, \quad n \rightarrow \infty,$$

где

$$d\lambda_\gamma(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \frac{|d\zeta|}{|\zeta^2 - 1|^{1/2}}, \quad \zeta \in \gamma,$$

– равновесная мера для эллипса $\gamma = \gamma_{\rho_0(f)}$, $\rho_0(f)$ – индекс голоморфности функции f .

Таким образом, нули полиномов наилучшего равномерного приближения функции f локализуют максимальный эллипс голоморфности f , фактически “отрезая” внутренность этого эллипса от его внешней части. Аналогичный результат справедлив и для наилучших равномерных рациональных аппроксимаций функции f с фиксированной степенью знаменателя; подробнее см., например, [16].

Отметим, что хорошо известный алгоритм Ремеза [17] (см. также [18]–[24]) позволяет практически находить наилучшие равномерные полиномиальные и рациональные аппроксимации заданной функции. Именно этот алгоритм реализован в системе Maple (см. [25]). Однако процесс практического приближенного построения такой рациональной аппроксимации предполагает, что исходная функция f задана в виде явного аналитического (формульного) выражения.

1.2. Пусть $T_k(x)$ – полиномы Чебышёва (первого рода), ортонормированные на отрезке E по мере $d\tau(x) = (1 - x^2)^{-1/2} dx$. Функция f , $f \in \mathcal{H}(E)$, представляется на E рядом Фурье–Чебышёва:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k T_k(x), \quad c_k = c_k(f) = \int_{-1}^1 f(x) T_k(x) d\tau(x). \quad (9)$$

Ряд (9) сходится к $f(x)$ локально равномерно в области $G_0(f) = G_\rho$, где $\rho = \rho_0(f)$ – индекс максимальной канонической области, в которую f продолжается как голоморфная функция. Область $G_0(f)$ – максимальная область сходимости ряда (9).

Будем теперь считать, что вещественная функция $f \in \mathcal{H}(E)$ задана на E (сходящимся) рядом Фурье–Чебышёва

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k T_k(x), \quad c_k = c_k(f) \in \mathbb{R} \quad (10)$$

(см. [26]–[29] и ниже замечание 1). Для частичных сумм S_n ряда (10) также справедлив аналог теоремы Йенча–Сегё:

$$\frac{1}{n} \mu(S_n) \rightarrow \lambda_\gamma, \quad n \in \Lambda' = \Lambda'(f), \quad n \rightarrow \infty.$$

Таким образом, нули частичных сумм ряда (10) в пределе также локализуют максимальный эллипс голоморфности f (см. рис. 1).

Рис. 1. Максимальный эллипс голоморфности (красная линия) функции $f(z) = \sqrt{(z-a)(z-\bar{a})}$, $\text{Im } a > 0$, и расположение нулей (красные звездочки) частичных сумм Фурье–Чебышёва S_{100} и полюсов и нулей (синие точки) нелинейных аппроксимаций Паде–Чебышёва F_{50} функции f (см. замечание 2)

Рассмотрим теперь следующую задачу. В классе $\mathcal{R}_n$ найти² рациональную функцию F_n , голоморфную на отрезке E и удовлетворяющую следующему условию:

$$c_k(F_n) = c_k(f), \quad k = 0, \dots, 2n. \quad (11)$$

Иными словами, разложение рациональной функции $F_n = P/Q$ в ряд Фурье–Чебышёва должно иметь вид

$$F_n(x) = c_0 + c_1 T_1(x) + \dots + c_{2n} T_{2n} + c_{2n+1}^* T_{2n+1} + \dots \quad (12)$$

Подлежат определению из системы (11) коэффициенты многочленов P и Q . Рациональная функция F_n (если она существует) называется *нелинейной диагональной аппроксимацией Паде–Чебышёва* функции f (аппроксимацией Паде ряда (10)).

Система (11) нелинейна относительно коэффициентов полиномов P и Q и не всегда имеет решение. Тем самым, нелинейная аппроксимация Паде–Чебышёва может не существовать. Так как полиномы Чебышёва являются полиномами Фабера для отрезка E , то существование нелинейной аппроксимации Паде–

²Напомним, что число свободных параметров, определяющих функцию из класса $\mathcal{R}_n$, равно $2n + 1$.

Рис. 2. Максимальный эллипс голоморфности (красная линия) функции $f(z) = \sqrt{(z-a)(z-\bar{a})} + \sqrt[3]{(z-b)(z-\bar{b})(z-c)}$, $\text{Im } a, \text{Im } b > 0$, $c = -1.9$, и расположение нулей (красные звездочки) частных сумм Фурье–Чебышёва S_{100} и полюсов и нулей (синие точки) нелинейных аппроксимаций Паде–Чебышёва F_{50} функции f (см. замечание 2)

Чебышёва тесно связано с существованием аппроксимации Паде степенного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} c_k w^k$, $c_k = c_k(f)$, обладающей определенными свойствами “регулярности” (см. прежде всего [30], а также [31], [32] и [33]). Отметим, что приведенное определение аппроксимации Паде–Чебышёва (далее – АПЧ) основано на нелинейной (относительно коэффициентов искомой рациональной функции) схеме Бейкера определения классических аппроксимаций Паде степенного ряда. Второй способ определения АПЧ, основанный на линейной схеме Фробениуса, приводит к существенно другим результатам (см. [34; ч. 2, § 1.6], а также [35]–[40]). В настоящей работе обсуждается сходимость *нелинейных* диагональных (типа (n, n)) АПЧ.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Представление функций в виде рядов Чебышёва активно используется в различных разделах математики при решении как теоретических, так и прикладных задач; см., например, [24], [26], [28], [29], [41]–[48]. Такое представление вполне можно рассматривать как способ эффективного *задания* аналитической функции; см. прежде всего монографии [49] и [28].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Обсудим результаты вычислений, проведенных с помощью Maple и представленных на рис. 1 и 2. На обоих рисунках черная прямая линия соответствует отрезку $[-1, 1]$, красная сплошная линия ограничивает максимальный эллипс голоморфности функции $f(z)$. Красная звездчатая линия соответствует нулям частичной суммы $S_{100}(z; f)$; видно, что эти нули хорошо локализируют эллипс голоморфности f – максимальную область сходимости ряда Фурье–Чебышёва (9). Синие точечные линии соответствуют нулям и полюсам нелинейной АПЧ F_{50} . В силу теоремы 6 эти точки локализируют S -компакт, соответствующий заданной функции f . Рациональные функции F_n сходятся

к функции f в *дополнении* к этому компакту. В силу теоремы 1 аналогичный результат имеет место и для наилучших в равномерной метрике рациональных аппроксимаций R_n для функции f . Однако вычисление наилучших рациональных аппроксимаций при помощи алгоритма Ремеза оказалось гораздо более трудоемкой операцией и проиллюстрировать теорему 1 на примере рациональной функции R_{50} нам не удалось.

1.3. В связи с приведенной выше в п. 1.1 теоремой 1 и соотношением (8) (ср. (40)) естественным образом возникает вопрос о сходимости нелинейных АПЧ для *такого же класса* (см. определение 1) аналитических функций, имеющих конечное число особых точек многозначного характера. В настоящей работе доказан аналог теоремы Шталя для нелинейных АПЧ. Сделаем в этой связи два замечания.

1.3.1. В работах авторов [35] и [36] для общих ортогональных разложений были рассмотрены оба способа (Бейкера и Фробениуса) построения диагональных аппроксимаций Паде и доказаны теоремы о сходимости таких рациональных аппроксимаций для произвольной марковской функции (4) (см. ниже теорему 4). Настоящая работа является естественным развитием работ [35] и [36] для случая нелинейных АПЧ: вместо марковской функции мы рассматриваем здесь произвольную функцию, вещественную и голоморфную на E и имеющую вне E конечное число особых точек многозначного характера (см. определение 1). Основной результат настоящей работы – теорема 6 о скорости сходимости (по емкости) диагональных АПЧ для функций из указанного класса и о предельном распределении точек интерполяции функции f рациональной функцией F_n . Эта теорема является аналогом “первой” теоремы Шталя [6] (см. также обзор [11; гл. 1, § 3]) о сходимости по емкости диагональных аппроксимаций Паде для функций, заданных (сходящимся) степенным рядом в точке $w = 0$ и имеющих в $\mathbb{C}_w$ конечное число особых точек многозначного характера (ср. теоремой 1 из п. 1.1 для *наилучших* диагональных аппроксимаций). При доказательстве сходимости нелинейных АПЧ мы *используем эту первую теорему Шталя*: благодаря результатам работы [30] о нелинейных аппроксимациях Паде–Фабера, нелинейные АПЧ функции f оказываются связанными с аппроксимациями Паде степенного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} c_k w^k$, $c_k = c_k(f)$, с помощью оператора Фабера–Чебышёва (подробнее см. пп. 4.1, 4.2). Тем самым, непосредственно из первой теоремы Шталя вытекает, что рациональные функции F_n сходятся по емкости к функции f в дополнении к образу компакта Шталя при отображении, задаваемом функцией Жуковского $z = \text{Zh}(w) := (w + 1/w)/2$. Таким образом, основные доказанные здесь утверждения теоремы 6 состоят в следующем:

- 1) компакт F , обладающий S -свойством (21), существует, единствен и является стационарным компактом для функционала энергии (14) при $\theta = 1$; компакт F совпадает с образом первого компакта Шталя S , заданным в плоскости переменного w , при отображении с помощью функции Жуковского: $F = \text{Zh}(S)$;
- 2) справедливо соотношение (39), характеризующее скорость сходимости рациональных аппроксимаций F_n к функции f на компактных подмножествах

области $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ в терминах гринова (относительно стационарного компакта F) потенциала равновесной меры λ ; таким образом, для нелинейных АПЧ (той же самой функции $f \in \mathcal{A}_E(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Sigma)$) имеет место аналог формулы (6), но с другим S -симметричным компактом;

3) предельное распределение точек интерполяции исходной функции f рациональной функцией F_n вполне характеризуется мерой $\lambda = \lambda^F$ – равновесной мерой (с носителем на E) для стационарного компакта F , а предельное распределение полюсов F_n – мерой $\tilde{\lambda} = \beta_F(\lambda)$ – выметанием λ из области $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ на F (ср. (8)).

1.3.2. В [30] (см. также [31], [32]) был изучен вопрос о существовании диагональных нелинейных аппроксимаций Паде–Фабера, частным случаем которых являются аппроксимации Паде–Чебышёва. Оказалось, что при заданном номере n существование такой аппроксимации тесно связано с существованием аппроксимации Паде степенного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} c_k w^k$, $c_k = c_k(f)$, в смысле Бейкера и отсутствием у этой рациональной функции полюсов в замкнутом единичном круге $|w| \leq 1$. Эти условия выполняются, вообще говоря, не при любом n . Более того, в [32] приведен пример (основанный на контрпримере Буслаева [50], [51] к гипотезе Бейкера–Гаммеля–Уиллса) гиперэллиптической функции рода $g = 2$, для которой нелинейные диагональные АПЧ не существуют ни при каком $n \geq 2$. Однако контрпример Буслаева связан с некоторым “вырождением”: соответствующая гиперэллиптическая функция разлагается в периодическую непрерывную дробь. С другой стороны, из работ [52] и [53] (см. также [54]) вытекает, что в “типичной” ситуации для достаточно широкого класса аналитических функций, включающего в себя все “типичные” гиперэллиптические функции, всегда существует некоторая бесконечная подпоследовательность (зависящая от выбранной функции), для которой требуемые условия выполняются. Тем самым, для соответствующего класса многозначных функций, полученных с помощью преобразования Жуковского $z = Zh(w)$, нелинейные АПЧ существуют по крайней мере по некоторой подпоследовательности.

1.4. Приведем необходимые определения и обозначения.

Пусть $E = [-1, 1]$ – единичный отрезок на вещественной прямой $\mathbb{R}$. Через $M(E)$ обозначим множество всех единичных (положительных борелевских) мер, носители которых принадлежат E . Для произвольного компакта $K \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus E$ через $D(K)$ обозначим ту связную компоненту его дополнения, которая содержит отрезок E ; в дальнейшем будем предполагать, что область $D(K)$ регулярна относительно решения задачи Дирихле и $g_K(z, \zeta)$ – соответствующая области $D(K)$ функция Грина с особенностью в точке $z = \zeta \in D(K)$. Для произвольной меры $\mu \in M(E)$ определены логарифмический и гринов (по отношению к области $D(K)$) потенциалы:

$$V^\mu(z) = \int_{-1}^1 \log \frac{1}{|z - x|} d\mu(x), \quad G_K^\mu(z) = \int_{-1}^1 g_K(z, x) d\mu(x), \quad z \notin E \quad (13)$$

(полагаем $g_K(z, x) \equiv 0$ при $z \in K$, $x \in E$). Пусть $\theta \in [0, \infty)$ – произвольное фиксированное число. Для фиксированного компакта K существует *единственная*

мера $\lambda(\theta) = \lambda^K(\theta) \in M(E)$, минимизирующая функционал энергии

$$\begin{aligned} J_\theta(K; \mu) &:= \iint_{E \times E} \left(\theta \log \frac{1}{|x - y|} + g_K(x, y) \right) d\mu(x) d\mu(y) \\ &= \int_E (\theta V^\mu(x) + G_K^\mu(x)) d\mu(x) \end{aligned} \quad (14)$$

в классе всех мер $\mu \in M(E)$, т. е.

$$J_\theta(K; \lambda^K) = \min_{\mu \in M(E)} J_\theta(K; \mu).$$

Экстремальная мера $\lambda(\theta)$ и только эта мера (в классе $M(E)$) является *равновесной мерой* для смешанного (гриново-логарифмического) потенциала $\theta V^\mu(z) + G_K^\mu(z)$. Другими словами, мера $\lambda(\theta)$ – единственная мера из класса $M(E)$, для которой на E имеет место соотношение равновесия

$$\theta V^{\lambda(\theta)}(x) + G_K^{\lambda(\theta)}(x) \equiv w(\theta) = \text{const}, \quad x \in E, \quad (15)$$

$w(\theta) = w^K(\theta)$ – соответствующая *постоянная равновесия*; при этом $J_\theta(K; \lambda) = w(\theta)$ (см. [55], [56], [10]).

