Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Аптекарев, А. Э. Койэлаарс, Аппроксимации Эрмита–Паде и ансамбли совместно ортогональных многочленов, *УМН*, 2011, том 66, выпуск 6, 123–190

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9454>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 17:34:10

УДК 517.53

Аппроксимации Эрмита–Паде и ансамбли совместно ортогональных многочленов

А. И. Аптекарев, А. Б. Э. Койэлаарс

В статье рассматриваются рациональные аппроксимации Эрмита–Паде аналитических функций и их связи с ансамблями совместно ортогональных многочленов. Обсуждаются результаты по аналитической теории таких аппроксимаций, а именно сходимости и распределение полюсов рациональных аппроксимаций. Также приводится обзор результатов о распределении собственных значений соответствующих случайных матриц и о различных режимах таких распределений. Важным понятием, используемым при описании и доказательстве подобных результатов, является равновесие векторного потенциала с матрицей взаимодействия, введенное А. А. Гончаром и Е. А. Рахмановым в 1981 г.

Библиография: 91 название.

Ключевые слова: аппроксимации Эрмита–Паде, совместно ортогональные многочлены, слабая и сильная асимптотика, экстремальные задачи равновесия для систем мер, матричная задача Римана–Гильберта, формула Кристоффеля–Дарбу, матричная модель с внешним источником, непересекающиеся случайные пути, двухматричная модель.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	124
Глава 1. Аппроксимации Эрмита–Паде	127
1. Аппроксимации Эрмита–Паде марковских функций	127
1.1. Замечания исторического характера	127
1.2. Графы и соответствующие системы марковских функций	130
1.3. Слабая асимптотика	134
1.4. Доказательство теоремы 1.1	138
1.5. Пример. Треугольный граф	141
2. Аппроксимации Эрмита–Паде функций с комплексными точками ветвления	144

Работа первого автора выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 11-01-00245, 11-01-12045-офи-м), программы № 1 Отделения математических наук РАН и программы “Catedras de Exelencia” (Университет им. Карлоса III, Мадрид, и банк Santander); работа второго автора выполнена при поддержке K. U. Leuven Research Grant OT/08/33, FWO-Flanders projects G.0427.09 and G.0641.11, Belgian Interuniversity Attraction Pole P06/02 и Министерства науки и инноваций Испании (код проекта MTM2008-06689-C02-01).

2.1. Замечания исторического характера.....	144
2.2. Геометрия задачи.....	147
2.3. Слабая асимптотика, сходимость и задачи равновесия для векторного потенциала.....	154
Глава 2. Ансамбли совместно ортогональных многочленов.....	156
3. Определения и детерминантные формулы.....	157
3.1. Ансамбли ортогональных многочленов.....	157
3.2. Ансамбли совместно ортогональных многочленов.....	158
3.3. Детерминантный точечный процесс.....	159
3.4. Задача Римана–Гильберта.....	162
3.5. Доказательство теоремы 3.1.....	164
4. Случайные матрицы с внешним источником.....	165
4.1. Модель с внешним источником как СОМ-ансамбль.....	166
4.2. Асимптотика для больших n	167
4.3. Гауссова модель с внешним источником.....	168
4.4. Негауссова модель с внешним источником.....	171
5. Ансамбли непересекающихся путей.....	175
5.1. Непересекающиеся броуновские движения.....	175
5.2. Непересекающиеся квадратичные бесселевские траектории.....	177
6. Двухматричная модель.....	180
6.1. Определения.....	180
6.2. Двухматричная модель с потенциалом четвертой степени.....	182
Список литературы.....	185

Введение

Начнем с определения общей конструкции рациональных функций с общим знаменателем, дающих приближение вектора, составленного из степенных рядов:

$$\vec{f} = (f_1, \dots, f_p), \quad f_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_{j,k}}{z^{k+1}}, \quad j = 1, \dots, p. \quad (0.1)$$

Будем говорить, что вектор

$$\pi_{\vec{n}} = \left(\frac{Q_{\vec{n},1}}{P_{\vec{n}}}, \dots, \frac{Q_{\vec{n},p}}{P_{\vec{n}}} \right), \quad \vec{n} = (n_1, \dots, n_p) \in \mathbb{N}^p, \quad (0.2)$$

составленный из рациональных функций с общим знаменателем $P_{\vec{n}}$ является аппроксимацией Эрмита–Паде (второго рода) с мультииндексом $\vec{n}$ для вектора $\vec{f}$, составленного из степенных рядов, если

$$P_{\vec{n}} \neq 0, \quad \deg P_{\vec{n}} \leq |\vec{n}| := n_1 + \dots + n_p, \quad (0.3)$$

$$f_j(z)P_{\vec{n}}(z) - Q_{\vec{n},j}(z) =: R_{\vec{n},j}(z) = O\left(\frac{1}{z^{n_j+1}}\right) \quad \text{при } z \rightarrow \infty, \quad j = 1, \dots, p. \quad (0.4)$$

Эта конструкция была предложена Ш. Эрмитом [1] в связи с данным им знаменитым доказательством трансцендентности числа e . Для $p = 1$ приближающие

функции (0.2) обычно называются *аппроксимациями Паде*. Соотношения (0.4) приводят к $|\vec{n}|$ однородным линейным уравнениям на $|\vec{n}|+1$ коэффициентов полинома (0.3). Если любой многочлен, удовлетворяющий (0.4), имеет степень $\vec{n}$ (и, таким образом, однозначно определен с точностью до постоянного множителя), то мультииндекс называется *нормальным*, а многочлен $P_{\vec{n}}$ нормируют следующим образом:

$$P_{\vec{n}}(z) = z^{|\vec{n}|} + \dots. \quad (0.5)$$

В частном случае (см. [2]) марковских функций

$$f_j(z) = \int \frac{d\mu_j(x)}{z-x}, \quad j = 1, \dots, p,$$

где μ_j – меры на вещественной оси, знаменатель $P_{\vec{n}}$ аппроксимации Эрмита–Паде (0.2) удовлетворяет соотношениям ортогональности

$$\int P_{\vec{n}}(x) x^k d\mu_j(x) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n_j - 1, \quad j = 1, \dots, p. \quad (0.6)$$

Равенства (0.6) называются соотношениями совместной ортогональности, а $P_{\vec{n}}$ называется *совместно ортогональным многочленом*.

Помимо традиционных приложений к теории диофантовых приближений и приближениям аналитических функций (см. [3]–[5]), аппроксимации Эрмита–Паде и совместно ортогональные многочлены оказались полезны для спектральной теории несимметрических разностных операторов высших порядков (см. [6]–[8]). Недавно была открыта их связь с теорией случайных матриц (см. [9]–[14]).

Ансамбль совместно ортогональных многочленов (СОМ) задается функцией плотности вероятности следующего вида на $\mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{P}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{Z_n} \prod_{j>i} (x_j - x_i) \det[\varphi_i(x_j)]_{i,j=1,\dots,n}, \quad (0.7)$$

где линейная оболочка функций $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ та же, что и у множества

$$\{x^k w_j(x) \mid k = 0, \dots, n_j - 1, j = 1, \dots, p\}.$$

Этот СОМ-ансамбль порожден p весами $w_1, \dots, w_p$ и мультииндексом $\vec{n} = (n_1, \dots, n_p)$. Следовательно, усредненный характеристический многочлен

$$P_{\vec{n}}(z) = \mathbb{E} \left[\prod_{j=1} (z - x_j) \right]$$

(где математическое ожидание берется относительно плотности вероятности (0.7)) удовлетворяет соотношениями совместной ортогональности (0.6) относительно мер $d\mu_j(x) = w_j(x) dx$ (см. [9], [15]). Важные примеры СОМ-ансамблей возникают в теории случайных матриц и в теории непересекающихся случайных путей.

Первая часть работы (глава 1) посвящена аналитическим аспектам рациональных аппроксимаций Эрмита–Паде. Мы излагаем историю вопроса, а также рассматриваем недавние продвижения в этой теории. Одно из них разбирается в разделе 1: это обобщение теоремы Маркова на случай, когда приближаемый набор функций задается с помощью направленных графов, связанных с марковскими (вещественно-аналитическими) функциями. Соответствующий результат берет начало в основополагающей работе А. А. Гончара, Е. А. Рахманова и В. Н. Сорокина [16], где порождающая система функций соответствовала графу-дереву. Задача минимизации функционала энергии исследуется для векторнозначной меры, компоненты которой сосредоточены на некоторой заданной системе отрезков и связаны соотношениями, описываемыми матрицей взаимодействия. Получена слабая асимптотика приближений в терминах решения этой задачи. В настоящей работе (вслед за [17]) мы рассматриваем обобщения на случай, когда порождающий граф может содержать неориентированные циклы, так что задача минимизации рассматривается в классе мер с нефиксированными массами, которые могут “перетекать” от отрезка к отрезку.

Еще одна задача, которая обсуждается в главе 1, – это асимптотика аппроксимаций Эрмита–Паде аналитических функций с точками ветвления в комплексной плоскости. Точнее, в разделе 2 рассматривается асимптотика аппроксимаций Эрмита–Паде ($\vec{n} = (n, n)$) для пары функций f_1, f_2 с ветвлениями в точках $A_1 = \{a_1, b_1\}$ и $A_2 = \{a_2, b_2\}$. Уже в этом простейшем “комплексном” примере возникает множество различных вариантов асимптотического поведения в зависимости от положения пар точек ветвления на комплексной плоскости (см. подробный анализ в [18]). Для изложения здесь мы выбрали одну из конфигураций общего положения точек ветвления. В этом примере главный член асимптотики Эрмита–Паде описывается алгебраической функцией третьего порядка и рода нуль. Мы связываем ее риманову поверхность с задачей равновесия для векторного потенциала, аналогичной задаче равновесия, рассмотренной в предыдущем разделе 1.

Во второй части работы (глава 2) мы приводим обзор недавних исследований СОМ-ансамблей (0.7). В разделе 3 даются основные определения. СОМ-ансамбль является частным случаем детерминантного точечного процесса – случайного точечного процесса, в котором все корреляционные функции (т. е. маргинальные плотности) заданы в виде детерминантов корреляционного ядра. В случае СОМ-ансамбля это ядро выражается комбинацией совместно ортогональных многочленов типов I и II. Формулируется задача Римана–Гильберта для совместно ортогональных многочленов [19], и с помощью формулы Кристоффеля–Дарбу [20] корреляционное ядро выражается через решение задачи Римана–Гильберта.

Остальные разделы посвящены трем конкретным примерам СОМ-ансамблей. В модели случайных матриц с внешним источником возникают совместно ортогональные многочлены с весами вида

$$w_j(x) = e^{-(V(x) - a_j x)}, \quad j = 1, \dots, p,$$

где V – заданная функция, а вещественные числа $a_1 < a_2 < \dots < a_p$ задаются внешним источником. В гауссовом случае, когда $V(x) = x^2/2$, возникает

обобщение многочленов Эрмита – так называемые совместно ортогональные многочлены Эрмита. Мы приводим асимптотику при больших n для гауссовой модели с внешним источником [11], [21], [22] в случае $p = 2$ и даем некоторую информацию о случае более общих V . В последнем случае ключевой оказывается задача векторного равновесия для двух мер при наличии как внешнего поля, так и ограничения сверху. Непересекающиеся случайные пути и двухматричная модель обсуждаются в двух последних разделах. Для непересекающихся квадратичных бесселевых путей и для двухматричной модели приводится векторная задача равновесия, связанная с асимптотикой для больших n .

Подчеркнем, что понятие о векторной задаче равновесия, являющееся мощным инструментом исследования обсуждаемых здесь задач, было впервые сформулировано А. А. Гончаром и Е. А. Рахмановым в 1981 г. в пионерской работе [23] (см. также более общую формулировку в [24]). Авторы посвящают этот обзор 80-летию А. А. Гончара.

Глава 1

Аппроксимации Эрмита–Паде

1. Аппроксимации Эрмита–Паде марковских функций

1.1. Замечания исторического характера. Работа А. А. Маркова [2] была посвящена разложениям в степенные ряды функций

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{z^{k+1}} = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(x)}{z-x}, \quad c_k = \int_{\mathbb{R}} x^k d\mu(x), \quad \mu > 0, \quad (1.1)$$

являющихся преобразованиями Коши положительных мер с компактным носителем. Марков рассмотрел представления $f(z)$ непрерывными дробями

$$f(z) \doteq \frac{c_0}{z - b_0 - \frac{a_1^2}{z - b_1 - \frac{a_2^2}{z - b_2 - \ddots}}} \quad (1.2)$$

и доказал, что подходящие дроби $\pi_n(z)$ разложения (1.2) равномерно сходятся к $f(z)$ на компактных подмножествах комплексной плоскости, лежащих вне отрезка E , содержащего носитель меры:

$$\text{supp } \mu \subset E \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_n(z) = \int \frac{d\mu(x)}{z-x}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus E. \quad (1.3)$$

В теории рациональных приближений функции вида (1.1) называются *марковскими* (в теории операторов они также известны как *резольвентные функции* или *функции Вейля*). Марковские функции образуют класс аналитических функций, полезный при изучении рациональных приближений. Исходной точкой этих исследований является теорема Маркова (1.3). Рациональные функции, полученные усечением непрерывных дробей из (1.2) на конечном

уровне (подходящие дроби), представляют собой частный случай аппроксимаций Паде.

Знаменатель $P_{\vec{n}}$ аппроксимации Эрмита–Паде (0.2)–(0.4) к системе марковских функций

$$f_j(z) = \hat{\mu}_j(z) = \int_{E_j} \frac{d\mu_j(x)}{z - x}, \quad E_j \subset \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, p, \quad (1.4)$$

удовлетворяет следующим соотношениям ортогональности:

$$\int_{E_j} P_{\vec{n}}(x) x^k d\mu_j(x) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n_j - 1, \quad j = 1, \dots, p. \quad (1.5)$$

Многочлены, удовлетворяющие соотношениям (1.5), называются также *совместно ортогональными многочленами*.

В отличие от обычных ортогональных многочленов (при $p = 1$), соотношения ортогональности (1.5) с $p > 1$ не гарантируют нормальности индекса n и, таким образом, не гарантируют существования совместно ортогонального многочлена (0.5) степени $|\vec{n}|$. Про некоторые классы систем марковских функций известно, что их аппроксимации Эрмита–Паде нормальны. Приведем несколько примеров.

Система Анжелеско [25] задается следующим образом:

$$\mathcal{A} : \{\hat{\mu}_j(z)\}_{j=1}^p, \quad \text{supp } \mu_j \subset E_j : \overset{\circ}{E}_k \cap \overset{\circ}{E}_j = \emptyset, \quad k \neq j, \quad k, j = 1, \dots, p. \quad (1.6)$$

Легко убедиться (см. (1.5)), что для системы Анжелеско многочлен $P_{\vec{n}}$ меняет знак n_j раз во внутренней части $\overset{\circ}{E}_j$ отрезка E_j . В силу этого всякий мультииндекс $\vec{n}$ нормален.

Система Никишина [26] задается набором мер

$$\sigma := \{\sigma_j(x)\}_{j=1}^p, \quad \text{supp } \sigma_j \subset E_j, \quad E_j \cap E_{j-1} = \emptyset,$$

с носителями на отрезках $\{E_j\}_{j=1}^p$; в свою очередь этот набор следующим образом задает вектор мер $\mu = \{\mu_j(x)\}_{j=1}^p$:

$$\begin{aligned} d\mu_1(x) &:= d\sigma_1(x), \\ d\mu_2(x) &:= d\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle(x) := \left(\int_{E_2} \frac{d\sigma_2(t)}{x - t} \right) d\sigma_1(x), \\ d\mu_j(x) &:= d\langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_j \rangle := d\langle \sigma_1, \langle \sigma_2, \dots, \sigma_j \rangle \rangle, \quad j = 3, \dots, p. \end{aligned}$$

Следует отметить, что все компоненты μ имеют носители на одном и том же отрезке: $\text{supp } \mu_j \subset E_1$. Система марковских функций $\{\hat{\mu}_j(z)\}_{j=1}^p$, соответствующих вектору μ , называется *системой Никишина*. Таким образом,

$$\mathcal{N} : \{\hat{\mu}_j(z)\}_{j=1}^p, \quad \text{supp } \mu_j \subset E_1, \quad j = 1, \dots, p. \quad (1.7)$$

В случае аппроксимаций Эрмита–Паде системы Никишина общепринятое (см. [26], [27]) условие нормальности мультииндекса $\vec{n}$ выглядит следующим образом:

$$n_k \leq n_j + 1 \quad \text{при } k > j. \quad (1.8)$$

Недавно это условие удалось ослабить, и в [28] было показано, что все индексы $\vec{n}$ – нормальные.

Гончар и Рахманов в [23] получили слабую асимптотику аппроксимаций Эрмита–Паде систем Анжелеско (т. е. их асимптотику корней n -й степени и предельные меры распределения их полюсов). Тем самым был дан ответ на вопрос об их сходимости. Заметим, что сходимость и расходимость для системы Анжелеско (1.6) зависит от конфигурации отрезков $\{E_j\}_{j=1}^p$. Сильные асимптотики аппроксимаций Эрмита–Паде систем Анжелеско (т. е. асимптотика приближающих функций как таковых и определение положения отдельных полюсов для больших $|\vec{n}|$) были получены в [29]. При $p = 2$ сходимость аппроксимаций Эрмита–Паде для систем Никишина (аналог теоремы Маркова (1.3)) была доказана самим Никишиным в [26]. В отличие от систем Анжелеско, аппроксимации Эрмита–Паде систем Никишина всегда сходятся; это было доказано в [30] для произвольных p . Слабая (сильная) асимптотика приближений Эрмита–Паде систем Никишина исследовалась в [31] и [16] (соответственно в [32]).

Обобщенные системы Никишина (так называемые $\mathcal{GN}$ -системы) марковских функций $\{\hat{\mu}_j(z)\}_{j=1}^p$ были введены в [16] с использованием понятия о графе-дереве. Не вдаваясь в определение (способ определения систем марковских функций через графы мы подробно обсудим ниже), заметим, что $\mathcal{GN}$ -системы включают в себя системы Анжелеско и Никишина и некоторые переходные типы. К примеру, для $p = 3$ существуют две такие системы: система

$$\begin{aligned} d\mu_1(x) &:= d\sigma_1(x), & \text{supp } \sigma_1 &\subset E_1, \\ d\mu_2(x) &:= d\langle\sigma_1, \sigma_2\rangle(x) = \left(\int_{E_2} \frac{d\sigma_2(t)}{x-t} \right) d\sigma_1(x), \\ d\mu_3(x) &:= d\langle\sigma_1, \sigma_3\rangle(x) = \left(\int_{E_3} \frac{d\sigma_3(t)}{x-t} \right) d\sigma_1(x) \end{aligned} \quad (1.9)$$

с непересекающимися отрезками $\{E_j\}_{j=1}^3$ и система

$$\begin{aligned} d\mu_1(x) &:= d\sigma_1(x), & \text{supp } \sigma_1 &\subset E_1, \\ d\mu_2(x) &:= d\sigma_2(x), & \text{supp } \sigma_2 &\subset E_2, \\ d\mu_3(x) &:= d\langle\sigma_1, \sigma_3\rangle(x) = \left(\int_{E_3} \frac{d\sigma_3(t)}{x-t} \right) d\sigma_1(x), \end{aligned} \quad (1.10)$$

в которой $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ и $E_1 \cap E_3 = \emptyset$. Что касается аппроксимаций Эрмита–Паде $\mathcal{GN}$ -систем, то условие нормальности мультииндекса $\vec{n}$ (аналогичное (1.8)) было найдено в [16]. В той же работе решена задача о слабой асимптотике.

Аппроксимации Эрмита–Паде конкретных систем марковских функций, связанных с графами, содержащими циклы, исследованы в [3] в связи с приложениями к теории чисел. В настоящем разделе, следуя [17], мы дадим более подробное описание аналитических свойств и асимптотического поведения аппроксимаций Эрмита–Паде общих систем марковских функций, связанных с графами, содержащими циклы.

1.2. Графы и соответствующие системы марковских функций.

Рассмотрим ориентированный граф с множеством вершин $\mathcal{V} := \{A, B, C, \dots\}$, $\#\mathcal{V} = p + 1$, и ребрами $\mathcal{E} := \{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$, $\#\mathcal{E} = m$. Будем предполагать, что

- 1) граф – ациклический (т. е. не содержит ориентированных циклов);
- 2) существует такая вершина O , что для всякой вершины $A \in \mathcal{V}$, отличной от O , имеется ориентированный путь из O в A .

Вершина O единственна в силу условия 1).

Будем обозначать этот граф через

$$\mathcal{G} := \mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E}, O). \quad (1.11)$$

Пусть (A, B) – множество ребер, соединяющих две соседние вершины A и B .

На множестве вершин $\mathcal{V}$ можно следующим образом ввести частичный порядок: будем считать, что $A \preccurlyeq B$, если либо $A = B$, либо существует ориентированный путь из A в B . В последнем случае мы также будем писать $A \prec B$.