Введем определения и обозначения, связанные с классом аналитических функций, рассматриваемых в настоящей работе.

Пусть $\Sigma = \{a_1, \dots, a_p\} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $p \geq 2$, – конечное множество, симметричное относительно вещественной прямой. В дальнейшем рассматриваются только функции f , голоморфные и вещественные на отрезке E и допускающие аналитическое продолжение с отрезка E по любому пути, лежащему в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Sigma$, при этом $f \notin \mathcal{H}(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Sigma)$. Множество таких функций будем обозначать через $\mathcal{A}_E(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Sigma)$. Будем также считать, что каждая точка $a_j \in \Sigma$ является особой точкой функции f многозначного характера.

Пусть $\mathcal{K}$ – множество всех непустых компактов на плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, а $m(K)$ – число связных компонент компакта $K \in \mathcal{K}$.

Положим $\mathcal{K}^{(m)} = \{K \in \mathcal{K} : m(K) \leq m\}$. Тем самым, $\mathcal{K}^{(1)}$ – множество континуумов, и если $K \in \mathcal{K}^{(m)}$, то $K = \bigcup_{j=1}^{m'} \gamma_j$, где $\gamma_j \subset \mathcal{K}^{(1)}$, $j = 1, \dots, m'$, $\gamma_s \cap \gamma_j = \emptyset$, $s \neq j$, $m' \leq m$; континуумы γ_j будем называть *компонентами* K .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $\mathcal{K}_f$ есть множество $K \in \mathcal{K}^{(p-1)}$ таких, что:

- (1) $f(z)$ допускает голоморфное (однозначное аналитическое) продолжение в область $D(K)$: $f \in \mathcal{H}(D(K))$,
- (2) любая компонента $\gamma_j \subset K$ содержит не менее двух точек из множества Σ .

Произвольный компакт $K \in \mathcal{K}_f$ будем называть *допустимым* для заданной многозначной аналитической функции f (вещественной и голоморфной на отрезке E).

Если задана функция $f \in \mathcal{A}_E(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Sigma)$, то тем самым зафиксирован и соответствующий ей класс допустимых компактов $\mathcal{K}_f$. Предполагается, что функционал энергии (14) рассматривается при произвольном $\theta \in [0, \infty)$ для этого зафиксированного класса компактов $\mathcal{K}_f$.

Отметим, что с точки зрения теории рациональной аппроксимации наибольший интерес представляют значения $\theta = 0, 1, 3$ (см. [35]–[39]).

Для заданной функции $f \in \mathcal{A}_E(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Sigma)$ (см. определение 1) и параметра $\theta \in [0, +\infty)$ в классе $\mathcal{K}_f$ допустимых компактов K для f рассмотрим следующую теоретико-потенциальную задачу:

$$\sup_{K \in \mathcal{K}_f} \inf_{\mu \in M(E)} J_\theta(K; \mu) = \sup_{K \in \mathcal{K}_f} J_\theta(K; \lambda_K). \quad (16)$$

Если существует компакт $F = F(\theta) \in \mathcal{K}_f$, для которого достигается супремум в правой части (16), то F называется *стационарным компактом* для задачи (16) (см. определение 2). Значениям параметра $\theta = 0, 1, 3$ соответствуют различные теоретико-потенциальные задачи (16) и, вообще говоря, различные стационарные компакты $F(0)$, $F(1)$, $F(3)$. Эти компакты совпадают только в исключительных случаях, например, для марковской функции $f = \hat{\sigma}$, носитель меры которой – отрезок вещественной прямой (см. [35]–[37], а также теорему 4). При этом компакт $F(0)$ соответствует наилучшим рациональным аппроксимациям функции f , $F(1)$ – нелинейным АПЧ, $F(3)$ – линейным АПЧ, и все три стационарных (в заданном классе $\mathcal{K}_f$) компакта являются *S-симметричными* (иначе говоря, обладают S-свойством, см. определение 3 и [57]):

$$\frac{\partial G_F^\lambda}{\partial n_+}(\zeta) = \frac{\partial G_F^\lambda}{\partial n_-}(\zeta), \quad \zeta \in F^0, \quad (17)$$

где $F = F(\theta)$, $\lambda = \lambda^F(\theta) \in M(E)$ – соответствующая равновесная мера, F^0 – объединение всех открытых дуг, принадлежащих компакту F , $\partial/\partial n_\pm$ – нормальные производные, взятые с противоположных сторон F^0 . Это свойство, тем самым, носит вполне универсальный характер.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Несмотря на проблему, связанную с существованием рациональной функции F_n , в системе Maple реализованы именно нелинейные АПЧ. Такие аппроксимации активно используются в приложениях (см., например, [29], [43]–[46], [58]), они имеют преимущество перед линейными АПЧ, состоящее в том, что по заданным коэффициентам Фурье–Чебышёва $c_0, c_1, \dots, c_{2n}$ исходной функции f можно построить нелинейную АПЧ порядка (n, n) , а линейную – только порядка (m, m) , где $m = [2n/3]$ (подробнее см. [35], [36]; по поводу численных методов нахождения коэффициентов Фурье–Чебышёва см., например, [26]–[28], [49]). Наилучшие равномерные рациональные аппроксимации *заданной* функции могут быть найдены с помощью хорошо известного алгоритма Ремеза [20]. Этот алгоритм также реализован в системе Maple. Однако процесс практического приближенного построения такой рациональной аппроксимации предполагает, что исходная функция f задана в виде явного аналитического (формульного) выражения. Конечного набора коэффициентов Фурье–Чебышёва для этого недостаточно; см. замечание 2.

В заключение отметим, что параметрам $\theta = 0$, $\theta = 1$ и $\theta = 3$ соответствуют *векторные* (размера 2×2) теоретико-потенциальные задачи равновесия.

При $\theta = 0$ матрица взаимодействия имеет вид $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, при $\theta = 1$ – вид $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, а при $\theta = 3$ – вид $A_3 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; ср. [59], [60].

2. Обозначения и формулировка основных результатов

2.1. Фиксируем произвольное $\theta \in [0, \infty)$, для этого θ рассмотрим функционал энергии (14); явное указание на параметр θ в дальнейшем иногда опускаем. Пусть $\lambda^K \in M(E)$ – равновесная мера с носителем на E , соответствующая компактному $K \in \mathcal{K}_f$ (см. (15)); мера λ^K вполне характеризуется тем, что она является экстремальной мерой, т. е.

$$J_\theta(K; \lambda^K) = \min_{\mu \in M(E)} J_\theta(K; \mu). \quad (18)$$

Рассмотрим следующую теоретико-потенциальную задачу:

$$\sup_{K \in \mathcal{K}_f} J_\theta(K; \lambda^K) = \sup_{K \in \mathcal{K}_f} \min_{\mu \in M(E)} J_\theta(K; \mu). \quad (19)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Компакт $F = F(\theta) \in \mathcal{K}_f$ назовем *стационарным* (в классе $\mathcal{K}_f$) для задачи (19), если для этого компакта в (19) достигается супремум, т. е. выполняется равенство

$$J_\theta(F; \lambda^F) = \max_{K \in \mathcal{K}_f} J_\theta(K; \lambda^K). \quad (20)$$

Вопрос о существовании и характеристизации стационарных компактов (в заданном классе $\mathcal{K}_f$) представляет собой отдельную задачу. Эта задача, вообще говоря, не может быть решена непосредственно с помощью методов, разработанных в связи с проблемой модулей (см. [61]–[63]), так как заранее не известно, какому именно гомотопическому классу принадлежит такой компакт. В связи с задачей (19), связанной с конкретным функционалом энергии (14), естественным образом возникает вопрос о существовании стационарного компакта $F = F(\theta)$. Этот вопрос удается положительно решить в наиболее интересных случаях значений параметра $\theta = 0, 1, 3$ (подробнее см. лемму 1 в п. 3.2). При этом указанным различным значениям θ соответствуют, вообще говоря, разные стационарные компакты $F(0)$, $F(1)$, $F(3)$ (в зафиксированном классе $\mathcal{K}_f$). В п. 2.4 приводится описание этих компактов в терминах, непосредственно связанных с соответствующими римановыми поверхностями. Отметим, что такие компакты могут совпадать при различных значениях параметра $\theta = 0, 1, 3$ только в исключительных случаях (см. [35]–[37]).

Хорошо известно (см. [3]–[7], [10]), что с точки зрения приложения теории потенциала к исследованию сходимости рациональных аппроксимаций для многозначных аналитических функций представляет непосредственный интерес не само свойство стационарности (20), а тесно связанное с ним *S-свойство* допустимого компакта.

Приведем определение *S-свойства* допустимого компакта, соответствующего экстремальной задаче (19) для функционала энергии (14).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Будем говорить, что не разбивающий плоскость и состоящий из конечного числа аналитических дуг допустимый компакт $\Gamma = \Gamma(\theta) \in \mathcal{K}_f$ обладает *S-свойством* (или является *S-симметричным*), если:

$$\frac{\partial G_\Gamma^\lambda}{\partial n_+}(\zeta) = \frac{\partial G_\Gamma^\lambda}{\partial n_-}(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma^0, \quad (21)$$

где $\lambda = \lambda^\Gamma(\theta) \in M(E)$ – соответствующая равновесная мера, Γ^0 – объединение всех открытых дуг, принадлежащих компакту Γ , $\partial/\partial n_\pm$ – нормальные производные, взятые с противоположных сторон Γ^0 .

Отметим, что рассматриваемый здесь функционал энергии (14) оказывается таким, что вид соотношения (21), определяющего S -свойство, не зависит от параметра θ . Однако равновесная мера $\lambda = \lambda^\Gamma(\theta) \in M(E)$ и сам S -симметричный компакт $\Gamma = \Gamma(\theta)$ зависят от θ . Эти компакты (но не соответствующие им равновесные меры) могут совпадать только в исключительных случаях. Например, для марковской функции $f = \widehat{\sigma}$, носитель меры которой – отрезок $[c, d]$ вещественной прямой, $[c, d] \cap E = \emptyset$:

$$\widehat{\sigma}(z) = \int_c^d \frac{d\sigma(x)}{z - x}, \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus [c, d], \quad (22)$$

мы имеем: $\Gamma(\theta) = [c, d]$ при $\theta = 0, 1, 3$ (см. [35], [36]).

В [57] (см. также [64]) доказано, что для рассматриваемого здесь функционала энергии (14) и класса $\mathcal{K}_f$ допустимых компактов (см. определение 1) введенные понятия оказываются равносильными: *стационарный компакт* $F = F(\theta) \in \mathcal{K}_f$ (если он существует) *всегда обладает S -свойством* (21). При этом для $\theta = 0, 1, 3$ он существует (см. лемму 1 в п. 3.2), является единственным и указанное S -свойство его вполне характеризует; тем самым, $F(\theta) = \Gamma(\theta)$. Обозначение $\Gamma(\theta)$ далее в настоящей работе не используется.

Справедлива следующая теорема (см. [57]).

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $F = F(\theta) \in \mathcal{K}_f$ – стационарный компакт для задачи (19) (состоящий из конечного числа континуумов). Тогда F не разбивает плоскость, не имеет внутренних точек и обладает S -свойством (21).*

Подчеркнем, что условие $F \in \mathcal{K}_f$ предполагает, что компакт F состоит из конечного числа континуумов. В дальнейшем нам удобно ввести обозначение для числа p точек ветвления: $p = m - 2$ и считать, что все $a_j \neq \infty$.

Теорема 2 является следствием следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $F \in \mathcal{K}_f$ – стационарный компакт для задачи (19) и $A_m(z) = (z^2 - 1)(z - a_1) \cdots (z - a_{m-2})$, где $\{a_1, \dots, a_{m-2}\} = \Sigma$ и все a_j конечны. Тогда для равновесной меры $\lambda = \lambda^F$ компакта F справедливо следующее соотношение (необходимое условие стационарности):*

$$\theta \widehat{\lambda}(z)^2 + (\mathcal{P}'_{F,\lambda}(z))^2 \equiv \frac{B_{m-1}(z)}{A_m(z)}, \quad z \in D(F) \setminus E, \quad (23)$$

где $B_{m-1}(z)$ – некоторый полином степени $\leq m - 1$, $\widehat{\lambda}(z) = \int (z - x)^{-1} d\lambda(x)$ – преобразование Коши меры λ ,

$$\mathcal{P}_{F,\lambda}(z) = \int_{-1}^1 P(z, x) d\lambda(x),$$

$P(z, x) = g_F(z, x) + i g_F^*(z, x)$ – комплексная функция Грина для области $D(F)$.

Отметим, что в силу равенства

$$\widehat{\lambda}(z) = -\mathcal{V}'_{\lambda}(z), \quad \text{где } \mathcal{V}_{\lambda}(z) = \int_{-1}^1 \log \frac{1}{z-x} d\lambda(x),$$

соотношение (23) можно представить в виде

$$\theta(\mathcal{V}'_{\lambda}(z))^2 + (\mathcal{P}'_{F,\lambda}(z))^2 \equiv \frac{B_{m-1}(z)}{A_m(z)}. \quad (24)$$

Следующий результат вытекает непосредственно из теоремы 3 (ср. [3], [4], [10], [65; § 4, п. 4.3, теорема XII]), [66].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *При $\theta = 0$ справедливо представление*

$$G_F^{\lambda}(z) = \int_{-1}^1 g_F(z, x) d\lambda(x) = \operatorname{Re} \int_{a_1}^z \sqrt{\frac{B_{m-1}(\zeta)}{A_m(\zeta)}} d\zeta, \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus (E \cup F); \quad (25)$$

соотношение (25) позволяет однозначно определить равновесную меру λ и стационарный компакт F , если известен полином B_{m-1} .