Для данной вершины $A \in \mathcal{V}$ пусть

$$A_+ := \{B \in \mathcal{V} : \exists \alpha \in (A, B) \subset \mathcal{E}\} \quad \text{и} \quad A_- := \{B \in \mathcal{V} : \exists \alpha \in (B, A) \subset \mathcal{E}\}$$

– два множества соседних с A вершин; также обозначим через

$$\mathcal{E}_{A+} := \{\alpha \in (A, B) : B \in A_+\} \quad \text{и} \quad \mathcal{E}_{A-} := \{\alpha \in (B, A) : B \in A_-\}$$

множества ребер, выходящих из A и входящих в A . На $\mathcal{E}$ мы вводим следующие соотношения:

$$\alpha \rightarrow \beta \Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{V} : \alpha \in \mathcal{E}_{A-}, \beta \in \mathcal{E}_{A+};$$

$$\alpha \uparrow \uparrow \beta \Leftrightarrow \exists A, B \in \mathcal{V} : \alpha, \beta \in (A, B);$$

$$\alpha \leftrightarrow \beta \Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{V} : \alpha, \beta \in \mathcal{E}_{A-} \text{ или } \alpha, \beta \in \mathcal{E}_{A+}, \text{ но } \alpha \uparrow \uparrow \beta \text{ не выполнено.}$$

Вслед за [16] рассмотрим систему марковских функций, порожденную графом $\mathcal{G}$. Каждому ребру α графа $\mathcal{G}$ сопоставим отрезок $E_\alpha := [a_\alpha, b_\alpha]$ вещественной оси $\mathbb{R}$ и положительную борелевскую меру σ_α с носителем на E_α ; т. е.

$$\forall \alpha \in \mathcal{E} \longrightarrow E_\alpha := [a_\alpha, b_\alpha] \subset \mathbb{R}, \quad \sigma_\alpha : \sigma'_\alpha > 0 \text{ п.в. на } E_\alpha. \quad (1.12)$$

Вдобавок будем предполагать, что если ребра α и β имеют общую вершину, то соответствующие отрезки E_α и E_β не перекрываются:

$$\alpha \rightarrow \beta \vee \beta \rightarrow \alpha \vee \alpha \uparrow \uparrow \beta \vee \alpha \leftrightarrow \beta \Rightarrow E_\alpha \cap E_\beta = \emptyset. \quad (1.13)$$

Всякой вершине $A \in \overset{\circ}{\mathcal{V}} := \mathcal{V} \setminus \{O\}$ соответствует непустое множество $\mathcal{T}_A$ путей $t_A = (\omega, \dots, \beta, \alpha)$ от корня O до вершины A ; т. е.

$$\begin{aligned} \forall A \in \overset{\circ}{\mathcal{V}} &\longrightarrow \mathcal{T}_A := \{t_A\}, \\ t_A := (\omega, \dots, \beta, \alpha) : &\quad \omega \rightarrow \dots \rightarrow \beta \rightarrow \alpha, \quad \omega \in \mathcal{E}_{O+}, \quad \alpha \in \mathcal{E}_{A-}. \end{aligned}$$

Для всякой цепочки путей t_A этого типа по правилу Никишина определяется соответствующая мера μ_{t_A} :

$$\mu_{t_A}(x) = \langle \sigma_\omega, \dots, \sigma_\beta, \sigma_\alpha \rangle(x);$$

здесь

$$d\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle(x) := \left(\int \frac{d\sigma_2(t)}{x-t} \right) d\sigma_1(x), \quad \dots, \quad d\langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_j \rangle := d\langle \sigma_1, \langle \sigma_2, \dots, \sigma_j \rangle \rangle.$$

Всякой вершине A мы также сопоставляем функцию

$$\hat{\mu}_A(x) := \sum_{t_A \in \mathcal{T}_A} \int \frac{d\mu_{t_A}(t)}{x-t}. \quad (1.14)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Семейство функций $\{\hat{\mu}_A(x), A \in \overset{\circ}{\mathcal{V}}\}$ называется *обобщенной системой Никишина* ($\mathcal{GN}$ -системой), соответствующей графу $\mathcal{G}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Понятие обобщенной системы Никишина, соответствующей графу, было введено в [16]. В нашей статье мы обсудим более широкий класс графов, чем в [16], где рассматривались только графы, характеризующиеся условием

$$\mathcal{G}: \quad \forall A \in \overset{\circ}{\mathcal{V}} \quad \Rightarrow \quad \#\mathcal{E}_{A-} = 1. \quad (1.15)$$

Таким образом, обсуждаемый здесь класс $\mathcal{GN}$ -систем шире, чем класс обобщенных систем Никишина из [16], которые соответствуют деревьям.

Приведем примеры $\mathcal{GN}$ -систем. Мы уже отметили, что системы Анжелеско и Никишина являются $\mathcal{GN}$ -системами. Система Анжелеско задается деревом, изображенным на рис. 1a

$$\mathcal{G}: \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}_{O+} \rightarrow \mathcal{A},$$

а система Никишина – деревом, изображенным на рис. 1b:

$$\mathcal{G}: \quad \forall A \in \overset{\circ}{\mathcal{V}} \quad \Rightarrow \quad \#A_- = 1, \quad \#A_+ \leq 1 \quad \rightarrow \quad \mathcal{N}.$$

Примеры графов-деревьев приведены на рис. 2. Графы, задающие системы марковских функций (1.9) и (1.10), изображены на рис. 2a и 2b соответственно.

Примеры графов, содержащих неориентированные циклы, приведены на рис. 3. Граф на рис. 3a задает одну марковскую функцию с носителем меры на нескольких (m) отрезках. Граф на рис. 3b задает две марковские функции. Носитель меры одной из них ($\hat{\mu}_A$) лежит в объединении трех отрезков $E := E_\alpha \cup E_\beta \cup E_\gamma$, а у другой ($\hat{\mu}_B$) носитель принадлежит отрезку E_β ; вдобавок,

$$\begin{aligned} d\mu_B(x) &:= d\sigma_\beta(x), & \text{supp } \sigma_\beta &\subset E_\beta, \\ d\mu_A(x) &:= \begin{cases} d\sigma_\alpha(x) & \text{на } E_\alpha, \\ \left(\int_{E_\delta} \frac{d\sigma_\delta(t)}{x-t} \right) d\sigma_\beta(x) & \text{на } E_\beta, \\ d\sigma_\gamma(x) & \text{на } E_\gamma. \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, графы, содержащие неориентированные циклы, полезны для задания марковских функций, у которых носители мер имеют общие участки

Рис. 1. Графы, задающие системы Анжелеско (рис. а) и Никишина (рис. б)

Рис. 2. Деревья, задающие системы марковских функций (1.9) и (1.10)

(точнее, один из носителей содержит другие), причем на пересечении носителей отношение весов снова является марковской функцией, взятой с какого-то другого отрезка.

Мы будем рассматривать аппроксимации Эрмита–Паде $\mathcal{GN}$ -системы (1.14)

$$\vec{f} := \{\hat{\mu}_A(x), A \in \overset{\circ}{\mathcal{V}}\},$$

соответствующей графу $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E}, O)$ (см. (1.11)). Фиксируем мультииндекс

$$\vec{n} := \{n_A, A \in \overset{\circ}{\mathcal{V}}\}: \quad n_A \leq n_B + 1, \quad \text{если } B \prec A. \quad (1.16)$$

Тогда существует многочлен $P_{\vec{n}} \not\equiv 0$ степени $\deg P_{\vec{n}} \leq |\vec{n}| := \sum_{A \in \overset{\circ}{\mathcal{V}}} n_A$, для которого

$$R_{\vec{n}, A} := P_{\vec{n}} \hat{\mu}_A - Q_{\vec{n}, A} = O(z^{-n_A - 1}), \quad z \rightarrow \infty, \quad A \in \overset{\circ}{\mathcal{V}}, \quad (1.17)$$

где $Q_{\vec{n}, A}$ – некоторые многочлены. Это определение аппроксимаций Эрмита–Паде

$$\left\{ \frac{Q_{\vec{n}, A}}{P_{\vec{n}}}, A \in \overset{\circ}{\mathcal{V}} \right\} \quad (1.18)$$

приводит к следующим соотношениям ортогональности:

$$\sum_{t_A \in \mathcal{T}_A} \int P_{\vec{n}}(x) x^k d\mu_{t_A}(x) = 0, \quad k = 0, \dots, n_A - 1, \quad A \in \overset{\circ}{\mathcal{V}}. \quad (1.19)$$

Рис. 3. Графы, содержащие неориентированные циклы

Для исследования этих аппроксимаций, вдобавок к функциям второго рода $R_{\vec{n},A}$, оказалось полезно рассмотреть функции $\Psi_{\vec{n},A}$, определяемые с помощью индукции по частичному порядку на графе:

$$\Psi_{\vec{n},O} = P_{\vec{n}}, \quad \Psi_{\vec{n},B}(x) = \sum_{A \in B_-} \sum_{\alpha \in (A,B)} \int \frac{\Psi_{\vec{n},A}(t) d\sigma_{\alpha}(t)}{t-x}, \quad B \in \mathring{\mathcal{V}}. \quad (1.20)$$

В [16] стандартное определение (1.8) нормального мультииндекса $\vec{n}$ для системы Никишина было следующим образом обобщено для обобщенной системы Никишина, порождаемой деревом (1.15):

$$n_A \leq n_B + 1, \quad \text{если } B \prec A. \quad (1.21)$$

Там же было показано, что многочлен $P_{\vec{n}}$ имеет $|\vec{n}|$ простых нулей на совокупности отрезков $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{E}_{O+}} E_{\alpha}$. Следовательно, индексы (1.21) нормальные и, значит, аппроксимации Эрмита–Паде однозначно определены.

Для $\mathcal{GN}$ -системы, заданной произвольным графом $\mathcal{G}$ (см. (1.11)), вопросы о нормальности индексов и единственности аппроксимаций требуют дальнейшего изучения. Однако можно показать, что в предположении (1.21) любой такой многочлен $P_{\vec{n}}$ имеет по крайней мере $|\vec{n}| - g$ простых нулей на объединении $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{E}_{O+}} E_{\alpha}$, где g – цикломатическое число $\mathcal{G}$ (число независимых неориентированных циклов), т. е.

$$g = \#\mathcal{E} - \#\mathcal{V} + 1. \quad (1.22)$$

Некоторые дальнейшие выводы относительно нормальности и единственности аппроксимаций Эрмита–Паде произвольных $\mathcal{GN}$ -систем будут сформулированы ниже в качестве следствий асимптотических результатов.

Пусть

$$v = \{v_A, A \in \mathring{\mathcal{V}}\}, \quad \text{где } v_A > 0, \quad A \in \mathring{\mathcal{V}}, \quad \sum_{A \in \mathring{\mathcal{V}}} v_A = 1, \quad v_B \leq v_A, \quad \text{если } A \prec B,$$

– заданное распределение вероятностей на $\mathcal{V}$. Рассмотрим последовательность $\mathbf{N}$ мультииндексов $\vec{n} = \{n_A, A \in \overset{\circ}{\mathcal{V}}\}$, для которой выполнено (1.21) и

$$\frac{n_A}{|\vec{n}|} \rightarrow v_A, \quad A \in \overset{\circ}{\mathcal{V}}. \quad (1.23)$$

В настоящем разделе мы проанализируем асимптотическое поведение $P_{\vec{n}}$ для $\vec{n} \in \mathbf{N}$.

1.3. Слабая асимптотика. Под слабой асимптотикой мы будем понимать предельное распределение нулей многочлена $P_{\vec{n}}$ и функций $\Psi_{\vec{n},A}$ из (1.20). Возможный подход к таким задачам был предложен А. А. Гончаром и Е. А. Рахмановым [23]. На примере системы Анжелеско они показали, что компоненты предельной меры распределения нулей $P_{\vec{n}}$ (имеющие носители на отрезках $\{E_j\}_{j=1}^p$, из (1.6)) должны быть компонентами экстремальной меры в задаче о минимизации функционала энергии векторнозначной меры с некоторой матрицей взаимодействия компонент меры (см. подробности ниже). В работе А. А. Гончара, Е. А. Рахманова и В. Н. Сорокина [16] такой подход был распространен на обобщенные системы Никишина, заданные деревьями (1.15). Это позволило расширить класс рассматриваемых матриц взаимодействия. Следуя [17], мы адаптируем этот подход к произвольным $\mathcal{GN}$ -системам (1.14). Здесь новым моментом (вдобавок к уже отмеченному расширению класса матриц взаимодействия) является рассмотрение экстремальной задачи о минимизации функционала энергии в классе векторнозначных мер с компонентами, массы которых не фиксированы (как раньше), но удовлетворяют некоторым ограничениям. Постановка общей задачи этого типа приводится в п. 1.3.1, где мы также сформулируем теорему 1.1 о существовании, единственности и других свойствах экстремальной векторной меры. Затем в п. 1.3.2 мы конкретизируем матрицы взаимодействия и линейные соотношения в общей экстремальной задаче применительно к массам компонент векторных мер, соответствующих произвольному графу вида (1.11). Мы также формулируем теорему 1.2 о предельном распределении нулей полинома $P_{\vec{n}}$ и его преобразований и многократных преобразований Коши и приводим следствие, относящееся к слабой асимптотике аппроксимаций Эрмита–Паде.

1.3.1. Равновесие потенциалов векторных мер с матрицами взаимодействия и линейными соотношениями между массами. Начнем с постановки общей задачи минимизации энергии для векторнозначной меры, массы компонент которой удовлетворяют некоторым линейным условиям. В качестве начальных данных в задаче мы имеем: семейство регулярных компактных подмножеств комплексной плоскости

$$\vec{E} = (E_1, \dots, E_m) \in \mathbb{C}^m,$$

вещественную симметрическую неотрицательно определенную матрицу

$$\mathcal{A} = (a_{kj})_{k,j=1}^m \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad \mathcal{A} \geq 0,$$

вещественную $(r \times m)$ -матрицу ранга r

$$\mathcal{C} = (c_{kj})_{k,j=1}^{r,m} \in \mathbb{R}^{r \times m}, \quad \text{rank } \mathcal{C} = r,$$

и ненулевой вектор

$$b = (b_1, \dots, b_r) \in \mathbb{R}^r, \quad b \neq 0.$$

Будем также предполагать, что начальные данные удовлетворяют следующим условиям:

$$1) a_{jj} > 0; \quad 2) a_{kj} = 0 \text{ при } k \neq j \text{ и } E_k \cap E_j \neq \emptyset, \quad k, j = 1, \dots, m; \quad (1.24)$$

мы также предполагаем, что многогранник

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^m : \sum_{j=1}^m c_{kj} x_j = b_k, \quad k = 1, \dots, r; \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, m \right\} \quad (1.25)$$

ограничен и непуст.

Нам требуются некоторые обозначения из теории потенциала. Для компакта $K \subset \mathbb{C}$ пусть $\mathbf{M}(K)$ – множество зарядов конечной вариации, а $\mathbf{M}^+(K)$ – множество конечных положительных борелевских мер ν с носителем $S(\nu)$ в K . Функцию

$$V^\nu(z) = \int_K \ln \frac{1}{|z-t|} d\nu(t), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (1.26)$$

называют логарифмическим потенциалом меры ν ; интеграл

$$I(\nu_1, \nu_2) = \iint_{K \times K} \ln \frac{1}{|x-t|} d\nu_1(x) d\nu_2(t) \quad (1.27)$$

называется энергией взаимодействия мер ν_1 и ν_2 . Полная вариация (масса) меры ν обозначается через $|\nu|$.

Для конечного набора компактов E определим $\mathbf{M}^+(\vec{E})$ как прямое произведение множеств $\mathbf{M}^+(E_j)$ по всем $j = 1, \dots, m$. Таким образом, элемент μ множества $\mathbf{M}^+(\vec{E})$ – это набор конечных мер μ_j с носителями $S(\mu_j) \subset E_j$.

Если фиксированы мера $\mu \in \mathbf{M}^+(\vec{E})$ и матрица взаимодействия $\mathcal{A}$, то функционал энергии $J(\mu)$ и векторный потенциал $W^\mu = (W_1^\mu, \dots, W_m^\mu)$ определены следующим образом:

$$J(\mu) = \sum_{k,j=1}^m a_{kj} I(\mu_k, \mu_j) \quad \text{и} \quad W_k^\mu(x) = \sum_{j=1}^m a_{kj} V^{\mu_j}(x). \quad (1.28)$$

Наконец, введем класс мер с массами компонент, удовлетворяющими линейным соотношениям (зависящим от начальных параметров $\mathcal{C}$ и b):

$$\mathbf{M}_{\mathcal{C},b}^+(\vec{E}) := \left\{ \mu \in \mathbf{M}^+(\vec{E}) : \sum_{j=1}^m c_{kj} |\mu_j| = b_k, \quad k = 1, \dots, r \right\}, \quad (1.29)$$

и рассмотрим следующую задачу о минимизации энергии:

$$\begin{cases} J(\mu) \rightarrow \min, \\ \mu \in \mathbf{M}_{\mathcal{C},b}^+(\vec{E}). \end{cases} \quad (1.30)$$

Имеет место следующий результат (см. [17]).

ТЕОРЕМА 1.1. 1) Существует единственная мера λ , называемая экстремальной, являющаяся решением задачи (1.30) (так что она минимизирует функционал (1.28) и массы ее компонент удовлетворяют линейным соотношениям (1.29)).

2а) Существует набор констант $(l_1, \dots, l_r)$, для которых экстремальная мера λ доставляет минимум лагранжиану:

$$\begin{cases} \mathcal{L}(\mu) := J(\mu) + \sum_{k=1}^r l_k \sum_{j=1}^m c_{kj} |\mu_j| \rightarrow \min, \\ \mu \in \mathbf{M}^+(\vec{E}). \end{cases} \quad (1.31)$$

2б) Если мера $\lambda \in \mathbf{M}_{\mathcal{C},b}^+(\vec{E})$ решает задачу (1.31) для некоторого набора констант $l_1, \dots, l_r$, то λ является экстремальной мерой.

3) Экстремальная мера λ – единственная мера в классе (1.29), удовлетворяющая следующим условиям равновесия с ограничениями на константы равновесия:

$$\begin{cases} W_k^\lambda(x) := \sum_{j=1}^m a_{kj} V^{\lambda_j}(x) \begin{cases} = \varkappa_k, & x \in S(\lambda_k), \\ \geq \varkappa_k, & x \in E_k, \end{cases} & k = 1, \dots, m, \\ (\varkappa_1, \dots, \varkappa_m) \in \text{Im } \mathcal{C}^T. \end{cases} \quad (1.32)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Стоит отметить, что линейные соотношения между массами компонент векторнозначных мер (1.29) в теореме 1.1 трансформируются в линейные соотношения между константами равновесия $(\varkappa_1, \dots, \varkappa_m)$ из (1.32). Иными словами, если мерам (с начальными данными $\mathcal{C}$ и b) разрешено “перетекать” между компактами $E_1, \dots, E_m$, то на константы равновесия должны быть наложены дополнительные ограничения.

Это замечание можно проиллюстрировать на простейшем примере. Допустим, что начальные данные соответствуют равновесной мере, сосредоточенной на двух непересекающихся отрезках, т. е.

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C} := \|1, 1\|, \quad b := 1, \quad E_1 \cap E_2 = \emptyset.$$

Ясно, что тогда

$$W_k^\lambda(x) := V^{\lambda_1}(x) + V^{\lambda_2}(x) = \varkappa_k, \quad k = 1, 2, \quad x \in E_1 \cup E_2, \quad \Rightarrow \quad \varkappa_1 = \varkappa_2.$$

Заметим, что экстремальные задачи (1.30) с массами, удовлетворяющими линейным ограничениям (впервые введенные в [18]), являются ключом к изучению асимптотического поведения аппроксимаций Эрмита–Паде для общих классов аналитических функций с ветвлениями (см. [33]).

1.3.2. *Задача равновесия для графов и предельное распределение полюсов аппроксимаций.* В общей экстремальной задаче (1.30) мы конкретизируем матрицы взаимодействия (1.28) и линейные связи между массами компонент векторных мер (1.29); в свою очередь эти компоненты соответствуют предельным

мерам распределения полюсов аппроксимаций Эрмита–Паде и нулей функций (1.20) для системы марковских функций (1.14), заданной произвольным графом (1.11). По графу $\mathcal{G}$ мы следующим образом строим симметрическую матрицу $\mathcal{A} = (a_{\alpha\beta})$:

$$a_{\alpha\beta} = \begin{cases} 2, & \text{если } \alpha = \beta \text{ или } \alpha \uparrow \uparrow \beta, \\ 1, & \text{если } \alpha \leftrightarrow \beta, \\ -1, & \text{если } \alpha \rightarrow \beta \text{ или } \beta \rightarrow \alpha, \\ 0, & \text{если у ребер } \alpha \text{ и } \beta \text{ нет общих вершин.} \end{cases} \quad (1.33)$$

На вариации мер вводятся следующие ограничения:

$$\left\{ \mu \in \mathbf{M}^+(\vec{E}) : \sum_{\alpha \in \mathcal{E}_{A-}} |\mu_\alpha| - \sum_{\beta \in \mathcal{E}_{A+}} |\mu_\beta| = v_A, \quad A \in \overset{\circ}{\mathcal{V}} \right\}; \quad (1.34)$$

здесь $\{v_A > 0, A \in \overset{\circ}{\mathcal{V}}\}$ с $\sum v_A = 1$ заданы в (1.23) и сумма по пустому множеству индексов считается равной нулю по определению.

Матрица $\mathcal{A}$ неотрицательно определена. Это можно видеть либо из того, что $\mathcal{A}$ – матрица Грама $a_{\alpha\beta} = (e_{A_2} - e_{A_1}, e_{B_2} - e_{B_1})$, где $\alpha \in (A_1, A_2)$, $\beta \in (B_1, B_2)$, а $\{e_A, A \in \mathcal{V}\}$ – стандартный базис в $\mathbb{R}^{p+1}$, либо из равенства

$$\sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{E}} a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta = \sum_{A \in \mathcal{V}} \left(\sum_{\alpha \in \mathcal{E}_{A-}} x_\alpha - \sum_{\beta \in \mathcal{E}_{A+}} x_\beta \right)^2.$$

Прочие условия на матрицу $\mathcal{A}$ из п 1.3.1, как и соотношения (1.29), проверяются легко.