Оказывается, что теоретико-потенциальную задачу (19) можно переформулировать эквивалентным образом в других терминах (см. [38], [57], [67] и п. 3.1 ниже для $\theta = 1$). Зафиксируем параметр $\theta \in [0, \infty)$ и класс допустимых компактов $\mathcal{K}_f$. При условии, что $D(K) \ni \infty$, экстремальная задача (18) в классе единичных мер $M(E)$ с носителями на E эквивалентна следующей экстремальной задаче в классе единичных мер $M(K)$ с носителями на K :

$$\inf_{\nu \in M(K)} I_{\varphi}(K; \nu), \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} I_{\varphi}(K; \nu) &:= \iint_{K \times K} \left\{ \theta \log \frac{1}{|z - \zeta|} + g_E(z, \zeta) + \theta g(z, \infty) + \theta g(\zeta, \infty) \right\} d\nu(z) d\nu(\zeta) \\ &= \int_K \{ \theta V^{\nu}(z) + G_E^{\nu}(z) \} d\nu(z) + 2 \int_K \theta g_E(z, \infty) d\nu(z), \end{aligned} \quad (27)$$

$g_E(z, \zeta)$ – функция Грина для дополнения к отрезку E с особенностью в точке $z = \zeta$,

$$G_E^{\nu}(z) := \int_K g_E(z, \zeta) d\nu(\zeta) \quad (28)$$

– гринов (относительно $\overline{\mathbb{C}} \setminus E$) потенциал меры $\nu \in M(K)$. Иначе говоря, $I_{\varphi}(K; \nu)$ – энергия меры ν относительно смешанного гриново-логарифмического ядра $-\theta \log |z - \zeta| + g_E(z, \zeta)$ во внешнем поле $\varphi(z) := \theta g(z, \infty)$. Пусть $\lambda_K \in M(K)$ – соответствующая задаче (26) экстремальная мера:

$$I_{\varphi}(K; \lambda_K) = \min_{\nu \in M(K)} I_{\varphi}(K; \nu). \quad (29)$$

Тогда эта же мера $\lambda = \lambda_K$ является (единственной) равновесной мерой для потенциала $\theta V^{\nu} + G_E^{\nu}$ во внешнем поле φ :

$$\theta V^{\nu}(z) + G_E^{\nu}(z) + \varphi(z) \equiv w_K, \quad z \in K, \quad (30)$$

w_K – соответствующая постоянная равновесия.

Можно показать (см. [67] и ниже п. 3.1 для случая $\theta = 1$), что для равновесных мер λ^K и λ_K , соответствующих функционалам энергии (14) и (27), справедливо соотношение

$$I_\varphi(K; \lambda_K) = (1 + \theta)J_\theta(K; \lambda^K) - \theta^2\gamma_E, \quad (31)$$

где $\gamma_E = 2 \log 2$ – постоянная Робена для отрезка $E = [-1, 1]$. Непосредственно из (31) вытекает, что при *фиксированном* компакте E (в нашем случае $E = [-1, 1]$) две экстремальные задачи

$$\sup_{K \in \mathcal{K}_f} J_\theta(K; \lambda^K) = \sup_{K \in \mathcal{K}_f} \inf_{\mu \in M(E)} J_\theta(K; \mu) \quad (32)$$

и

$$\sup_{K \in \mathcal{K}_f} I_\varphi(K; \lambda_K) = \sup_{K \in \mathcal{K}_f} \inf_{\nu \in M(K)} I_\varphi(K; \nu) \quad (33)$$

эквивалентны, а сами равновесные меры $\lambda^K \in M(E)$ и $\lambda_K \in M(K)$ для компакта K связаны соотношением: $\lambda_K = \beta_K(\lambda^K)$, где $\beta_K(\cdot)$ – выметание меры из области $D(K)$ на ее границу.

В этой эквивалентной постановке задача (32) допускает такую геометрическую интерпретацию, которая позволяет сделать следующий вывод: при $\theta = 0, 1, 3$ стационарный компакт $F \in \mathcal{K}_f$ *существует* и состоит из конечного числа континуумов. Тем самым, в этой ситуации применима теорема 2 и оказывается, что стационарный компакт *всегда обладает S-свойством*.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Вопрос о *единственности* компакта $F = F(\theta) \in \mathcal{K}_f$ решается следующим образом. При $\theta = 0, 1, 3$ теоретико-потенциальная задача (19) оказывается связанной с задачей о сходимости соответствующих “оптимальных” рациональных аппроксимаций $f_n(z; \theta)$ функции $f(z)$. На основе S -свойства стационарного компакта стандартным методом (см. [10], а также [37]–[39], [68]) устанавливается, что $f_n(z; \theta) \xrightarrow{\text{cap}} f(z)$ в области $D_f = D(F(\theta)) := \mathbb{C} \setminus F(\theta)$ (здесь и ниже “ $\xrightarrow{\text{cap}}$ ” означает сходимость по логарифмической емкости на компактных подмножествах области D_f ; определение этого понятия см., например, в [6], [7], [9]). Непосредственно отсюда и следует единственность компакта $F(\theta)$, $\theta = 0, 1, 3$. В каждом из этих трех случаев для равновесных мер $\lambda^F(\theta) \in M(E)$ и $\lambda_F(\theta) \in M(F)$, соответствующих (единственному) стационарному компактному F , справедливы соотношения

$$\frac{1}{n} \mu(Q_n) \rightarrow \lambda_F, \quad \frac{1}{2n} \mu(\omega_{2n}) \rightarrow \lambda^F \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (34)$$

где Q_n , $\deg Q_n \leq n$, – знаменатель рациональной дроби f_n , а ω_{2n} , $\deg \omega_{2n} \leq 2n + 1$, – полином, в нулях³ которого эта рациональная дробь интерполирует исходную функцию f . Скорость сходимости рациональных функций $f_n(z; \theta)$ к $f(z)$ в области D_f задается функцией $\exp\{-G_F^{\lambda^F}(z)\} < 1$, $z \in D_f$.

Таким образом, реализуется следующая стандартная схема рассуждений, предложенная в [10]: существует стационарный компакт F для функционала энергии (14) $\Rightarrow$ компакт F обладает S -свойством (21) (тем самым, в допустимом

³Все они лежат на E .

классе $\mathcal{K}_f$ существует S -компакт $\Gamma = F) \Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{cap}} f$ в “максимальной” области голоморфности $D_f := \overline{\mathbb{C}} \setminus F \Rightarrow S$ -компакт *единственный*. Максимальность области голоморфности D_f функции f понимается так: дополнение F к ней минимально в том смысле, что величина e^{-w^K} , которую естественно считать аналогом емкости, минимальна для $K = F$, $K \in \mathcal{K}_f$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Все утверждения теорем 2, 3 сохраняются, если при определении класса функций $\mathcal{A}_E(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Sigma)$ вместо голоморфных функций допустить мероморфные функции.

Таким образом, при условии существования экстремального компакта, решающего задачу (19), все его дальнейшие свойства устанавливаются общим вариационным методом, предложенным в [66] (см. также [57]) и применимым при произвольном $\theta \in [0, \infty)$ (см. пп. 3.1–3.3).

2.2. В [35] и [36] была изучена сходимость нелинейных аппроксимаций F_n и аппроксимаций Фробениуса Φ_n для общих ортогональных разложений марковских функций

$$\hat{\sigma}(z) = \int_F \frac{d\sigma(x)}{z - x}, \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus F, \quad (35)$$

где $F = [c, d] \subset \mathbb{R} \setminus E$, σ – положительная борелевская мера на F , $\sigma' = d\sigma/dx > 0$ почти всюду (п.в.) на F . Скорость сходимости последовательностей R_n , F_n и Φ_n к функции $f = \hat{\sigma}$ в области $D_f = \overline{\mathbb{C}} \setminus [c, d]$ полностью характеризуется в терминах равновесной меры $\lambda(\theta) \in M(E)$ соответственно для $\theta = 0$, $\theta = 1$ и $\theta = 3$ следующим образом (см. [2], [35], [36]).

ТЕОРЕМА 4. Если $\sigma' > 0$ п.в. на $F = [c, d] \subset \mathbb{R} \setminus E$, то локально равномерно в области $D_f \setminus E$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |(\hat{\sigma} - f_n)(z)|^{1/n} = e^{-2G_F^{\lambda(\theta)}(z)} < 1, \quad (36)$$

где $\theta = 0$ для $f_n = R_n$, $\theta = 1$ для $f_n = F_n$ и $\theta = 3$ для $f_n = \Phi_n$.

Обозначим через $\mu(Q)$ меру, ассоциированную с произвольным полиномом Q : $\mu(Q) = \sum_{\zeta: Q(\zeta)=0} \delta_\zeta$, где δ_ζ – мера Дирака с носителем в точке ζ . Пусть

$\tilde{\mu}$ – выметание меры μ из области $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ на F . Тогда в условиях теоремы 4 для знаменателей $Q_n(z; \theta)$, $\theta = 0, 1, 3$, соответствующих рациональных функций R_n , F_n , Φ_n имеем:

$$\frac{1}{n} \mu(Q_n(\cdot; \theta)) \rightarrow \tilde{\lambda}(\theta), \quad n \rightarrow \infty, \quad (37)$$

где сходимость мер понимается в слабой топологии.

Отметим, что развитые в [2], [35], [36] методы позволяют легко доказать аналог теоремы 4 и для случая, когда F состоит из нескольких отрезков, лежащих на вещественной прямой, а $f = \hat{\sigma} + r$, где $\hat{\sigma}$ – марковская функция (35), r – вещественная рациональная функция, голоморфная на E .

2.3. Зафиксируем теперь параметр $\theta = 1$ и в дальнейшем в обозначениях будем, как правило, опускать указание на этот параметр. Пусть $\lambda = \lambda^K(1) \in M(E)$ – равновесная мера, соответствующая произвольному компакту $K \in \mathcal{K}_f$, а $w = w^K(1)$ – соответствующая постоянная равновесия (см. (15)): $V^\lambda(x) + G_K^\lambda(x) \equiv w$, $x \in E$; при этом $J(K; \lambda) = \min_{\mu \in M(E)} J(K; \mu) = w$.

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5. *Если $f \in \mathcal{A}_E(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Sigma)$, то существует единственный компакт $F = F(1) \in \mathcal{K}_f$ такой, что*

$$J(F; \lambda^F) = \max_{K \in \mathcal{K}_f} J(K; \lambda^K). \quad (38)$$

Стационарный компакт F состоит из конечного числа аналитических дуг, не разбивает плоскость и обладает S -свойством (21), где $\lambda^F = \lambda^F(1)$ – соответствующая равновесная мера.

Теорема 5 вытекает непосредственно из теоремы 2 и леммы 1 (см. п. 3.2). Фактически доказательство теоремы 5 проводится по следующей схеме. Сначала используется соотношение (31), устанавливающее связь между функционалами энергии (14) и (27). Затем с помощью этого соотношения и стандартных геометрических соображений, основанных на замене функционала энергии (27) для равновесной меры $\lambda \in M(K)$ на обобщенный трансфинитный диаметр $K \in \mathcal{K}_f$ (см. [55; гл. II, § 3]), устанавливается, что (вообще говоря, локальный) супремум в правой части (33) можно рассматривать среди тех допустимых компактов, которые лежат во внешности максимального канонического эллипса голоморфности функции f . Такое семейство предкомпактно в хаусдорфовой топологии, поэтому существует допустимый компакт F , $F \subset G_0^c(f)$, удовлетворяющий соотношению (38). Затем с помощью вариационного метода (см. [57], [66], [69], [70]) устанавливается, что этот экстремальный компакт F является замыканием критических траекторий некоторого квадратичного дифференциала. Непосредственно отсюда уже вытекает S -свойство (21) (для $\theta = 1$).

На основе теоремы 5 доказывается следующая теорема о скорости сходимости рациональных аппроксимаций F_n к функции f в области $D_f = D(F) = \overline{\mathbb{C}} \setminus F$ (ср. с теоремой 1 и соотношением (6)).

ТЕОРЕМА 6. *Пусть $f \in \mathcal{A}_E(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Sigma)$. Тогда для любого компакта $K \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus (E \cup F)$ имеем:*

$$|(f - F_n)(z)|^{1/n} \xrightarrow{\text{cap}} e^{-2G_F^\lambda(z)} < 1, \quad z \in K, \quad (39)$$

где $\lambda = \lambda^F$, $F = F(1)$. При этом для точек интерполяции функции f рациональной функцией F_n на отрезке E и нулей знаменателя Q_n выполняются соотношения

$$\frac{1}{2n} \mu(\omega_{2n}) \rightarrow \lambda, \quad \frac{1}{n} \mu(Q_n) \rightarrow \tilde{\lambda}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (40)$$

где ω_{2n} – полином степени $2n + 1$ с нулями в точках интерполяции, $\tilde{\lambda} = \beta_F(\lambda)$ – выметание меры $\lambda \in M(E)$ из области D_f на $\partial D_f = F$.

Тем самым, в условиях теоремы 6 $F_n \xrightarrow{\text{cap}} f$ на компактных подмножествах области $D_f = \mathbb{C} \setminus F$ со скоростью геометрической прогрессии.

Теорема 6 доказывается по общей схеме, предложенной в [3]–[7] и [10] и основанной на S -свойстве (21) соответствующего стационарного компакта. При этом используется теорема Штала о сходимости классических аппроксимаций Паде степенного ряда. При доказательстве предельных соотношений (40) используется общая теоремы 3 работы [10] (для рассматриваемого здесь частного случая внешнего поля $\psi(z) = -V^\lambda(z)$). Отметим, что из (39) вытекает, что каждый полюс f в D_f притягивает по меньшей мере столько полюсов f_n , какова его кратность.

Таким образом, для функции f из класса $\mathcal{A}_E(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Sigma)$ компакт $F(1)$ в случае нелинейных АПЧ играет роль отрезка $[c, d]$, соответствующего марковской функции $\hat{\sigma}$, $\text{supp } \sigma = [c, d]$ (см. (35)).

2.4. Если (для параметра $\theta = 1$) стационарный компакт $F = F(1)$, соответствующий функции $f \in \mathcal{A}_E(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Sigma)$, состоит из s непересекающихся аналитических дуг, попарно соединяющих некоторые точки ветвления $a'_1, \dots, a'_{2s} \in \Sigma$ функции f , то он допускает наглядное описание в терминах, связанных с *четырёхлистной* римановой поверхностью рода $g = s - 1$ (ср. [57; § 4]).

Построим сначала двулистную риманову поверхность $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^{(1)} \cup \mathfrak{R}^{(2)}$ следующим образом. Возьмем два экземпляра римановой сферы $\overline{\mathbb{C}}$, разрезанных по отрезку $E = [-1, 1]$, и переклеим по разрезу. Полученная двулистная риманова поверхность $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^{(1)} \cup \mathfrak{R}^{(2)}$ эквивалентна римановой сфере. Определим на $\mathfrak{R}$ функцию $u(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in \mathfrak{R}$, следующим образом: $u(z^{(1)}) = G_F^\lambda(z)$, $u(z^{(2)}) = w^F - V^\lambda(z)$. Непосредственно из условия равновесия (15) вытекает, что u – гармоническая функция на $\mathfrak{R} \setminus (F^{(1)} \setminus \{\infty^{(2)}\})$. Кроме того, $u \equiv 0$ на компакте $F^{(1)}$ и $u(z^{(2)}) = \log |z| + w^F + o(1)$ при $z^{(2)} \rightarrow \infty^{(2)}$. Возьмем теперь два экземпляра $\mathfrak{R}$, разрезанных по компактному $F^{(1)}$, и переклеим их между собой по соответствующим разрезам. Получим четырехлистную риманову поверхность $\mathfrak{R}_1$ рода $g = s - 1$. Так как $u \equiv 0$ на $F^{(1)}$, то u гармонически продолжается с одного экземпляра $\mathfrak{R}$ на другой с переменной знака. Продолженная функция гармонична на $\mathfrak{R}_1$ всюду кроме точек $\mathbf{z} = \infty^{(2)}, \infty^{(3)}$, где она имеет логарифмические особенности: $\log |z|$ при $\mathbf{z} \rightarrow \infty^{(2)}$ и $-\log |z|$ при $\mathbf{z} \rightarrow \infty^{(3)}$.

Следовательно, $u(\mathbf{z}) = \text{Re } \Omega(\mathbf{z})$, $\Omega(\mathbf{z}) = \int_{b_1}^{\mathbf{z}} d\Omega$, где $d\Omega(\mathbf{z})$ – (единственный) абелев дифференциал на $\mathfrak{R}_1$ с чисто мнимыми периодами и особенностью вида $1/z$ в точке $\mathbf{z} = \infty^{(2)}$ и вида $-1/z$ в точке $\mathbf{z} = \infty^{(3)}$. Компакт F соответствует нулевой линии уровня функции $\text{Re } \Omega(\mathbf{z})$: $F = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : \text{Re } \Omega(\mathbf{z}) = 0\} \setminus E$.

Отметим, что $u(\mathbf{z}) = g_{F^{(1)}}(\mathbf{z}, \infty^{(2)})$ – функция Грина для области $\mathfrak{R} \setminus F^{(1)}$ с особенностью в точке $\mathbf{z} = \infty^{(2)}$, а $w^F = \gamma^{(2)}$ – постоянная Робена для этой функции Грина. Тем самым, задаче о максимуме постоянной w^F соответствует задача о минимуме $e^{-\gamma^{(2)}}$, т.е. минимуме логарифмической емкости.

Непосредственно из результатов работ [3]–[7] и [10] вытекает, что для *наилучших* в равномерной метрике на отрезке $[-1, 1]$ рациональных аппроксимаций $f_n = R_n$ функции $f \in \mathcal{A}_E(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Sigma)$ также справедливо соотношение вида (39), где $\theta = 0$, $F = F(0)$ – стационарный компакт, соответствующий задаче равновесия (15) с $\theta = 0$ и обладающий S -свойством (21), $\lambda = \lambda^F(0)$ – соответствующая

равновесная мера (см. теорему 1). В этом случае функция $u(z^{(1)}) = w^F - G^\lambda(z)$ продолжается через разрез, проведенный по отрезку E , на второй лист римановой поверхности $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^{(1)} \cup \mathfrak{R}^{(2)}$ с переменной знака. Отсюда уже легко вытекает, что задача о максимуме постоянной w^F эквивалентна задаче о минимуме емкости конденсатора $(F^{(1)}, F^{(2)})$.

Таким образом, оба стационарных (в заданном классе $\mathcal{K}_f$) компакта $F(1)$ и $F(0)$ обладают S -свойством вида (21) (соответственно для $\theta = 1$ и $\theta = 0$).

3. Доказательство теоремы 5

3.1. Пусть $K \in \mathcal{K}_f$ – произвольный допустимый компакт для функции $f \in \mathcal{A}_E(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Sigma)$ и $D(K)$ – связная компонента его дополнения, которая содержит отрезок E ; мы предполагаем, что область $D(K)$ регулярна относительно решения задачи Дирихле. В дальнейшем мы предполагаем также, что $^4 \infty \in D(K)$, $\infty \notin \Sigma$.

Пусть $\lambda = \lambda^K \in M(E)$ – равновесная мера для K :

$$V^\lambda(x) + G_K^\lambda(x) \equiv w^K, \quad x \in E, \quad (41)$$

величина $w = w^K$ – “постоянная Робена” для K , e^{-w} – “емкость” компакта K (соответствующая энергии взаимодействия $J(\cdot)$; см. (14)). Пусть $\tilde{\lambda} = \beta_K(\lambda)$ выметание равновесной меры λ на K . Рассмотрим функцию

$$v(z) := V^\lambda(z) + G_K^\lambda(z) + G_E^{\tilde{\lambda}}(z) + g_E(z, \infty), \quad (42)$$

где $G_E^\nu(z)$ – гринов относительно E потенциал меры ν ,

$$G_E^\nu(z) = \int g_E(z, \zeta) d\nu(\zeta), \quad \text{supp } \nu \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus E,$$

$g_E(z, \zeta)$ – функция Грина для дополнения к отрезку E , $g_E(z, \infty) = \log |z + \sqrt{z^2 - 1}|$. Нетрудно видеть, что сумма $G_K^\lambda(z) + G_E^{\tilde{\lambda}}(z)$ – функция, гармоническая вне E . Из (42) получаем, что и функция $v(z)$ гармонична в $\overline{\mathbb{C}} \setminus E$. Из соотношения равновесия (41) вытекает, что $v(x) \equiv w^K$ при $x \in E$. Следовательно, $v(z) \equiv w^K$ при $z \in \overline{\mathbb{C}}$. Отсюда для $z \in K$ получаем

$$w^K \equiv v(z) = V^\lambda(z) + G_E^{\tilde{\lambda}}(z) + g_E(z, \infty), \quad z \in K. \quad (43)$$

Но при $z \in K$ потенциал $V^\lambda(z)$ равен $V^{\tilde{\lambda}}(z) - c_K$, где $c_K = \int_E g_K(x, \infty) d\lambda^K(x)$.

Таким образом, из (43) получаем, что для выметания $\tilde{\lambda} \in M(K)$ равновесной меры $\lambda \in M(E)$ справедливо равенство:

$$V^{\tilde{\lambda}}(z) + G_E^{\tilde{\lambda}} + g_E(z, \infty) \equiv \text{const} = w^K + c_K =: w_K, \quad z \in K. \quad (44)$$

⁴Эти условия $D(K) \ni \infty$ и $\Sigma \not\ni \infty$ не являются ограничительными и носят чисто технический характер: их выполнения всегда можно добиться с помощью подходящего дробно-линейного преобразования, сохраняющего отрезок E (пока речь идет не об аппроксимации ряда (9) рациональными функциями, а о теоретико-потенциальных задачах равновесия (47) и (48)).

Следовательно, мера $\tilde{\lambda} \in M(K)$ является (единственной) равновесной мерой в классе $M(K)$ для потенциала $V^\nu(z) + G_E^\nu(z)$ с внешним полем $\varphi(z) = g_E(z, \infty)$. Таким образом, отображение $\lambda \mapsto \tilde{\lambda}$ задает взаимно однозначное соответствие между *равновесными* мерами для задач (41) и (44). Хорошо известно (см. [10], [55], [56], [71]), что равновесная мера и только эта мера в классе мер $\nu \in M(K)$ минимизирует соответствующий функционал энергии

$$\begin{aligned} I_\varphi(K; \nu) &:= \iint \left\{ \log \frac{1}{|z - \zeta|} + g_E(z, \zeta) \right\} d\nu(z) d\nu(\zeta) + 2 \int \varphi(z) d\nu(z) \\ &= \int \{V^\nu(z) + G_E^\nu(z) + \varphi(z)\} d\nu(z) + \int \varphi(z) d\nu(z) = w_K + c_E. \end{aligned} \quad (45)$$

При этом для соответствующих задачам (41) и (44) постоянных равновесия имеем: $w^K = w_K - c_K$. Так как $v(z) \equiv w^K$, то из (42) получаем, что $w^K = v(\infty) = \gamma_E + c_K + c_E$, где

$$c_K = \int_E g_K(x, \infty) d\lambda(x), \quad c_E = \int_K g_E(\zeta, \infty) d\tilde{\lambda}(\zeta),$$

$\gamma_E = 2 \log 2$ – постоянная Робена для E . Отсюда с учетом (44) и (45) уже легко получаем, что соответствующие равновесным мерам λ и $\tilde{\lambda}$ энергии связаны соотношением

$$I_\varphi(K; \tilde{\lambda}) = 2J(K; \lambda) - \gamma_E. \quad (46)$$

Непосредственно из (46) вытекает, что задача

$$\sup_{K \in \mathcal{K}_f} \inf_{\mu \in M(E)} J(K; \mu) \quad (47)$$

эквивалентна (в предположении, что существует экстремальный компакт $F \in \mathcal{K}_f$ такой, что $D(F) \ni \infty$) задаче

$$M = \sup_{K \in \mathcal{K}_f} \inf_{\nu \in M(K)} I_\varphi(K; \nu), \quad \text{где } \varphi(z) = g_E(z, \infty). \quad (48)$$

Ниже мы докажем *существование* стационарного компакта F для задачи (48). В силу указанной эквивалентности это будет означать, что этот же компакт F является стационарным компактом и для задачи (47) в предположении, что $D(F) \ni \infty$. Единственность такого компакта будет вытекать, как обычно, из сходимости АПЧ к функции $f \in \mathcal{H}(D(F))$. Условия $F \not\equiv \infty$ и $\Sigma \not\equiv \infty$ не являются ограничительными и носят чисто технический характер: их всегда можно добиться с помощью подходящего дробно-линейного преобразования, сохраняющего отрезок E (пока речь идет не об аппроксимации ряда (9) рациональными функциями, а о теоретико-потенциальных задачах равновесия (47) и (48)). Отметим, что непосредственно для исследования сходимости аппроксимаций нужно эквивалентное стационарности свойство S -симметрии компакта F . Как следует из определения (см. (21)), это свойство инвариантно относительно дробно-линейных преобразований и вообще не зависит от того, содержит компакт F точку $z = \infty$ или нет.

В заключение этого пункта приведем еще одну эквивалентную переформулировку экстремальной скалярной задачи (47) в виде матричной (размера 2×2) теоретико-потенциальной задачи равновесия (см. [10], [59]). Рассмотрим следующую векторную задачу равновесия в классе вектор-мер $\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2)$, $\mu_1 \in M(E)$, $\mu_2 \in M(K)$, $K \in \mathcal{K}_f$:

$$\begin{aligned} 2V^{\mu_1}(x) - V^{\mu_2}(x) &\equiv w_1, & x \in E, \\ -V^{\mu_1}(z) + V^{\mu_2}(z) &\equiv w_2, & z \in K, \end{aligned} \quad (49)$$

с матрицей взаимодействия $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Векторная задача (49) эквивалентна скалярной задаче

$$V^\mu(x) + G_K^\mu(x) \equiv w, \quad x \in E, \quad \mu \in M(E). \quad (50)$$

При этом решение $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2)$ задачи (49) связано с решением задачи (50) следующим образом: $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = \tilde{\lambda}$ – выметание меры $\lambda \in M(E)$ из $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$ на K , а для соответствующих постоянных равновесия w_1 , w_2 и w имеем: $w_2 = c_K(\lambda) = \int_E g_K(x, \infty) d\lambda(x)$, $w_1 = w - w_2$; тем самым, $w = w_1 + w_2$. Таким образом, скалярная экстремальная задача (47) может быть эквивалентным образом переформулирована в виде следующей векторной задачи (ср. [59], [60], [72]):

$$\sup_{K \in \mathcal{K}_f} \inf_{\substack{(\mu_1, \mu_2), \\ \mu_1 \in M(E), \mu_2 \in M(K)}} J_A(K; \vec{\mu}), \quad (51)$$

где

$$\begin{aligned} J_A(K; \vec{\mu}) &:= (A\vec{\mu}, \vec{\mu}) = \sum_{k,j=1}^2 a_{k,j} [\mu_k, \mu_j], \\ [\mu_k, \mu_j] &= \iint_{K \times K} \log \frac{1}{|z - \zeta|} d\mu_k(z) d\mu_j(\zeta). \end{aligned}$$

3.2. Этот и следующий пункты посвящены доказательству существования стационарного компакта для экстремальной задачи (48) и описанию некоторых его свойств, в том числе S -свойства (21). Схема изложения следующая. Сначала мы докажем, что решение экстремальной задачи (48) (т.е. стационарный компакт F) можно искать среди тех допустимых компактов, которые лежат вне максимального эллипса голоморфности функции f . Затем, пользуясь тем, что такое подсемейство предкомпактно в хаусдорфовой топологии, мы установим существование допустимого компакта, на котором достигается величина (48). Затем с помощью вариационного метода (см. [57], а также [73]) доказывается, что этот экстремальный компакт является замыканием критических траекторий некоторого квадратичного дифференциала. Отсюда уже вытекает S -свойство (21). Отметим, что существует и другой подход к задаче о существовании и свойствах стационарного компакта. Этот подход основан на явном описании такого компакта в терминах некоторой алгебраической функции (см., например, [60], [74], [75]).