Итак, существует единственная мера $\lambda = \{\lambda_\alpha, \alpha \in \mathcal{E}\}$ из класса (1.29), которая удовлетворяет соотношениям равновесия (1.32), т. е.

$$W_\alpha^\lambda(x) := \sum_{\beta \in \mathcal{E}} a_{\alpha\beta} V^{\lambda_\beta}(x) \begin{cases} = \tilde{\kappa}_B - \tilde{\kappa}_A, & x \in S(\lambda_\alpha), \\ \geq \tilde{\kappa}_B - \tilde{\kappa}_A, & x \in E_\alpha, \end{cases} \quad (1.35)$$

где $\alpha \in (A, B) \subset \mathcal{E}$, а $\{\tilde{\kappa}_A, A \in \mathcal{V}\}$ – некоторый набор констант, приписанных вершинам графа. В результате на константы равновесия $\kappa_\alpha := \tilde{\kappa}_B - \tilde{\kappa}_A$ наложено g линейных соотношений и можно положить $\tilde{\kappa}_O = 0$.

Предельные распределения нулей многочленов $P_{\vec{n}}$ и функций $\Psi_{\vec{n}, A}$ из (1.20) выражаются через экстремальную меру λ . Пусть $\alpha \in (A, B)$, а $q_{\vec{n}, \alpha}$ – многочлен с нулями, совпадающими с нулями $\Psi_{\vec{n}, A}$, лежащими на отрезке E_α :

$$q_{\vec{n}, \alpha}(z) := \prod_{x: \Psi_{\vec{n}, A}(x)=0, x \in E_\alpha} (z - x) \quad (\text{по определению } \prod_{x \in \emptyset} (z - x) := 1). \quad (1.36)$$

Пусть $\mu(q)$ – дискретная мера полной массы $\deg q$, равномерно распределенная между нулями q :

$$\mu(q) = \sum_{x: q(x)=0} \delta_x.$$

Имеет место следующий результат (см. [17]).

ТЕОРЕМА 1.2. Для любого $\alpha \in \mathcal{E}$ и $\vec{n} \in \mathbf{N}$ выполняется предельное соотношение

$$\frac{1}{|\vec{n}|} \mu(q_{\vec{n}, \alpha}) \rightarrow \lambda_\alpha$$

(см. (1.23)). В частности,

$$\frac{1}{|\vec{n}|} \mu(P_{\vec{n}}) \rightarrow \sum_{\alpha \in O_+} \lambda_\alpha.$$

Если нам удастся показать, что у функций $\Psi_{\vec{n}, A} \left(\prod_{\alpha \in A_+} q_{\vec{n}, \alpha} \right)^{-1}$ нет нулей вне $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{E}_{A+}} E_\alpha$, то мы установим асимптотику $\Psi_{\vec{n}, A}$. К примеру, это условие выполнено, когда $\mathcal{G}$ – это дерево. У теоремы 1.2 имеется следствие (в формулировке которого мы считаем, что $P_{\vec{n}}$ – нормированный многочлен со старшим коэффициентом 1).

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Предположим, что $\Psi_{\vec{n}, A}(x) \neq 0$ при $x \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{\alpha \in \mathcal{E}_A - \cup \mathcal{E}_{A+}} E_\alpha$,

где $A \in \mathcal{V}$, а $\tilde{\mathbf{N}} \subset \mathbf{N}$ – некоторая подпоследовательность. Тогда выполняется асимптотическое соотношение

$$\lim_{\vec{n} \in \tilde{\mathbf{N}}} \frac{1}{|\vec{n}|} \ln |\Psi_{\vec{n}, A}(x)| = \sum_{\alpha \in \mathcal{E}_{A-}} V^{\lambda_\alpha}(x) - \sum_{\alpha \in \mathcal{E}_{A+}} V^{\lambda_\alpha}(x) - \tilde{\varkappa}_A,$$

$$x \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{\alpha \in \mathcal{E}_A - \cup \mathcal{E}_{A+}} E_\alpha.$$

В частности,

$$\lim_{\vec{n} \in \tilde{\mathbf{N}}} \frac{1}{|\vec{n}|} \ln |P_{\vec{n}}(x)| = - \sum_{\alpha \in \mathcal{E}_{O+}} V^{\lambda_\alpha}(x), \quad x \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{\alpha \in \mathcal{E}_{O+}} E_\alpha.$$

1.4. Доказательство теоремы 1.1. 1) Нам потребуются некоторые свойства функционала энергии; их доказательство можно найти в [34].

Во-первых, для функционала энергии $I(\cdot)$ справедлив принцип понижения: если $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} I(\mu_n) \geq I(\mu)$.

Функционал $I(\cdot, \cdot)$ – билинейная форма на линейном пространстве $\mathbf{M}(K)$ знакопеременных зарядов $\delta = \delta_+ - \delta_-$ с носителем на компактном множестве K , удовлетворяющих условию $I(\delta_+ + \delta_-) < \infty$. Еще одно свойство, которое нам потребуется, – это положительная определенность этой формы. Точнее, если $K \subset \{z: |z| < 1\}$ (это ограничение технического характера), то $I(\delta) \geq 0$ для всякого заряда $\delta \in \mathbf{M}(K)$; более того, если $I(\delta) = 0$, то $\delta = 0$. Иными словами, $I(\cdot, \cdot)$ задает скалярное произведение на $\mathbf{M}(K)$ по формуле $(\delta_1, \delta_2) := I(\delta_1, \delta_2)$.

Докажем существование экстремальной меры. Принцип понижения верен и для функционала $J(\mu) = \sum_{k, j} a_{kj} I(\mu^k, \mu^j)$, поскольку он выполняется для

$a_{jj} I(\mu^j)$, а внедиагональные члены непрерывны, так как $E_k \cap E_j = \emptyset$ при $a_{kj} \neq 0$ (см. (1.24)).

Пусть $\mu_n \in \mathbf{M}_{\mathcal{E},b}^+(\vec{E}) = \left\{ \mu \in \mathbf{M}^+(\vec{E}) : \sum_{j=1}^m c_{kj} |\mu_j| = b_k, \quad k = 1, \dots, r \right\}$ – минимизирующая последовательность, т. е.

$$J(\mu_n) \rightarrow J_0 := \inf \{ J(\mu) : \mu \in \mathbf{M}_{\mathcal{E},b}^+(\vec{E}) \}.$$

Поскольку (1.25) – ограниченный многогранник, массы мер из $\mathbf{M}_{\mathcal{E},b}^+(\vec{E})$ также ограничены; значит, множество $\mathbf{M}_{\mathcal{E},b}^+(\vec{E})$ компактно в слабой топологии. Из последовательности μ_n выберем сходящуюся подпоследовательность $\mu_{n_k} \rightarrow \lambda \in \mathbf{M}_{\mathcal{E},b}^+(\vec{E})$, $n \in \Lambda$. С одной стороны, $J(\lambda) \geq J_0$. С другой, $J_0 \geq J(\lambda)$ в силу полунепрерывности. Значит, λ – экстремальная мера.

Для проверки единственности заметим, что $J(\mu)$ – выпуклый функционал, поскольку матрица $\mathcal{A}$ неотрицательно определена. Если бы имелись две экстремальные меры λ и λ' , то $(\lambda + \lambda')/2$ тоже была бы экстремальной мерой: $J((\lambda + \lambda')/2) \leq (J(\lambda) + J(\lambda'))/2 = J_0$. Однако $J(\lambda - \lambda') + J(\lambda + \lambda') = 2J(\lambda) + 2J(\lambda')$, так что $J(\lambda - \lambda') = 0$ и потому $(\lambda - \lambda')\mathcal{A} = 0$. Рассмотрим заряд $\nu = \lambda - \lambda'$: $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_m)$, $S(\nu_k) \subset E_k$, $k = 1, \dots, m$. Поскольку $\nu\mathcal{A} = 0$, то для всех k имеем

$$-a_{kk}\nu_k = \sum_{j=1, j \neq k}^m a_{kj}\nu_j. \quad (1.37)$$

В последней сумме либо $a_{kj} = 0$, либо $E_k \cap E_j = \emptyset$ (см. (1.24)). Значит, в (1.37) у зарядов справа и слева носители не пересекаются и $a_{kk}\nu_k = 0$. Так как $a_{kk} > 0$, получаем $\nu_k = 0$. В результате $\lambda = \lambda'$, и экстремальная мера должна быть единственной, что доказывает утверждение 1) теоремы 1.1.

2) По существу, утверждения 2а) и 2б) – просто варианты теоремы Куна–Таккера [35]. Покажем это.

Пусть λ – экстремальная мера. Допустим, что $J(\lambda) = J_0$ и рассмотрим следующее подмножество $\mathbb{R}^{r+1}$:

$$\Xi := \left\{ (t_0, \dots, t_r) =: \mathbf{t} \mid \exists \mu \in \mathbf{M}^+(E) : J(\mu) \leq t_0 + J_0, \right. \\ \left. \sum_{j=1}^m c_{kj} |\mu_j| = b_k + t_k, \quad k = 1, \dots, r \right\}.$$

Легко проверяется, что оно непусто, выпукло и не пересекается с лучом

$$\Upsilon := \{(\omega_0, 0, \dots, 0) : \omega_0 < 0\}.$$

По конечномерной теореме отделимости существует отличный от нуля вектор $(l_0, l_1, \dots, l_r) \in \mathbb{R}^{r+1}$, для которого

$$\inf_{\Xi} \sum_{j=0}^r l_j t_j \geq \sup_{\omega_0 < 0} l_0 \omega_0 \geq 0,$$

так что

$$\sum_{j=0}^r l_j t_j \geq 0 \quad \forall \mathbf{t} \in \Xi. \quad (1.38)$$

Докажем, что $l_0 > 0$. Подстановка $(1, 0, \dots, 0) \in \Xi$ в (1.38) показывает, что $l_0 \geq 0$. Пусть $l_0 = 0$. Тогда для всякого $x \in \mathbb{R}_+^m$

$$\sum_{k=1}^r l_k \sum_j c_{kj} x_j \geq \sum_{k=1}^r l_k \sum_j c_{kj} |\lambda_j|.$$

Следовательно, $\sum_{k=1}^r l_k \sum_j c_{kj} |\lambda_j| = 0$ и $\sum_{k=1}^r l_k c_{kj} \geq 0$ для всякого j . Но это возможно только при $l_1 = \dots = l_r = 0$, что противоречит предположению $l \neq 0$. Значит, $l_0 > 0$, и мы можем считать, что $l_0 = 1$.