Итак, докажем сначала, что *существует* компакт $F \in \mathcal{K}_f$ – решение задачи (48), принадлежащий *внешности* $G_\rho^c = \overline{\mathbb{C}} \setminus G_\rho$ максимальной канонической области голоморфности $G_\rho := \{z : |\Phi(z)| < \rho\}$ функции f . Для этого определим “внешнее” проектирование K^* произвольного компакта $K \in \mathcal{K}_f$ вдоль гипербола, соответствующих отрезку $E = [-1, 1]$, следующим образом. Если точка z принадлежит компакт G_ρ^c , то $z^* = z$. Пусть теперь $z \in G_\rho \setminus E$. Тогда через эту точку проходит единственная гипербола с фокусом в точке $+1$ или -1 ; так как точка z не лежит на отрезке E , то она принадлежит верхней или нижней ветви этой гиперболы. Пусть $z^* \in \gamma_\rho$ – (единственная) точка пересечения этой ветви с максимальным эллипсом голоморфности $\gamma_\rho = \partial G_\rho$ функции f . Ясно, что при таком проектировании $K^* \in \mathcal{K}_f$ для любого $K \in \mathcal{K}_f$.

Справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 1. Пусть параметр θ принадлежит отрезку $[0, 1]$. Тогда для любого компакта $K \in \mathcal{K}_f$ имеем: $K^* \in \mathcal{K}_f$ и $I_\varphi(K^*; \lambda_{K^*}) \geq I_\varphi(K; \lambda_K)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для смешанного ядра (см. (27)) имеем

$$\theta \log \frac{1}{|z - t|} + g_E(z, t) + \theta \varphi(z) + \theta \varphi(t) = \log \left\{ \frac{e^{\theta g_E(z, \infty) + \theta g_E(t, \infty)}}{|z - t|} e^{g_E(z, t)} \right\}.$$

Для произвольных различных точек $z, t \in \mathbb{C} \setminus E$ положим

$$d_\theta(z, t) := |z - t| e^{-\theta g_E(z, \infty) - \theta g_E(t, \infty)} e^{-g_E(z, t)}.$$

Если теперь для N произвольных попарно различных точек $z_1, \dots, z_N$ ввести величину

$$d_\theta(z_1, \dots, z_N) := \prod_{1 \leq i < j \leq N} d_\theta(z_i, z_j)$$

и для произвольного невырожденного компакта K определить

$$d_\theta(K; N) := \max_{z_1, \dots, z_N \in K} d_\theta(z_1, \dots, z_N),$$

то стандартным образом можно показать (см. [55; гл. II, § 3]), что существует предел

$$d_\theta(K) := \lim_{N \rightarrow \infty} (d_\theta(K; N))^{2/(N(N+1))}$$

и для этой величины $d_\theta(K)$ имеем

$$d_\theta(K) = e^{-I_\varphi(K; \lambda_K)}. \quad (52)$$

С учетом (52) остается доказать, что при $\theta \in [0, 1]$ для произвольного множества $K \subset \mathbb{C} \setminus E$ справедливо неравенство $d_\theta(K^*) \leq d_\theta(K)$.

Для $z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus E$ положим $z = (\zeta + 1/\zeta)/2$, где $|\zeta| < 1$. Тогда введенная выше операция внешнего проектирования вдоль гипербол в плоскости $\mathbb{C}_z$ эквивалентна радиальному проектированию внутрь единичного круга $|\zeta| < 1$ в плоскости $\mathbb{C}_\zeta$, а для функций Грина отрезка E имеем:

$$g_E(z, \infty) = \log \frac{1}{|\zeta|}, \quad g_E(z, t) = \log \left| \frac{1 - \bar{\xi}\zeta}{\zeta - \xi} \right|, \quad (53)$$

где $t = (\xi + 1/\xi)/2$, $|\xi| < 1$. С учетом (53) для смешанного ядра (27) имеем:

$$\begin{aligned} & \theta \log \frac{1}{|z - t|} + g_E(z, t) + \theta \varphi(z) + \theta \varphi(t) \\ &= \theta \log \frac{e^{g_E(z, \infty)} e^{g_E(t, \infty)}}{|z - t|} + g_E(z, t) \\ &= \text{const} - \left\{ \theta \log(|\zeta - \xi| |1 - \zeta \bar{\xi}|) + \log \left| \frac{\zeta - \xi}{1 - \zeta \bar{\xi}} \right| \right\}. \end{aligned} \quad (54)$$

Так как функция f вещественна на E и множество Σ симметрично относительно вещественной прямой, то можно рассматривать только такие допустимые компакты $K \in \mathcal{K}_f$, которые симметричны относительно $\mathbb{R}$. В силу единственности равновесной меры, мера λ_K тоже симметрична. Следовательно, функционал энергии (45) не изменится, если в (53) мы уберем знак комплексного сопряжения и полученное выражение в качестве ядра подставим в (45), или наоборот, заменим в ядре выражение $|1 - \zeta \bar{\xi}|$ на $|1 - \zeta \bar{\xi}|$. Ту же самую операцию мы можем проделать и в (54). В результате приходим к функции

$$\rho_\theta(\zeta_1, \zeta_2) := |\zeta_1 - \zeta_2|^{2\theta} \left(\frac{|\zeta_1 - \zeta_2|}{|1 - \zeta_1 \bar{\zeta}_2|} \right)^{1-\theta}, \quad \theta \in [0, 1], \quad (55)$$

определенной для точек из единичного круга, $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{D}$. Таким образом, задача (48) о максимуме равновесной энергии в классе допустимых компактов $\mathcal{K}_f$ в плоскости $\mathbb{C}_z$ сводится (см. (52)) к задаче о минимуме обобщенного трансфинитного диаметра $d_\theta(K_\zeta)$ в соответствующем классе компактов в плоскости $\mathbb{C}_\zeta$. В частных случаях метрика $\rho_\theta(\zeta_1, \zeta_2)$, $|\zeta_1|, |\zeta_2| < 1$, имеет вид:

$$(1) \quad \rho_0(\zeta_1, \zeta_2) = \frac{|\zeta_1 - \zeta_2|}{|1 - \zeta_1 \bar{\zeta}_2|} \text{ для } \theta = 0 - \text{гиперболическая псевдометрика};$$

$$(2) \quad \rho_1(\zeta_1, \zeta_2)^{1/2} = |\zeta_1 - \zeta_2| \text{ для } \theta = 1 - \text{обычная евклидова метрика}.$$

Теперь уже непосредственными вычислениями проверяется, что в случае $\theta \in [0, 1]$ из-за указанного выше вида метрики (55) применим стандартный метод внутреннего радиального проектирования: при радиальном проектировании к центру единичного круга $\mathbb{D}$ (на круг меньшего радиуса $r \in (0, 1)$) расстояние между двумя точками не увеличивается. Точнее, прямыми вычислениями проверяется следующий факт. Если точки ζ_1, ζ_2 лежат в круге $|\zeta| < r$, $0 < r < 1$, то при $\theta \in [0, 1]$ для любых $t_1, t_2 \in (1, 1/r)$ имеем: $\rho_\theta(\zeta_1, \zeta_2) \leq \rho_\theta(t_1 \zeta_1, t_2 \zeta_2)$.

Непосредственно из этого факта вытекает, что так как множество Σ_ζ , соответствующее множеству особых точек Σ_z , принадлежит единичному кругу $|\zeta| < 1$, то существует экстремальный компакт $F(\theta)$ – решение задачи (48), лежащий вне эллипса G_ρ .

Лемма 1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. При $\theta = 3$ соотношение $I_\varphi(K^*; \lambda_{K^*}) \geq I_\varphi(K; \lambda_K)$ оказывается справедливым при дополнительном условии: $K \subset G_{\rho(f)}^c$ и $\rho(f) > \sqrt{2}$; см. [67].

Из леммы 1 вытекает, что супремум в правой части (48), а следовательно, и в правой части (47) можно рассматривать среди тех допустимых компактов $K \in \mathcal{K}_f$, которые лежат во внешности максимального канонического эллипса голоморфности функции f . Такое семейство предкомпактно в хаусдорфовой топологии. В этом семействе компактов (подсемействе $\mathcal{K}_f$) мы будем искать *локальное* решение экстремальной задачи (47) в предположении, что соответствующий компакт F – решение задачи (38) – удовлетворяет условию $D(F) \ni \infty$. Точнее, зафиксируем окрестность $U(\infty)$ бесконечно удаленной точки $z = \infty$ и в дальнейшем будем считать, что супремум в (47) можно брать по подсемейству тех компактов из $\mathcal{K}_f$, которые не пересекаются с $U(\infty)$.

Величина M конечна (см. (48)). Существует последовательность допустимых компактов $K_n \in \mathcal{K}_f$ такая, что все $K_n \subset \mathbb{C} \setminus G_{\rho_0(f)}$ и $I_\varphi(K_n; \lambda_{K_n}) \rightarrow M$. Семейство $\{K_n\}$ предкомпактно в хаусдорфовой топологии. Значит, существуют подпоследовательность, которую мы также будем обозначать $\{K_n\}$, и компакт $\tilde{K} \subset \mathbb{C} \setminus G_{\rho_0(f)}$ такие, что $d_H(K_n, \tilde{K}) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ (здесь и далее через $d_H(\cdot, \cdot)$ обозначается расстояние между двумя компактами в хаусдорфовой метрике).

Функция f принадлежит $\mathcal{A}_E(\bar{\mathbb{C}} \setminus \Sigma)$ и, следовательно, имеет конечное число точек ветвления (см. определение 1). Поэтому для всех достаточно больших $n \geq n_0$ все компакты K_n содержат в точности одни и те же точки ветвления функции f . Значит, это справедливо и для компакта $\tilde{K}$. Компакт $\tilde{K}$ симметричен относительно вещественной прямой, и функция f продолжается как (однозначная) голоморфная функция в ту связную компоненту $\tilde{D}$ дополнения к $\tilde{K}$, которая содержит отрезок E . Компакт $\tilde{K}$ состоит из конечного числа континуумов, поэтому область $\tilde{D}$ регулярна относительно решения задачи Дирихле. Следовательно, существует функция Грина $g_{\tilde{K}}(z, \zeta)$ для области $\tilde{D}$.

По условию выбора последовательности $\{K_n\}$ имеем: $I_\varphi(K_n; \lambda_{K_n}) \rightarrow M$. В силу определения величины M (см. (48)) справедливо неравенство

$$I_\varphi(\tilde{K}; \lambda_{\tilde{K}}) \leq M. \quad (56)$$

Так как для равновесных мер λ_K функционал $J(K; \lambda^K)$ (см. (14) при $\theta = 1$) полунепрерывен сверху по K и $I_\varphi(K; \lambda_K) = 2J(K; \lambda^K) - \gamma_E$, то из соотношения $I_\varphi(K_n; \lambda_{K_n}) \rightarrow M$ вытекает, что

$$M = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} I_\varphi(K_n, \lambda_{K_n}) \leq I_\varphi(\tilde{K}, \lambda_{\tilde{K}}).$$

Отсюда и из неравенства (56) получаем, что $I_\varphi(\tilde{K}, \lambda_{\tilde{K}}) = M$.

Компакт $\tilde{K}$ состоит из конечного числа континуумов, не имеет внутренних точек и не разбивает плоскость. Доказательство этого утверждения (см. [57]) проводится по схеме, предложенной в [66].

В дальнейшем полагаем $F = \tilde{K} \in \mathcal{K}_f$. Вариационным методом доказывается [57], что экстремальный компакт F не разбивает плоскость, состоит из конечного числа аналитических дуг, является совокупностью замыканий критических траекторий некоторого квадратичного дифференциала и обладает S -свойством (21). *Единственность* такого компакта вытекает из сходимости последовательности F_n , установленной ниже в теореме 6.

3.3. Приведем теперь характеристику компакта $F = F(1)$ с помощью *двулистной* римановой поверхности (ср. п. 2.4).

Пусть $K \in \mathcal{K}_f$ – произвольный допустимый компакт. Определим риманову поверхность $\mathfrak{R}$ уравнением $W^2 = z^2 - 1$ и положим $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^{(1)} \sqcup \mathfrak{R}^{(2)} \sqcup \Gamma$, где Γ – замкнутый цикл на $\mathfrak{R}$, проходящий через точки ± 1 и соответствующий отрезку $[-1, 1]$ при каноническом проектировании, $\mathfrak{R}^{(1)}$ – первый (открытый) лист римановой поверхности, $\mathfrak{R}^{(2)}$ – второй лист. Пусть $u(z^{(1)}) = G_K^\lambda(z)$, $z^{(1)} \in \mathfrak{R}^{(1)}$. Тогда из условий равновесия и симметрии относительно вещественной оси вытекает, что функция u гармонически продолжается на второй лист $\mathfrak{R}^{(2)}$ римановой поверхности формулой $u(z^{(2)}) = w^K - V^\lambda(z)$. Полученная функция $u(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in \mathfrak{R}$, обладает следующими свойствами: u – гармоническая функция на $\mathfrak{R} \setminus (K^{(1)} \cup \{\infty^{(2)}\})$, в точке $\mathbf{z} = \infty^{(2)}$ функция u имеет логарифмическую особенность, $u(\mathbf{z}) = 0$ при $\mathbf{z} \in K^{(1)}$. Следовательно, $u(\mathbf{z}) = g_{K^{(1)}}(\mathbf{z}, \infty^{(2)})$ – функция Грина области $D = \mathfrak{R} \setminus K^{(1)}$ с особенностью в бесконечно удаленной точке $\mathbf{z} = \infty^{(2)}$, $w^K = \gamma^{(2)}$ – соответствующая постоянная Робена, $c(K) = e^{-w^K}$ – емкость множества $K^{(1)}$ (на $\mathfrak{R}$ относительно точки $\mathbf{z} = \infty^{(2)}$). Тем самым, задача (47) о максимуме постоянной равновесия w^K в классе $K \in \mathcal{K}_f$ эквивалентна задаче о минимуме емкости $c(K)$ в этом классе. Соответствующий экстремальный компакт $\tilde{F}^{(1)}$ является компактом минимальной емкости (на $\mathfrak{R}$ относительно точки $\mathbf{z} = \infty^{(2)}$), определяется однозначно и вполне характеризуется S -свойством:

$$\frac{\partial g_{\tilde{F}^{(1)}}(\zeta^{(1)}, \infty^{(2)})}{\partial n_+} = \frac{\partial g_{\tilde{F}^{(1)}}(\zeta^{(1)}, \infty^{(2)})}{\partial n_-}, \quad \zeta^{(1)} \in \tilde{F}_0^{(1)} \quad (57)$$

(см. [3]–[5], [10]). В силу определения функции u , соотношение (57) эквивалентно S -свойству (21). Тем самым, $F = \tilde{F}$ и $G_F^\lambda(z) = g_{\Phi(F)}(\Phi(z), 0)$ при $z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus E$, т.е. стационарный в смысле экстремальной задачи (48) компакт F совпадает с образом компакта Шталя при отображении, задаваемом функцией Жуковского.

4. Доказательство теоремы 6

4.1. Перейдем теперь непосредственно к изучению сходимости диагональных нелинейных АПЧ для функции класса $\mathcal{A}_E(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Sigma)$.

Приведем сначала некоторые необходимые нам свойства общих полиномов Фабера, соответствующих произвольному континууму $E \Subset \mathbb{C}$ (см. [76]).

Пусть E – произвольный континуум в $\mathbb{C}$, не разбивающий плоскость и не вырождающийся в точку, $\Omega = \overline{\mathbb{C}} \setminus E$. Пусть $w = \Phi(z)$ – функция, конформно (и однолистно) отображающая область Ω на внешность единичного круга $\{w : |w| > 1\}$ так, что $\Phi(\infty) = \infty$, $\Phi'(\infty) > 0$, $\Phi : \Omega \rightarrow \{w : |w| > 1\}$, $z = \Psi(w)$ – обратная функция. Для произвольного $\rho > 1$ пусть $\gamma_\rho = \{z : |\Phi(z)| = \rho\}$ – линия уровня отображающей функции Φ , G_ρ – внутренность кривой γ_ρ . Тогда полиномы Фабера $\Phi_n(z) = \Phi_n(z; E)$ определяются по формуле

$$\Phi_n(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{\Phi^n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in G_\rho, \quad \rho > 1 \quad (58)$$

($\Phi_n(z)$ – главная часть разложения функции $\Phi^n(z)$ в ряд Лорана в бесконечно удаленной точке $z = \infty$).

Из (58) вытекает, что $\Phi_n(z) = \Phi^n(z)(1 + o(1))$, $n \rightarrow \infty$, локально равномерно в Ω . Следовательно, существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\Phi_n(z)|^{1/n} = |\Phi(z)|, \quad z \in \Omega. \quad (59)$$

Из (58) и (59) легко вытекает, что если функция f – голоморфная на E , $f \in \mathcal{H}(E)$, то f разлагается в ряд Фабера (ср. (9))

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \Phi_k(z), \quad c_k = c_k(f), \quad (60)$$

сходящийся к f локально равномерно в канонической области $G_0(f) := G_{\rho_0(f)}$, где

$$\frac{1}{\rho_0(f)} = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |c_k|^{1/k} < 1; \quad (61)$$

область $G_0(f)$ – максимальная каноническая область голоморфности функции f .

В классе функций $\mathcal{H}(E)$ стандартным образом определим (линейный) оператор Фабера $U: \mathcal{H}(E) \rightarrow \mathcal{H}(\mathbb{D})$, $\mathbb{D} := \{w : |w| < 1\}$, по формуле

$$U(f)(w) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k w^k, \quad (62)$$

где $f \in \mathcal{H}(E)$ задана разложением $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \Phi_k(z)$. В силу (61) функция $\tilde{f} = U(f)$ принадлежит $\mathcal{H}(\mathbb{D})$, при этом $\rho_0(f) = R_0(\tilde{f})$, где R_0 – радиус голоморфности соответствующей функции. Тем самым, $U: \mathcal{H}(E) \rightarrow \mathcal{H}(\mathbb{D})$.

Нетрудно видеть, что отображение U ограничено, биективно и справедлива следующая формула обращения:

$$f(z) = U^{-1}(\tilde{f})(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{\tilde{f}(\Phi(\zeta))}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in G_\rho, \quad 1 < \rho < \rho_0(f). \quad (63)$$

Для произвольных $n, m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ положим $\mathcal{R}_{n,m}(E) = \mathcal{R}_{n,m} \cap \mathcal{H}(E)$, $\mathcal{R}_{n,m}(\mathbb{D}) = \mathcal{R}_{n,m} \cap \mathcal{H}(\mathbb{D})$. Для произвольных фиксированных $m \in \mathbb{N}$ и $\rho > 1$ обозначим через $\mathcal{M}_m(G_\rho)$ класс функций $f \in \mathcal{H}(E)$, допускающих голоморфное продолжение в каноническую область G_ρ и имеющих там ровно⁵ m полюсов; аналогичным образом определяется и $\mathcal{M}_m(K_\rho)$ для $\tilde{f} \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, где $K_\rho = \{w : |w| < \rho\}$.

Справедливо следующее утверждение (см. [30], а также [31] и [32]) о свойствах оператора Фабера.

ЛЕММА 2. *Оператор Фабера U отображает:*

1) при $n \geq m-1$ множество $\mathcal{R}_{n,m}(E)$ линейно и взаимно однозначно на множество $\mathcal{R}_{n,m}(\mathbb{D})$, причем точка z_0 является полюсом кратности $\mu \geq 1$ функции $r(z) \in \mathcal{R}_{n,m}(E)$ тогда и только тогда, когда точка $w_0 = \Phi(z_0)$ является полюсом той же кратности μ функции $R(w) = U(r)(w) \in \mathcal{R}_{n,m}(\mathbb{D})$;

⁵Как обычно, нули и полюсы функций считаются с учетом их кратностей.

2) множество $\mathcal{M}_m(G_\rho)$, $\rho > 1$, линейно и взаимно однозначно на множестве $\mathcal{M}_m(K_\rho)$, причем точка z_0 является полюсом кратности $\mu \geq 1$ функции $f(z) \in \mathcal{M}_m(G_\rho)$ тогда и только тогда, когда точка $w_0 = \Phi(z_0)$ является полюсом той же кратности μ функции $\tilde{f}(w) = U(f)(w)$.

Это простое утверждение впервые было сформулировано в [30] (см. также [32]). Позднее эти свойства оператора Фабера и вытекающие из них следствия (в том числе аналог теоремы Монтеcssу) были переоткрыты другими авторами [77], [78].

Вышеуказанные свойства оператора Фабера понадобятся нам здесь для случая, когда континуум E есть отрезок $[-1, 1]$, $\Psi(w) = \text{Zh}(w) = (w + 1/w)/2$ – функция Жуковского, $w = \Phi(z) = z + \sqrt{z^2 - 1}$ и выбрана такая ветвь корня, что $\Phi(z) \sim 2z$ при $z \rightarrow \infty$.

4.2. Из следующего соотношения (см. определение (12) нелинейных АПЧ)

$$(f - F_n)(z) = \text{const} \cdot T_{2n+1}(z) + \dots \quad (64)$$

вытекает, что

$$(\tilde{f} - \tilde{F}_n)(w) = \text{const} \cdot w^{2n+1} + \dots, \quad (65)$$

где в силу леммы 2 функция $\tilde{F}_n$ принадлежит $\mathcal{R}_n(\mathbb{D})$. Следовательно, рациональная функция $\tilde{F}_n(w) = U(F_n)(w) = [n/n]_{\tilde{f}}(w)$ – диагональная аппроксимация Паде ряда $\sum_{k=0}^{\infty} c_k w^k$ порядка n .

Нетрудно видеть, что оператор Фабера (в нашем случае – Фабера–Чебышёва) сохраняет характер особенностей (в частности – ветвления) при переходе от функции f к функции $\tilde{f}$ и устанавливает взаимно однозначное соответствие между допустимыми компактами для функций f и $\tilde{f}$ (заданных в плоскостях $\mathbb{C}_z$ и $\mathbb{C}_w$ соответственно). Следовательно, при условии, что $\tilde{f} \in \mathcal{H}(\infty)$, формулу (63) можно записать в виде

$$f(z) = R(z) + \frac{1}{2\pi i} \oint_F \frac{[\tilde{f}](\Phi(\zeta))}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \Omega \setminus F, \quad (66)$$

где $F \in \mathcal{K}_f$ – S -симметричный компакт для f , $R = U^{-1}(r)$, r – сумма главных частей функции $\tilde{f}$ в $\overline{\mathbb{C}}_w \setminus \Phi(F)$, $[\tilde{f}]$ – голоморфная составляющая функции $\tilde{f}$ в $\overline{\mathbb{C}}_w \setminus \Phi(F)$ и под $\oint_F$ понимается интеграл по любому контуру, охватывающему F и отделяющему F от точки z и отрезка E . Аналогичное (66) представление справедливо и для диагональных АПЧ F_n функции f .

Из первой теоремы Шталя (см. [6]) вытекает, что $[n/n]_{\tilde{f}} \xrightarrow{\text{cap}} \tilde{f}$ на компактных подмножествах области $\overline{\mathbb{C}}_w \setminus \tilde{F}$, где $\tilde{F} = \Phi(F)$ – компакт Шталя⁶ для функции $\tilde{f}$. При этом

$$|\tilde{f}(w) - [n/n]_{\tilde{f}}(w)|^{1/n} \xrightarrow{\text{cap}} e^{-2g_{\tilde{F}}(w,0)}, \quad w \in \tilde{K} \Subset \tilde{D}, \quad (67)$$

⁶Более точно, компакт Шталя есть множество $S = \{z : 1/z \in \tilde{F}\}$ и определяется относительно бесконечно удаленной точки.

$\tilde{D} = \overline{\mathbb{C}}_w \setminus \tilde{F}$, и для $\tilde{Q}_n$ – знаменателей аппроксимации Паде функции $\tilde{f}$ имеем:

$$\frac{1}{n} \mu(\tilde{Q}_n) \rightarrow \lambda_{\tilde{F}}, \quad \text{где } \lambda_{\tilde{F}} \text{ – равновесная мера для } \tilde{F}. \quad (68)$$

Из леммы 2 и соотношений (64)–(68) вытекает, что $F_n \xrightarrow{\text{cap}} f$ на компактных подмножествах области $\overline{\mathbb{C}}_z \setminus F$, при этом в силу (67) и равенства (см. п. 3.3) $G_F^\lambda(z) = g_{\tilde{F}}(\Phi(z), 0)$, справедливого при $z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus E$, имеем

$$|f(z) - F_n(z)|^{1/n} \xrightarrow{\text{cap}} e^{-2G_F^\lambda(z)}, \quad z \in K \Subset D, \quad (69)$$

и все нули полинома Q_n за возможным исключением $o(n)$ из них притягиваются к компактному F . Сходимость диагональных АПЧ функции f доказана. Отметим, что из сказанного выше вытекает единственность диагональных АПЧ (по соответствующей подпоследовательности) для достаточно больших n .

4.3. Докажем теперь утверждения о предельном распределении нулей Q_n и точек интерполяции.