Пусть теперь $\mu \in \mathbf{M}^+(\vec{E})$. Тогда

$$J(\mu) - J_0 + \sum_k l_k \left(\sum_j c_{kj} |\mu_j| - b_k \right) \geq 0,$$

т. е. $\mathcal{L}(\mu) \geq \mathcal{L}(\lambda)$.

Наоборот, если для $\lambda \in \mathbf{M}_{\mathcal{E},b}^+(\vec{E})$ выполнено

$$\mathcal{L}(\mu) \geq \mathcal{L}(\lambda) \quad \forall \mu \in \mathbf{M}^+(\vec{E}),$$

то для всякой $\mu \in \mathbf{M}_{\mathcal{E},b}^+(\vec{E})$ получаем $J(\mu) \geq J(\lambda)$. Это доказывает утверждение 2).

3) Докажем, что условия равновесия (1.32) эквивалентны задаче о минимизации лагранжиана (1.31).

Допустим, что для некоторой меры $\lambda \in \mathbf{M}_{\mathcal{E},b}^+(\vec{E})$

$$\mathcal{L}(\lambda) \leq \mathcal{L}(\mu) \quad \forall \mu \in \mathbf{M}^+(\vec{E}), \quad (1.39)$$

и рассмотрим заряд $\nu^{(k)} = (0, \dots, \nu, \dots, 0) \in \mathbf{M}^+(\vec{E})$, у которого только k -я компонента ненулевая. Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\lambda + \varepsilon \nu^{(k)}) - \mathcal{L}(\lambda) &= 2\varepsilon \sum_j a_{kj} I(\lambda_j, \nu) + \varepsilon \sum_j l_j c_{jk} |\nu| + O(\varepsilon^2) \\ &= \varepsilon \int \left(2W_k^\lambda + \sum_j l_j c_{jk} \right) d\nu + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Положим

$$\varkappa_k = -\frac{1}{2} \sum_j l_j c_{jk}. \quad (1.40)$$

Мы покажем, что $W_k^\lambda \geq \varkappa_k$ на E_k . Поскольку выражение $W_k^\lambda - a_{kk} V^{\lambda_k}$ непрерывно на регулярном компакте E_k , достаточно показать, что $W_k^\lambda \geq \varkappa_k$ квазिवсюду на E_k . Предположим противное – что существует множество $E \subset E_k$, $\text{cap } E > 0$, на котором $W_k^\lambda < \varkappa_k$, и рассмотрим (скалярную) положительную меру $\nu \in \mathbf{M}^+(E_k)$. Тогда $\mathcal{L}(\lambda + \varepsilon \nu^{(k)}) - \mathcal{L}(\lambda) < 0$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$, что противоречит (1.39). Теперь пусть $W_k^\lambda(x_0) > \varkappa_k$ в точке $x_0 \in S(\lambda_k)$. Тогда, поскольку W_k^λ полунепрерывен снизу, существует окрестность $U(x_0)$, в которой $W_k^\lambda > \varkappa_k$. Итак, $\lambda(U(x_0)) > 0$, поскольку $x_0 \in S(\lambda_k)$. Выберем теперь отрицательную меру ν с носителем в $U(x_0)$ и выберем $\varepsilon > 0$, для которого $\lambda_k + \varepsilon \nu$ – положительная мера. Снова получаем противоречие с (1.39).

Наоборот, допустим, что выполнены соотношения равновесия (1.32). Тогда известны константы $l_1, \dots, l_r$, удовлетворяющие (1.40). Пусть $\mathcal{L}(\mu) < \mathcal{L}(\lambda)$ для некоторой меры $\mu \in \mathbf{M}^+(\vec{E})$. В силу выпуклости $\mathcal{L}((1 - \varepsilon)\lambda + \varepsilon\mu) < \mathcal{L}(\lambda)$, и мы имеем $(1 - \varepsilon)\lambda + \varepsilon\mu \in \mathbf{M}^+(\vec{E})$. Значит, у $\mathcal{L}$ производная в λ по направлению $\mu - \lambda$ отрицательна, т. е.

$$2 \sum_{j,k} a_{jk} I(\lambda_j, \mu_k - \lambda_k) + \sum_j l_j \sum_k c_{jk} (|\mu_k| - |\lambda_k|) < 0.$$

Это неравенство выполняется, только когда

$$2 \sum_{j,k} a_{jk} I(\lambda_j, \mu_k) + \sum_j l_j \sum_k c_{jk} (|\mu_k|) < \mathcal{L}(\lambda). \quad (1.41)$$

Интегрируя k -е условие равновесия по λ_k и суммируя по k , получим $\mathcal{L}(\lambda) = 0$. Интегрируя k -е условие равновесия по μ_k , получим

$$2 \sum_j a_{jk} I(\lambda_j, \mu_k) + \sum_j l_j c_{jk} (|\mu_k|) \geq 0,$$

так что, суммируя по k , приходим к противоречию с (1.41). Теорема 1.1 доказана.

1.5. Пример. Треугольный граф. В задаче Эрмита–Паде для системы функций на произвольном графе возникают новые эффекты, которые не проявляются для деревьев. К примеру, функционал энергии может достигать минимума на границе допустимого множества мер, т. е. некоторые компоненты экстремальной меры могут быть нулевыми.

Следуя [17] (см. также [36]), рассмотрим граф с вершинами A, B, O (O – корень), соединенными тремя ребрами α, β, γ (см. рис. 4). Ребрам графа сопоставляются неперекрывающиеся отрезки $E_\alpha, E_\beta, E_\gamma$ на вещественной оси. На этих отрезках заданы положительные борелевские меры $\sigma_\alpha, \sigma_\beta$ и σ_γ ,

Рис. 4. Треугольный граф

у которых производные абсолютно непрерывных компонент относительно меры Лебега σ'_κ , $\kappa \in \mathcal{E} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, удовлетворяют условию $\sigma'_\kappa > 0$ п. в. на E_κ .

Вершинам A и B этого графа соответствует обобщенная система функций Никишина

$$f_A(z) = \hat{\sigma}_\alpha(z) + \int_{E_\beta} \frac{\hat{\sigma}_\gamma(x) d\sigma_\beta(x)}{z - x}, \quad (1.42)$$

$$f_B(z) = \hat{\sigma}_\beta(z); \quad (1.43)$$

$$\text{здесь } \hat{\sigma}_\kappa(x) = \int_{E_\kappa} \frac{d\sigma_\kappa(t)}{x - t}.$$

Для заданного диагонального мультииндекса (n, n) рассмотрим аппроксимации Эрмита–Паде этой системы; они являются рациональными функциями $(Q_{n,A}/P_n, Q_{n,B}/P_n)$ с общим знаменателем P_n степени $\deg P_n \leq 2n$, для которых

$$R_{n,A} := f_A P_n - Q_{n,A} = O(z^{-n-1}), \quad (1.44)$$

$$R_{n,B} := f_B P_n - Q_{n,B} = O(z^{-n-1}) \quad (1.45)$$

при $z \rightarrow \infty$. Это эквивалентно условиям ортогональности для $j = 0, \dots, n-1$:

$$\int P_n(x) x^j d\sigma_\alpha(x) + \int P_n(x) x^j \hat{\sigma}_\gamma(x) d\sigma_\beta(x) = 0, \quad (1.46)$$

$$\int P_n(x) x^j d\sigma_\beta(x) = 0. \quad (1.47)$$

Получаем следующие соотношения на функцию второго рода $R_{n,B}$:

$$\int R_{n,B}(x) x^j d\sigma_\gamma(x) = - \int P_n(x) x^j \hat{\sigma}_\gamma(x) d\sigma_\beta(x), \quad j = 0, \dots, n. \quad (1.48)$$

В самом деле, в силу соотношений ортогональности (1.47) и теоремы Фубини,

$$\begin{aligned} \int_{E_\gamma} R_{n,B}(x) x^j d\sigma_\gamma(x) &= \int_{E_\gamma} \int_{E_\beta} \frac{P_n(t) d\sigma_\beta(t)}{x - t} x^j d\sigma_\gamma(x) \\ &= \int_{E_\gamma} \int_{E_\beta} P_n(t) \frac{x^j - t^j}{x - t} d\sigma_\beta(t) d\sigma_\gamma(x) + \int_{E_\gamma} \int_{E_\beta} \frac{P_n(t) t^j d\sigma_\beta(t)}{x - t} d\sigma_\gamma(x) \\ &= \int_{E_\gamma} \frac{d\sigma_\gamma(x)}{x - t} P_n(t) t^j d\sigma_\beta(t) = - \int_{E_\beta} P_n(t) t^j \hat{\sigma}_\gamma(t) d\sigma_\beta(t). \end{aligned} \quad (1.49)$$

Значит,

$$\int P_n(x) x^j d\sigma_\alpha(x) - \int R_{n,B}(x) x^j d\sigma_\gamma(x) = 0, \quad j = 0, \dots, n-1. \quad (1.50)$$

Пусть $p_{n,\gamma}$ – нормализованный многочлен (со старшим коэффициентом 1), построенный по нулям $R_{n,B}$ на E_γ (если таковых нет, то полагаем $p_{n,\gamma} = 1$), и $m_\gamma = \deg p_{n,\gamma}$. Используя интегральную формулу Коши, из (1.45) получаем

$$\int_{E_\beta} P_n(x) x^j \frac{d\sigma_\beta(x)}{p_{n,\gamma}(x)} = 0, \quad j = 0, \dots, m_\gamma + n - 1, \quad (1.51)$$

так что

$$\frac{R_{n,B}(z)}{p_{n,\gamma}(z)} = \int \frac{P_n(x) d\sigma_\beta(x)}{(z-x)p_{n,\gamma}(x)}. \quad (1.52)$$

Пусть $p_{n,\alpha}$ и $p_{n,\beta}$ – полиномы (степеней m_α и m_β), построенные по нулям P_n , лежащим на отрезках E_α и E_β соответственно. Тогда из условий (1.50) и (1.51) с необходимостью следует, что $m_\alpha + m_\gamma \geq n - 1$ и $m_\beta \geq m_\gamma + n$. Значит, $m_\alpha + m_\beta \geq 2n - 1$. Запишем соотношения ортогональности (1.50) следующим образом:

$$\int_{E_\alpha} p_{n,\alpha}(x)p_{n,\gamma}(x)x^j \frac{P_n(x) d\sigma_\alpha(x)}{p_{n,\alpha}(x)p_{n,\gamma}(x)} - \int_{E_\gamma} p_{n,\alpha}(x)p_{n,\gamma}(x)x^j \frac{R_{n,B}(x) d\sigma_\gamma(x)}{p_{n,\gamma}(x)p_{n,\alpha}(x)} = 0. \quad (1.53)$$