Итак, пусть нелинейная АПЧ F_n существует при всех $n \geq n_0$, принадлежащих некоторой бесконечной последовательности $\Lambda \subset \mathbb{N}$, и $F_n \in \mathcal{H}(E)$. Все дальнейшие рассуждения будут проводиться для таких n . Из (11) получаем следующие соотношения ортогональности:

$$\int_E (f - F_n)(x) T_k(x) d\tau(x) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, 2n. \quad (70)$$

Функции f и F_n вещественны на E . Поэтому из соотношений (70) вытекает, что разность $f - F_n$ обращается в нуль на E по меньшей мере в $(2n + 1)$ -й точке. Пусть $\omega_{2n}(z) = z^{2n+1} + \dots$ – полином с нулями в этих точках. Положим $F_n = P_n/Q_n$, тогда имеем: функция $(Q_n f - P_n)/\omega_{2n}$ голоморфна на E . Пусть U_m – полином фиксированной степени m с единичным старшим коэффициентом такой, что среди нулей U_m содержатся все точки ветвления функции f с такой кратностью, что функция $U_m \cdot \Delta f = U_m \cdot (f_+ - f_-)$ непрерывна на F ; здесь и далее через $\Delta f = f_+ - f_-$ обозначается скачок функции f на дугах, составляющих компакт F . Ясно, что U_m – вещественный полином, не имеющий нулей на E . Функция $U_m(Q_n f - P_n)/\omega_{2n}$ голоморфна в D . Теперь стандартным способом (см., например, [10], [79]) получаем следующие соотношения:

$$(f - F_n)(z) = \frac{\omega_{2n}(z)}{Q_n(z)q(z)U_m(z)} \frac{1}{2\pi i} \oint_F \frac{Q_n(t)q(t)U_m(t)f(t)dt}{\omega_{2n}(t)(t - z)}, \quad z \in D, \quad (71)$$

$$\oint_F \frac{Q_n(t)t^k U_m(t)f(t)dt}{\omega_{2n}(t)} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1 - m, \quad m = \deg U_m, \quad (72)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \omega_{2n}(x) x^j \frac{1}{Q_n(x)q(x)U_m(x)} \\ & \times \left\{ \oint_F \frac{Q_n(t)q(t)U_m(t)f(t)dt}{\omega_{2n}(t)(t - x)} \right\} d\tau(x) = 0, \quad j = \overline{0, 2n}, \end{aligned} \quad (73)$$

где, как и выше, под $\oint_F$ понимается интеграл по любому контуру, охватывающему F и отделяющему F от точки z и отрезка E , q – произвольный полином

степени $\leq n - m$. Так как функция $U_m \cdot \Delta f$ непрерывна на F , то в соотношениях (71)–(73) от интеграла $\oint_F$ можно перейти к интегралу $\int_F$, а $f(t)$ заменить на $\Delta f(t)$. Кроме того, вместо полинома q в эти соотношения можно подставить полином $\tilde{Q}_n$, который отличается от Q_n сомножителем, степень которого не превосходит m . Таким образом, получаем

$$(f - F_n)(z) = \frac{\omega_{2n}(z)}{Q_n(z)\tilde{Q}_n(z)U_m(z)} \frac{1}{2\pi i} \int_F \frac{Q_n(t)\tilde{Q}_n(t)U_m(t)\Delta f(t) dt}{\omega_{2n}(t)(t - z)}, \quad z \in D, \quad (74)$$

$$\int_F \frac{Q_n(t)t^k U_m(t)\Delta f(t) dt}{\omega_{2n}(t)} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1 - m, \quad (75)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \omega_{2n}(x)x^j \frac{1}{Q_n(x)\tilde{Q}_n(x)U_m(x)} \\ & \times \left\{ \int_F \frac{Q_n(t)\tilde{Q}_n(t)U_m(t)\Delta f(t) dt}{\omega_{2n}(t)(t - x)} \right\} d\tau(x) = 0, \quad j = \overline{0, 2n}. \end{aligned} \quad (76)$$

В силу (69) справедливо соотношение

$$|f(z) - F_n(z)|^{1/(2n)} \xrightarrow{\text{cap}} e^{-G_F^\lambda(z)}. \quad (77)$$

Так как все нули полинома ω_{2n} лежат на отрезке E , то (переходя при необходимости к подпоследовательности) имеем:

$$|\omega_{2n}(z)|^{1/(2n)} \rightarrow e^{-V^{\mu_\omega}(z)} \quad (78)$$

локально равномерно в $\mathbb{C} \setminus E$, где $\mu_\omega \in M(E)$. Поскольку почти все нули полиномов Q_n и $\tilde{Q}_n$ (кроме $o(n)$ из них) притягиваются к компакту F , то

$$|Q_n(z)|^{1/n} \xrightarrow{\text{cap}} e^{-V^{\mu_Q}(z)}, \quad |\tilde{Q}_n(z)|^{1/n} \xrightarrow{\text{cap}} e^{-V^{\mu_Q}(z)}, \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus F, \quad (79)$$

где $\mu_Q \in M(F)$. Следовательно, из (77)–(79) получаем:

$$V^{\mu_Q}(z) - V^{\mu_\omega}(z) + V(z) = G_F^\lambda(z), \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus (E \cup F), \quad (80)$$

где

$$V(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} \log \left| \int_F \frac{Q_n(t)\tilde{Q}_n(t)U_m(t)\Delta f(t) dt}{\omega_{2n}(t)(t - z)} \right|^{1/(2n)}. \quad (81)$$

Функция V – гармоническая вне $E \cup F$ и субгармоническая на E . Из соотношения равновесия (80) вытекает, что разность $V - V^{\mu_\omega}$ непрерывно продолжается на E . Потенциал V^{μ_ω} – супергармоническая функция на E , тем самым, V^{μ_ω} полунепрерывна снизу на E . Функция V полунепрерывна сверху на E и отличается от V^{μ_ω} на непрерывную функцию. Следовательно, обе функции V и V^{μ_ω} непрерывны на E . Теперь уже из соотношения (76), используя вещественность всех входящих в это соотношение функций, стандартным методом работы [56] получаем следующее соотношение равновесия на E :

$$-2V^{\mu_\omega}(x) + V^{\mu_Q}(x) + V(x) \equiv \text{const}, \quad x \in E. \quad (82)$$

Из соотношений (80) и (82) вытекает, что

$$V^{\mu_\omega}(x) + G_F^\lambda(x) \equiv \text{const}, \quad x \in E. \quad (83)$$

Следовательно, в силу условий равновесия (41) имеем:

$$V^{\mu_\omega}(x) \equiv V^\lambda(x) + \text{const}, \quad x \in E, \quad \mu_\omega, \lambda \in M(E).$$

Отсюда получаем, что $\mu_\omega = \lambda$.

Наконец, воспользуемся соотношениями ортогональности (75). Из S -свойства компакта F и равенства $\mu_\omega = \lambda$ вытекает, что мы находимся в условиях общей теоремы 3 работы [10; § 3]. Непосредственно из этой теоремы для рассматриваемого здесь частного случая внешнего поля $\psi(z) = -V^\lambda(z)$ вытекает, что $\mu_Q = \tilde{\lambda}$ – выметание меры λ на F , а $V(z) \equiv \text{const}$.

Из сказанного выше вытекает, что соотношения

$$\frac{1}{2n} \mu(\omega_{2n}) \rightarrow \lambda, \quad \frac{1}{n} \mu(Q_n) \rightarrow \tilde{\lambda} \quad (84)$$

имеют место для любой подпоследовательности $\Lambda \subset \mathbb{N}$. Следовательно, λ и $\tilde{\lambda}$ – единственные предельные точки для последовательностей нормированных мер $\frac{1}{2n} \mu(\omega_{2n})$ и $\frac{1}{n} \mu(Q_n)$ соответственно. Тем самым все утверждения теоремы 6 доказаны.

Список литературы

- [1] Дж. Л. Уолш, *Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области*, ИЛ, М., 1961, 508 с.; пер. с англ.: J. L. Walsh, *Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain*, 3rd ed., Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **XX**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1960, x+398 pp.
- [2] А. А. Гончар, “О скорости рациональной аппроксимации некоторых аналитических функций”, *Матем. сб.*, **105(147)**:2 (1978), 147–163; англ. пер.: A. A. Gončar, “On the speed of rational approximation of some analytic functions”, *Math. USSR-Sb.*, **34**:2 (1978), 131–145.
- [3] H. Stahl, “Extremal domains associated with an analytic function. I”, *Complex Variables Theory Appl.*, **4**:4 (1985), 311–324.
- [4] H. Stahl, “Extremal domains associated with an analytic function. II”, *Complex Variables Theory Appl.*, **4**:4 (1985), 325–338.
- [5] H. Stahl, “Structure of extremal domains associated with an analytic function”, *Complex Variables Theory Appl.*, **4**:4 (1985), 339–354.
- [6] H. Stahl, “Orthogonal polynomials with complex valued weight function. I”, *Constr. Approx.*, **2**:3 (1986), 225–240.
- [7] H. Stahl, “Orthogonal polynomials with complex valued weight function. II”, *Constr. Approx.*, **2**:3 (1986), 241–251.
- [8] H. Stahl, “Convergence of rational interpolants”, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 1996, suppl. issue – Numerical analysis. Papers from the Conference on Special Topics in Numerical Analysis and Applied Mathematics in honor of Jean Meinguet (Louvain-la-Neuve, 1995), 11–32.
- [9] H. Stahl, “The convergence of Padé approximants to functions with branch points”, *J. Approx. Theory*, **91**:2 (1997), 139–204.

- [10] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, “Равновесные распределения и скорость рациональной аппроксимации аналитических функций”, *Матем. сб.*, **134(176)**:3(11) (1987), 306–352; англ. пер.: А. А. Gonchar, Е. А. Rakhmanov, “Equilibrium distributions and degree of rational approximation of analytic functions”, *Math. USSR-Sb.*, **62**:2 (1989), 305–348.
- [11] А. И. Аптекарев, В. И. Буслаев, А. Мартинес-Финкельштейн, С. П. Суетин, “Аппроксимации Паде, непрерывные дроби и ортогональные многочлены”, *УМН*, **66**:6 (2011), 37–122.
- [12] R. Jentzsch, “Untersuchungen zur Theorie der Folgen analytischer Funktionen”, *Acta Math.*, **41**:1 (1916), 219–251.
- [13] G. Szegő, “Über die Nullstellen von Polynomen, die in einem Kreise gleichmässig konvergieren”, *Sitzungsber. Berl. Math. Ges.*, **21** (1922), 59–64.
- [14] Д. В. Христофоров, “Об асимптотических свойствах интерполяционных многочленов”, *Матем. заметки*, **83**:1 (2008), 129–138; англ. пер.: D. V. Khristoforov, “On asymptotic properties of interpolation polynomials”, *Math. Notes*, **83**:1 (2008), 116–124.
- [15] Е. А. Лебедева, “Об одном обобщении теоремы Р. Йенча”, *Матем. заметки*, **88**:5 (2010), 753–758; англ. пер.: Е. А. Lebedeva, “A generalization of Jentzsch’s theorem”, *Math. Notes*, **88**:5 (2010), 717–722.
- [16] Н.-Р. Blatt, R. K. Kovacheva, “Growth behavior and zero distribution of rational approximants”, *Constr. Approx.*, **34**:3 (2011), 393–420.
- [17] E. Remes, “Sur le calcul effectif des polynômes d’approximation de Tschebyscheff”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **199** (1934), 337–340.
- [18] Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации*, М., Наука, 1965, 407 с.; англ. пер.: N. I. Achieser, *Theory of approximation*, Dover Publications, Inc., New York, 1992, x+307 pp.
- [19] Н. И. Ахиезер, “Чебышевское направление в теории аппроксимаций”, *Математика XIX века*, Вып. 3, ред. А. Н. Колмогоров, А. П. Юшкевич, Наука, М., 1987, 9–79.
- [20] Е. Я. Ремез, *Основы численных методов чебышевского приближения*, Наукова думка, Киев, 1969, 624 с.
- [21] В. И. Лебедев, “О нахождении многочленов наилучшего с весом приближения”, *Матем. сб.*, **199**:2 (2008), 49–70; англ. пер.: V. I. Lebedev, “Finding polynomials of best approximation with weight”, *Sb. Math.*, **199**:2 (2008), 207–228.
- [22] В. И. Лебедев, “О тригонометрической форме чебышевских теорем об альтернансе и фазовом итерационном методе нахождения наилучших с весом приближений”, *Уфимск. матем. журн.*, **1**:4 (2009), 110–118.
- [23] А. Б. Богатырев, “Эффективное решение задачи о наилучшем многочлене устойчивости”, *Матем. сб.*, **196**:7 (2005), 27–50; англ. пер.: A. B. Bogatyrev, “Effective solution of the problem of the optimal stability polynomial”, *Sb. Math.*, **196**:7 (2005), 959–981.
- [24] А. Б. Богатырёв, “Чебышёвское представление рациональных функций”, *Матем. сб.*, **201**:11 (2010), 19–40; англ. пер.: A. B. Bogatyrev, “Chebyshev representation for rational functions”, *Sb. Math.*, **201**:11 (2010), 1579–1598.
- [25] J. M. Borwein, M. P. Skerritt, *An introduction to modern mathematical computing. With Maple^{TM}*, Springer Undergrad. Texts Math. Technol., Springer, New York, 2011, xvi+216 pp.
- [26] О. Б. Арушанян, Н. И. Волченскова, С. Ф. Залеткин, “Приближенное решение обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием рядов Чебышева”, *Сиб. электрон. матем. изв.*, **7** (2010), 122–131.