Пусть $\mu_{n,\alpha}$, $\mu_{n,\beta}$ и $\mu_{n,\gamma}$ – считающие меры нулей полиномов $p_{n,\alpha}$, $p_{n,\beta}$ и $p_{n,\gamma}$. Рассмотрим подпоследовательность $\Lambda \subset \mathbb{N}$, по которой есть слабые пределы $\mu_{n,\alpha}/n \rightarrow \lambda_\alpha$, $\mu_{n,\beta}/n \rightarrow \lambda_\beta$, $\mu_{n,\gamma}/n \rightarrow \lambda_\gamma$. По теореме Гончара–Рахманова о слабой асимптотике полиномов, ортогональных с переменным весом (см. [37], [16]), используя условия ортогональности (1.53) и (1.51) и представления (1.52), получаем следующие соотношения равновесия для потенциалов предельных мер:

$$2V^{\lambda_\alpha}(x) + V^{\lambda_\beta}(x) + V^{\lambda_\gamma}(x) \begin{cases} = \kappa_\alpha, & x \in S(\lambda_\alpha), \\ \geq \kappa_\alpha, & x \in E_\alpha, \end{cases} \quad (1.54)$$

$$2V^{\lambda_\beta}(x) + V^{\lambda_\alpha}(x) - V^{\lambda_\gamma}(x) \begin{cases} = \kappa_\beta, & x \in S(\lambda_\beta), \\ \geq \kappa_\beta, & x \in E_\beta, \end{cases} \quad (1.55)$$

$$2V^{\lambda_\gamma}(x) + V^{\lambda_\alpha}(x) - V^{\lambda_\beta}(x) \begin{cases} = \kappa_\gamma := \kappa_\alpha - \kappa_\beta, & x \in S(\lambda_\gamma), \\ \geq \kappa_\gamma, & x \in E_\gamma. \end{cases} \quad (1.56)$$

Действительно, соотношение (1.55) следует из (1.51), соотношение (1.54) следует из равенства (1.53) на отрезке E_α , а соотношение (1.56) следует из (1.53) на отрезке E_γ ; здесь надо учитывать асимптотику

$$\frac{1}{n} \ln \left| \frac{R_{n,B}(z)}{p_{n,\gamma}(z)} \right| \Rightarrow V^{\lambda_\beta}(z) - \kappa_\beta,$$

равномерную вне E_β . Эта асимптотика следует из (1.52). Поскольку существует единственная векторная мера $(\lambda_\alpha, \lambda_\beta, \lambda_\gamma)$, удовлетворяющая этим соотношениям равновесия и условиям $|\lambda_\beta| - |\lambda_\gamma| = 1$, $|\lambda_\alpha| + |\lambda_\gamma| = 1$, получаем

$$\frac{1}{n} (\mu_{n,\alpha}, \mu_{n,\beta}, \mu_{n,\gamma}) \rightarrow (\lambda_\alpha, \lambda_\beta, \lambda_\gamma) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Формально, возможны два типа вырожденных решений задачи о равновесии: $|\lambda_\alpha| = 0$ и $|\lambda_\gamma| = 0$. В первом случае $(\lambda_\beta, \lambda_\gamma)$ – равновесная мера с никипинской матрицей взаимодействия и на E_α выполнено неравенство $V^\beta + V^\gamma \geq \kappa_\beta + \kappa_\gamma$. Во втором случае $(\lambda_\alpha, \lambda_\beta)$ – равновесная мера с матрицей взаимодействия Анжелеско и $V^\beta(x) - V^\alpha(x) \leq \kappa_\beta - \kappa_\alpha$ при $x \in E_\gamma$.

Для системы Никишина равновесные потенциалы выражаются через ветви алгебраической функции $\Phi(z)$, где

$$\Phi_O \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus E_\beta), \quad \Phi_O(z) = z^{-2} \left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right), \quad z \rightarrow \infty, \quad (1.57)$$

$$\Phi_B \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus (E_\gamma \cup E_\beta)), \quad \Phi_A(z) = c_B z \left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right), \quad z \rightarrow \infty, \quad (1.58)$$

$$\Phi_A \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus E_\gamma), \quad \Phi_A(z) = c_A z \left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right), \quad z \rightarrow \infty. \quad (1.59)$$

А именно,

$$V^\beta = \ln |\Phi_O|, \quad (1.60)$$

$$V^\beta - V^\gamma = -\ln |\Phi_B| + \varkappa_\beta, \quad (1.61)$$

$$V^\gamma = -\ln |\Phi_A| + \varkappa_\beta + \varkappa_\gamma. \quad (1.62)$$

Кроме того, $V^\beta + V^\gamma \geq \varkappa_\beta + \varkappa_\gamma$ тогда и только тогда, когда $|\Phi_0| \geq |\Phi_2|$. Однако в [32] показано, что $|\Phi_2| > |\Phi_1| > |\Phi_0|$ для всех $z \in \mathbb{C} \setminus (E_\gamma \cup E_\beta)$. Значит, такое граничное решение не реализуется.

Теперь рассмотрим случай нулевой меры λ_γ . Известно, что равновесные потенциалы для системы Анжелеско выражаются следующим образом через ветви трехзначной аналитической функции $\Phi(z)$:

$$V^\alpha + V^\beta = \ln |\Phi_O|, \quad (1.63)$$

$$V^\alpha = -\ln |\Phi_A| + \varkappa_\alpha, \quad (1.64)$$

$$V^\beta = -\ln |\Phi_B| + \varkappa_\beta; \quad (1.65)$$

здесь Φ_O , Φ_A и Φ_B – ветви функции $\Phi(z)$, характеризующиеся условиями

$$\Phi_O \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus (E_\alpha^* \cup E_\beta^*)), \quad \Phi_O(z) = z^{-2} \left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right), \quad z \rightarrow \infty, \quad (1.66)$$

$$\Phi_A \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus E_\alpha^*), \quad \Phi_A(z) = c_A z \left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right), \quad z \rightarrow \infty, \quad (1.67)$$

$$\Phi_B \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus E_\beta^*), \quad \Phi_B(z) = c_B z \left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right), \quad z \rightarrow \infty. \quad (1.68)$$

Значит, условие $V^\beta - V^\alpha \leq \varkappa_\beta - \varkappa_\alpha$ эквивалентно неравенству $|\Phi_A| \leq |\Phi_B|$. Кривые, на которых различные пары ветвей функции Φ равны по модулю, изображены на рис. 5–7. Теперь укажем области, в которых $|\Phi_A| < |\Phi_B|$. На рис. 5, 6b и 7 имеем $|\lambda_\gamma| = 0$, если отрезок E_γ лежит в области, содержащей точку $1 + 0$. На рис. 6a мера $|\lambda_\gamma|$ равна 0, если отрезок E_γ лежит в дополнении к области, содержащей точку $-0.5 - 0$.

2. Аппроксимации Эрмита–Паде функций с комплексными точками ветвления

2.1. Замечания исторического характера. Аналитическая теория аппроксимаций Эрмита–Паде в *комплексном случае* берет начало с Дж. Наттолла. В двух пионерских работах [38], [39] 1981 г. он получил несколько асимпто-

Рис. 5. Критические траектории для системы Анжелеско: $E_\alpha = [0, 1]$; $E_\beta = [-1, -1/2]$ (рис. а), $E_\beta = [-4, -2]$ (рис. б)

Рис. 6. Критические траектории для системы Анжелеско: $E_\alpha = [0, 1]$; $E_\beta = [-1/2, -1/4]$ (рис. а), $E_\beta = [-4, -1/2]$ (рис. б)

Рис. 7. Критические траектории для системы Анжелеско в случае столкновения: $E_\alpha^* = [0, 1]$, $E_\beta = [-0.2, -0.0716]$ (рис. а); $E_\alpha = [0, 1]$, $E_\beta^* = [-4, -1/7]$ (рис. б)

тических формул для аппроксимаций Эрмита–Паде функций с разделенными комплексными точками ветвления [38] (комплексный аналог системы Анжелеско) и для функций, мероморфных на одной и той же римановой поверхности [39] (т. е. имеющих одно и то же множество точек ветвления, аналогично системе Никишина в вещественном случае). В [38] результаты обосновывались эвристическими рассуждениями и вычислительным экспериментом, в то время как [39] содержит строго доказанные теоремы. В фундаментальной работе 1984 г. [40] Наттолл попытался сформулировать общую гипотезу об асимптотике при $n \rightarrow \infty$ *диагональных* ($\vec{n} = (n, n, \dots, n)$) многочленов Эрмита–Паде. Ключевым объектом в гипотезе является $(p+1)$ -листная риманова поверхность, зависящая от набора из p функций, которые мы приближаем. Наттолл показал, как найти эту риманову поверхность для функций из некоторого специального класса, но в общем случае этот вопрос остался открытым. Тем не менее, в предположении существования подходящей римановой поверхности $\mathfrak{R}$ он выдвинул гипотезу, что сильная асимптотика описывается решениями некоторой граничной задачи на $\mathfrak{R}$. Что касается главного члена асимптотики, то из гипотезы следует, что

$$|P_{\vec{n}}(z)|^{1/n} \rightarrow |\Phi^{-1}(z)| = \exp(-\operatorname{Re} G(z)), \quad n \rightarrow \infty, \quad (2.1)$$

где G – абелев интеграл третьего рода с логарифмическими полюсами в $\infty^{(\ell)}$ ($\ell = 0, 1, \dots, p$) и вычетами

$$G(z) = \begin{cases} -p \ln z + \mathcal{O}(1), & z \rightarrow \infty^{(0)}, \\ \ln z + \mathcal{O}(1), & z \rightarrow \infty^{(j)}, \quad j = 1, \dots, p; \end{cases} \quad (2.2)$$

вне этих точек G – аналитическая функция локального переменного. Если $\mathfrak{R}$ имеет положительный род, то накладывается еще одно условие на G : все периоды G чисто мнимые. Такая функция единственна с точностью до постоянного слагаемого, а $\operatorname{Re} G(z)$ – однозначная функция на $\mathfrak{R}$ (см., к примеру, [41]). Еще одна важная однозначная функция на $\mathfrak{R}$ – это производная $h(z)$ абелева интеграла $G(z)$. Выделим следующие ветви h на бесконечности:

$$h(z) := G'(z): \begin{cases} h_0(z) = -\frac{2}{z} + \dots, \\ h_j(z) = \frac{1}{z} + \dots, \quad j = 1, \dots, p, \end{cases} \quad z \rightarrow \infty. \quad (2.3)$$

Функция h мероморфна на римановой поверхности $\mathfrak{R}$.

Заметим, что из условия $\operatorname{genus}(\mathfrak{R}) = 0$ вытекает однозначность Φ из (2.1), так что Φ – мероморфная функция на $\mathfrak{R}$, однозначно (с точностью до нормировочного множителя) заданная на $\mathfrak{R}$ своим дивизором.

В работе [18] изучалась асимптотика диагональных аппроксимаций Эрмита–Паде ($\vec{n} = (n, n)$) для пары функций f_1 и f_2 с точками ветвления $A_1 = \{a_1, b_1\}$ и $A_2 = \{a_2, b_2\}$ соответственно (при этом $A_1 \setminus A_2 \neq \emptyset$ и $A_2 \setminus A_1 \neq \emptyset$). Мы изложим некоторые из результатов [18], чтобы продемонстрировать особенности и новые моменты в аналитических свойствах аппроксимаций Эрмита–Паде для функций с комплексными точками ветвления.