- [27] О. Б. Арушанян, Н. И. Волченкова, С. Ф. Залеткин, “О вычислении коэффициентов рядов Чебышёва для решений обыкновенных дифференциальных уравнений”, *Сиб. электрон. матем. изв.*, **8** (2011), 273–283.
- [28] J. P. Boyd, *Chebyshev and Fourier spectral methods*, 2nd ed., Dover Publications, Mineola, NY, 2001, xvi+668 pp.
- [29] J. P. Boyd, “Chebyshev expansion on intervals with branch points with application to the root of Kepler’s equation: a Chebyshev–Hermite–Padé method”, *J. Comput. Appl. Math.*, **223**:2 (2009), 693–702.
- [30] С. П. Суетин, “О теореме Монтеcssу де Болора для нелинейных аппроксимаций Паде ортогональных разложений и рядов Фабера”, *Докл. АН СССР*, **253**:6 (1980), 1322–1325; англ. пер.: S. P. Suetin, “On de Montessus de Ballore’s theorem for nonlinear Padé approximants of orthogonal expansions and Faber series”, *Soviet Math. Dokl.*, **22** (1980), 274–277.
- [31] K. O. Geddes, “Block structure in the Chebyshev–Padé table”, *SIAM J. Numer. Anal.*, **18**:5 (1981), 844–861.
- [32] С. П. Суетин, “О существовании нелинейных аппроксимаций Паде–Чебышёва для аналитических функций”, *Матем. заметки*, **86**:2 (2009), 290–303; англ. пер.: S. P. Suetin, “On the existence of nonlinear Padé–Chebyshev approximations for analytic functions”, *Math. Notes*, **86**:2 (2009), 264–275.
- [33] Л. А. Книжнерман, “Аппроксимация Паде–Фабера марковских функций на вещественно-симметричных компактах”, *Матем. заметки*, **86**:1 (2009), 81–94; англ. пер.: L. A. Knizhnerman, “Padé–Faber approximation of Markov functions on real-symmetric compact sets”, *Math. Notes*, **86**:1 (2009), 81–92.
- [34] Дж. Бейкер, П. Грейвс–Моррис, *Аппроксимации Паде*, Мир, М., 1986, 504 с.; пер. с англ.: G. A. Baker, Jr., P. Graves-Morris, *Padé approximants. Part I. Basic theory*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, **13**, Addison-Wesley, Reading, MA, 1981, xx+325 pp.; *Padé approximants. Part II. Extensions and applications*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, **14**, Addison-Wesley, Reading, MA, 1981, xviii+215 pp.
- [35] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, С. П. Суетин, “О сходимости аппроксимаций Паде ортогональных разложений”, *Теория чисел, алгебра, математический анализ и их приложения*, Сборник статей. Посвящается 100-летию со дня рождения Ивана Матвеевича Виноградова, Тр. МИАН, **200**, Наука, М., 1991, 136–146; англ. пер.: A. A. Gonchar, E. A. Rakhmanov, S. P. Suetin, “On the convergence of Padé approximation of orthogonal expansions”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **200** (1993), 149–159.
- [36] A. A. Gonchar, E. A. Rakhmanov, S. P. Suetin, “On the rate of convergence of Padé approximants of orthogonal expansions”, *Progress in approximation theory* (Tampa, FL, 1990), Springer Ser. Comput. Math., **19**, Springer, New York, 1992, 169–190.
- [37] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, С. П. Суетин, *О сходимости аппроксимаций Чебышёва–Паде для вещественных алгебраических функций*, 2010, 10 с., arXiv: 1009.4813.
- [38] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, С. П. Суетин, *Сходимость нелинейных аппроксимаций Паде–Чебышёва для многозначных аналитических функций, вариация равновесной энергии и S-свойство стационарных компактов*, 2010, 49 с., arXiv: 1012.0170.
- [39] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, С. П. Суетин, “О сходимости аппроксимаций Паде–Чебышёва для аналитических функций с конечным числом точек ветвления”, *Докл. РАН*, 2012 (в печати).
- [40] О. Л. Ибряева, “Достаточное условие единственности линейной аппроксимации Паде–Чебышёва”, *Известия Челябинского научного центра*, 2002, № 4(17), 1–5; <http://csc.ac.ru/ej/issue/ru/18>.

- [41] Р. Варга, *Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе*, Мир, М., 1974, 126 с.; пер. с англ.: R. S. Varga, *Functional analysis and approximation theory in numerical analysis*, CBMS-NSF Regional Conf. Ser. Appl. Math., **3**, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 1971, v+76 pp.
- [42] R. S. Varga, “Scientific computation on some mathematical conjectures”, *Approximation theory*, V, Proceedings of the Fifth International Symposium on Approximation Theory (College Station, TX, 1986), eds. C. K. Chui, L. L. Schumaker, J. D. Ward, Academic Press, Boston, MA, 1986, 191–209.
- [43] Л. А. Книжнерман, “Выделение полюсов потенциальных полей с помощью разложения в ряды Фурье–Чебышёва”, *Изв. АН СССР. Сер. физика Земли*, 1984, № 11, 119–123.
- [44] G. L. Litvinov, “Error autocorrection in rational approximation and interval estimates. A survey of results”, *Cent. Eur. J. Math.*, **1**:1 (2003), 36–60.
- [45] L. N. Trefethen, M. H. Gutknecht, “The Carathéodory–Fejér method for real rational approximation”, *SIAM J. Numer. Anal.*, **20**:2 (1983), 420–436.
- [46] L. N. Trefethen, M. H. Gutknecht, “Padé, stable Padé, and Chebyshev–Padé approximation”, *Algorithms for Approximation* (Shrivenham, 1985), Inst. Math. Appl. Conf. Ser. New Ser., **10**, Oxford University Press, New York, 1987, 227–264.
- [47] Ю. А. Лабыч, А. П. Старовойтов, “Тригонометрические аппроксимации Паде функций с регулярно убывающими коэффициентами Фурье”, *Матем. сб.*, **200**:7 (2009), 107–130; англ. пер.: Yu. A. Labych, A. P. Starovoitov, “Trigonometric Padé approximants for functions with regularly decreasing Fourier coefficients”, *Sb. Math.*, **200**:7 (2009), 1051–1074.
- [48] Л. М. Скворцов, “Явные стабилизированные методы Рунге–Кутты”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **51**:7 (2011), 1236–1250; англ. пер.: L. M. Skvortsov, “Explicit stabilized Runge–Kutta methods”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **51**:7 (2011), 1153–1166.
- [49] С. Пашковский, *Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышёва*, Наука, М., 1983, 384 с.; пер. с польск.: S. Paszkowski, *Zastosowania numeryczne wielomianów i szeregów Czebyszewa*, Podstawowe Algorytmy Numeryczne, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warsaw, 1975 (Polish), 481 pp.
- [50] V. I. Buslaev, “Simple counterexample to the Baker–Gammel–Wills conjecture”, *East J. Approx.*, **7**:4 (2001), 515–517.
- [51] В. И. Буслаев, “О гипотезе Бейкера–Гаммеля–Уиллса в теории аппроксимаций Паде”, *Матем. сб.*, **193**:6 (2002), 25–38; англ. пер.: V. I. Buslaev, “On the Baker–Gammel–Wills conjecture in the theory of Padé approximants”, *Sb. Math.*, **193**:6 (2002), 811–823.
- [52] H. Stahl, “Diagonal Padé approximants to hyperelliptic functions”, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* (6), 1996, Special issue, 121–193.
- [53] С. П. Суетин, “О равномерной сходимости диагональных аппроксимаций Паде для гиперэллиптических функций”, *Матем. сб.*, **191**:9 (2000), 81–114; англ. пер.: S. P. Suetin, “Uniform convergence of Padé diagonal approximants for hyperelliptic functions”, *Sb. Math.*, **191**:9 (2000), 1339–1373.
- [54] Д. В. Христофоров, “О сходимости диагональных аппроксимаций Паде для эллиптических функций”, *Матем. сб.*, **200**:6 (2009), 143–160; англ. пер.: D. V. Khristoforov, “On uniform approximation of elliptic functions by Padé approximants”, *Sb. Math.*, **200**:6 (2009), 923–941.
- [55] Н. С. Ландкоф, *Основы современной теории потенциала*, Наука, М., 1966, 515 с.; англ. пер.: N. S. Landkof, *Foundations of modern potential theory*, Grundlehren Math. Wiss., **180**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1972, 424 pp.

- [56] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, “Равновесная мера и распределение нулей экстремальных многочленов”, *Матем. сб.*, **125(167)**:1(9) (1984), 117–127; англ. пер.: A. A. Gonchar, E. A. Rakhmanov, “Equilibrium measure and the distribution of zeros of extremal polynomials”, *Math. USSR-Sb.*, **53**:1 (1986), 119–130.
- [57] А. Мартинес-Финкельштейн, Е. А. Рахманов, С. П. Суетин, “Вариация равновесной энергии и S -свойство стационарных компактов”, *Матем. сб.*, **202**:12 (2011), 113–136.
- [58] К. М. Ермохин, “Технология построения разрезов методом аналитического продолжения геофизических полей”, *Геоинформатика*, 2010, № 2, 51–60; <http://www.geosys.ru/index.php/journal/archive.html>.
- [59] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, “О задаче равновесия для векторных потенциалов”, *УМН*, **40**:4(244) (1985), 155–156; англ. пер.: A. A. Gonchar, E. A. Rakhmanov, “On the equilibrium problem for vector potentials”, *Russian Math. Surveys*, **40**:4 (1985), 183–184.
- [60] А. И. Аптекарев, “Асимптотика аппроксимаций Эрмита–Паде для пары функций с точками ветвления”, *Докл. РАН*, **422**:4 (2008), 443–445; англ. пер.: A. I. Aptekarev, “Asymptotics of Hermite–Padé approximants for two functions with branch points”, *Dokl. Math.*, **78**:2 (2008), 717–719.
- [61] Дж. Дженкинс, *Однолистные функции и конформные отображения*, ИЛ, М., 1962, 265 с.; пер. с англ.: J. A. Jenkins, *Univalent functions and conformal mapping*, *Ergeb. Math. Grenzgeb. Neue Folge*, **18**, Reihe: Moderne Funktionentheorie, Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1958, vi+169 pp.
- [62] Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, 2-е изд., Наука, М., 1966, 628 с.; англ. пер.: G. M. Goluzin, *Geometric theory of functions of a complex variable*, *Translations of Mathematical Monographs*, **26**, American Mathematical Society, Providence, R. I., 1969, vi+676 pp.
- [63] Г. В. Кузьмина, “Модули семейств кривых и квадратичные дифференциалы”, *Тр. МИАН СССР*, **139**, 1980, 3–241; англ. пер.: G. V. Kuz'mina, “Moduli of families of curves and quadratic differentials”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **139** (1982), 1–231.
- [64] А. Мартинес-Финкельштейн, Е. А. Рахманов, С. П. Суетин, “Вариация равновесной меры и S -свойство стационарного компакта”, *УМН*, **66**:1(397) (2011), 183–184; англ. пер.: A. Martínez-Finkelshtein, E. A. Rakhmanov, S. P. Suetin, “Variation of the equilibrium measure and the S -property of a stationary compact set”, *Russian Math. Surveys*, **66**:1 (2011), 176–178.
- [65] Г. В. Кузьмина, “Геннадий Михайлович Голузин и геометрическая теория функций”, *Алгебра и анализ*, **18**:3 (2006), 3–38; англ. пер.: G. V. Kuz'mina, “Gennadii Mikhailovich Goluzin and geometric function theory”, *St. Petersburg Math. J.*, **18**:3 (2007), 347–372.
- [66] Е. А. Перевозникова, Е. А. Рахманов, *Вариация равновесной энергии и S -свойство компактов минимальной емкости*, Препринт, М., 1994.
- [67] В. И. Буслаев, А. Мартинес-Финкельштейн, С. П. Суетин, *Метод внутренних вариаций и существование S -компактов*, 2012 (в печати).
- [68] А. И. Аптекарев, “Точные константы рациональных аппроксимаций аналитических функций”, *Матем. сб.*, **193**:1 (2002), 3–72; англ. пер.: A. I. Aptekarev, “Sharp constants for rational approximations of analytic functions”, *Sb. Math.*, **193**:1 (2002), 1–72.
- [69] A. Martínez-Finkelshtein, E. A. Rakhmanov, “On asymptotic behavior of Heine–Stieltjes and Van Vleck polynomials”, *Recent trends in orthogonal polynomials and approximation theory*, *Contemp. Math.*, **507**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010, 209–232.

- [70] A. Martínez-Finkelshtein, E. Rakhmanov, “Critical measures, quadratic differentials, and weak limits of zeros of Stieltjes polynomials”, *Comm. Math. Phys.*, **302**:1 (2011), 53–111.
- [71] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, “О сходимости совместных аппроксимаций Паде для систем функций марковского типа”, *Теория чисел, математический анализ и их приложения*, Сборник статей. Посвящается академику Ивану Матвеевичу Виноградову к его девяностолетию, Тр. МИАН СССР, **157**, 1981, 31–48; англ. пер.: A. A. Gonchar, E. A. Rakhmanov, “On the convergence of simultaneous Padé approximants for systems of functions of Markov type”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **157** (1983), 31–50.
- [72] Е. А. Рахманов, “К асимптотике многочленов Эрмита–Паде для двух марковских функций”, *Матем. сб.*, **202**:1 (2011), 133–140; англ. пер.: E. A. Rakhmanov, “The asymptotics of Hermite–Padé polynomials for two Markov-type functions”, *Sb. Math.*, **202**:1 (2011), 127–134.
- [73] С. П. Суетин, “Некоторый аналог вариационных формул Адамара и Шиффера”, *ТМФ*, 2012 (в печати).
- [74] А. И. Аптекарев, В. Г. Лысов, Д. Н. Туляков, “Случайные матрицы с внешним источником и асимптотика совместно ортогональных многочленов”, *Матем. сб.*, **202**:2 (2011), 3–56; англ. пер.: A. I. Aptekarev, V. G. Lysov, D. N. Tulyakov, “Random matrices with external source and the asymptotic behaviour of multiple orthogonal polynomials”, *Sb. Math.*, **202**:2 (2011), 155–206.
- [75] A. I. Aptekarev, A. B. J. Kuijlaars, W. Van Assche, “Asymptotics of Hermite–Padé rational approximants for two analytic functions with separated pairs of branch points (case of genus 0)”, *Int. Math. Res. Pap. IMRP*, 2008, Art. ID rpm007, 128 pp.
- [76] В. И. Смирнов, Н. А. Лебедев, *Конструктивная теория функций комплексного переменного*, Наука, М., 1964, 438 с.; англ. пер.: V. I. Smirnov, N. A. Lebedev, *Functions of a complex variable: Constructive theory*, The M.I.T. Press, Cambridge, MA, 1968, 488 pp.
- [77] S. W. Ellacott, “On the Faber transform and efficient numerical rational approximation”, *SIAM J. Numer. Anal.*, **20**:5 (1983), 989–1000.
- [78] S. W. Ellacott, E. B. Saff, “Computing with the Faber transform”, *Rational approximation and interpolation* (Tampa, 1983), Lecture Notes in Math., **1105**, Springer, Berlin, 1984, 412–418.
- [79] А. А. Гончар, Г. Лопес Лагомасино, “О теореме Маркова для многоточечных аппроксимаций Паде”, *Матем. сб.*, **105(147)**:4 (1978), 512–524; англ. пер.: A. A. Gonchar, G. López Lagomasino, “On Markov’s theorem for multipoint Padé approximants”, *Math. USSR-Sb.*, **34**:4 (1978), 449–459.

А. А. Гончар (A. A. Gonchar)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Поступила в редакцию

08.11.2011

Е. А. Рахманов (E. A. Rakhmanov)

University of South Florida;

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: rakhmano@shell.cas.usf.edu

С. П. Суетин (S. P. Suetin)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: suetin@mi.ras.ru