Мы будем говорить, что

$$f_j \in \mathcal{A}(\overline{\mathbb{C}} \setminus A_j), \quad A_j = \{a_j, b_j\}, \quad (2.4)$$

если лорановское разложение (0.1) сходится в окрестности бесконечности и аналитически продолжается по любому пути в $\mathbb{C} \setminus A_j$, в то время как в A_j функция f_j имеет ветвления алгебраического или логарифмического типа. Типичный пример здесь – функция

$$f_j(z) = \ln \frac{z - a_j}{z - b_j}.$$

В нашем случае ($p = 2$ и $\vec{n} = (n, n)$) мы будем использовать обозначения

$$\pi_{\vec{n}} = \pi_n, \quad P_{\vec{n}} = P_n, \quad Q_{\vec{n}}^{(j)} = Q_n^{(j)}, \quad R_{\vec{n}}^{(j)} = R_n^{(j)}, \quad j = 1, 2,$$

и предположим, что у $P_{\vec{n}}$ старший коэффициент равен 1.

2.2. Геометрия задачи. Асимптотические свойства аппроксимаций Эрмита–Паде, такие как предельное распределение полюсов или строение областей сходимости, существенно зависят от расположения точек ветвления приближаемых функций. В [18] были подробно разобраны различные классы возможных позиций точек

$$A := \{a_1, b_1; a_2, b_2\}. \quad (2.5)$$

В настоящем обзоре мы ограничимся одним классом, с достаточно общей и богатой структурой. Для этого класса асимптотика Эрмита–Паде описывается с помощью алгебраических функций третьего порядка с квадратичными ветвлениями только в точках a_1, b_1, a_2, b_2 , т. е., по формуле Римана–Гурвица, речь идет об алгебраических кривых третьего порядка рода 0. Для описания этого класса мы должны ввести вспомогательные понятия.

Основную роль в классификации возможных геометрических случаев играет алгебраическая функция h (см. (2.3)), удовлетворяющая уравнению

$$h^3(z) - 3 \frac{P_2(z)}{P_4(z)} h(z) + 2 \frac{P_1(z)}{P_4(z)} = 0. \quad (2.6)$$

Здесь $P_4(z) = (z - a_1)(z - b_1)(z - a_2)(z - b_2)$, а коэффициенты многочленов $P_1 = z + \dots$ и $P_2 = \tilde{z}^2 + \dots$ изначально не известны. Дискриминант уравнения (2.6) имеет вид

$$\mathcal{D} = \frac{\tilde{\mathcal{D}}}{P_4^3(z)}, \quad \tilde{\mathcal{D}} = P_2^3 - P_4 P_1^2.$$

Отсутствие у h ветвления в бесконечности дает одну линейную связь между неизвестными коэффициентами многочленов P_1 и P_2 . Два других алгебраических соотношения (нелинейных) должны – в нашем случае – обеспечивать, чтобы h имела род нуль. Следовательно, нули дискриминанта $\mathcal{D}$ имеют четную крайность, так что h не имеет точек ветвления, отличных от (2.5). Это дает два необходимых алгебраических уравнения на неизвестные параметры многочленов P_1 и P_2 . В работе [42] была получена рациональная униформизация алгебраической кривой $h(z)$ рода 0, что позволило полностью решить задачу нахождения многочленов P_1 и P_2 .

2.2.1. *Функция Φ и контур Γ .* Поскольку род алгебраической функции h равен нулю, экспонента абелева интеграла

$$\Phi = \exp\left(\int h(z) dz\right) \quad (2.7)$$

также является алгебраической функцией с той же римановой поверхностью, что и h .

Ясно что при подходящей нормировке функция Φ будет удовлетворять уравнению

$$\Phi^3(z) + q_1(z)\Phi^2(z) + q_2(z)\Phi(z) + q_0 = 0, \quad (2.8)$$

в котором q_j – полиномы степеней $\leq j$ ($j = 0, 1, 2$). В [42] предложена явная процедура нахождения коэффициентов $\{q_j\}$.

Функция Φ определена в (2.7) с точностью до постоянного множителя. В дальнейшем мы часто будем выбирать нормировку, в которой произведение всех трех ветвей Φ равно единице:

$$\Phi_0\Phi_1\Phi_2 = 1. \quad (2.9)$$

Тогда (см. (2.3), (2.7)) ветви нормированной функции Φ ведут себя на бесконечности следующим образом:

$$\begin{cases} \Phi_j(z) = \frac{z}{C_j} + \dots, & j = 1, 2, \\ \Phi_0(z) = \frac{1}{C_0 z^2} + \dots, \end{cases} \quad z \rightarrow \infty, \quad (2.10)$$

где

$$C_1 C_2 C_0 = 1.$$

Используя уравнение для Φ , мы можем параметризовать кривую

$$\Gamma = \{z: |\Phi_j(z)| = |\Phi_k(z)| \text{ для некоторых } 0 \leq j < k \leq 2\} \quad (2.11)$$

с помощью функции

$$J(\nu, z) = \nu^3 + A(z)\nu^2 + B(z)\nu + C(z), \quad (2.12)$$

где

$$\begin{aligned} A(z) &= \frac{3q_0 - q_1(z)q_2(z)}{q_0}, \\ B(z) &= \frac{q_0 q_1^3(z) + q_2^3(z) - 5q_0 q_1(z)q_2(z) + 3q_0^2}{q_0^2}, \\ C(z) &= \frac{2q_0 q_1^3(z) - q_1^2(z)q_2^2(z) + 2q_2^3(z) - 4q_0 q_1(z)q_2(z) + q_0^2}{q_0^2}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

а q_0, q_1, q_2 – коэффициенты уравнения (2.8) для Φ . Таким образом, справедливо следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1 (см. [18]). *Для функции Φ из (2.7) множество Γ , определенное в (2.11), может быть описано как*

$$\Gamma = \{z: J(\nu, z) = \nu^3 + A(z)\nu^2 + B(z)\nu + C(z) = 0 \text{ для некоторого } \nu \in [-2, 2]\}, \quad (2.14)$$

где A, B и C определены в (2.13).

2.2.2. Структура Γ . Теперь, исходя из глобальной структуры множества Γ , мы определим случаи I и II, описывающие геометрию задачи. Поскольку многочлен $J(\nu, z)$ в (2.12) имеет степень 6 по переменной z , контур Γ состоит из шести траекторий $z_j(\nu)$, параметризованных $\nu \in [-2, 2]$. При $\nu = 2$ имеем

$$J(2, z) = -\frac{\Pi_4(z)[C_1 P_1(z) + C_2]^2}{q_0^2}$$

с некоторыми константами C_1 и C_2 . Эти траектории выходят из точек a_1, b_1, a_2, b_2 и (две траектории) из точки

$$\alpha = P_1(0) + \frac{C_2}{C_1}.$$

Будем предполагать, что точка α отлична от $a_j, b_j, j = 1, 2$. Случай, когда α совпадает с одной из точек $a_j, b_j, j = 1, 2$, см. в [18]. Обозначим эти траектории через

$$\gamma_{a_1}, \gamma_{b_1}, \gamma_{a_2}, \gamma_{b_2}, \gamma_{\alpha_1}, \gamma_{\alpha_2}, \quad (2.15)$$

после чего непрерывно продолжим их по параметру ν на значения, меньшие 2, см. рис. 8. При $\nu = -2$ получаем

$$J(-2, z) = \frac{[q_0 - q_1(z)q_2(z)]^2}{q_0^2} = \text{const}(z - \beta_1)^2(z - \beta_2)^2(z - \beta_3)^2. \quad (2.16)$$

Таким образом, наши шесть траекторий попарно встречаются в точках $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ — нулях функции $q_0 - q_1 q_2$ (см. рис. 9).

Рис. 8. Начальные ($\nu = 2$) участки траекторий из Γ

Рис. 9. Концы ($\nu = -2$) траекторий из Γ

Теперь мы готовы описать конфигурации точек ветвления A , которые мы будем обсуждать в настоящем обзоре.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Будем говорить, что множество точек $\{a_1, b_1, a_2, b_2\}$ имеет геометрию случая I или II:

$$A = \{a_1, b_1, a_2, b_2\} \in \text{I} \cup \text{II}, \quad (2.17)$$

если множество Γ из (2.11) имеет следующую структуру:

- 1) у алгебраической функции $z(\nu)$, заданной уравнением $J(\nu, z) = 0$ (см. (2.12)), нет точек ветвления на $(-2, 2)$, так что при аналитическом продолжении траектории (2.15) оказываются определенными глобально на $[-2, 2]$:

$$\gamma_{a_1}(\nu), \gamma_{b_1}(\nu), \gamma_{a_2}(\nu), \gamma_{b_2}(\nu), \gamma_{\alpha_1}(\nu), \gamma_{\alpha_2}(\nu), \quad \nu \in [-2, 2];$$

- 2) при $\nu = -2$ выполнено

$$\gamma_{a_1}(-2) = \gamma_{b_1}(-2), \quad \gamma_{a_2}(-2) = \gamma_{b_2}(-2).$$

Теперь для $A \in \text{I} \cup \text{II}$ мы можем определить две дуги в $\mathbb{C}$:

$$\gamma_j = \gamma_{a_j, b_j} = \gamma_{a_j} \cup \gamma_{b_j}, \quad j = 1, 2, \quad (2.18)$$

каждая из которых соединяет a_j с b_j , $j = 1, 2$, а также замкнутую аналитическую кривую

$$\gamma_\alpha := \gamma_{\alpha_1} \cup \gamma_{\alpha_2}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Для $A \in \text{I} \cup \text{II}$ будем говорить, что (см. рис. 10 и 11)

- 1) $A \in \text{I}$, если $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset$;
- 2) $A \in \text{II}$, если пересечение γ_1 и γ_2 состоит из двух точек:

$$\gamma_1 \cap \gamma_2 = \{c_1, c_2\}.$$

В случае **II** мы будем предполагать, что точки a_j , b_j и точки пересечения c_j расположены как на рис. 11, т. е. при движении вдоль γ_j , начиная с a_j ($j = 1, 2$), мы сначала попадаем в c_1 , а потом в c_2 .

Рис. 10. Глобальные траектории, случай **I**

Рис. 11. Глобальные траектории, случай **II**

В дальнейшем мы сосредоточимся на геометрии случая **II**, а случай **I** будем рассматривать как его вырождение (детали см. в [18]).

2.2.3. Риманова поверхность случая **II**. Задание глобальных ветвей алгебраических функций h и Φ . В случае **II** $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \{c_1, c_2\}$. Допустим, что точки a_j , b_j и c_j упорядочены как на рис. 11. Будем использовать γ_{a_j, c_1} для обозначения

ния части дуги γ_j , заключенной между a_j и c_1 ; аналогично определяется γ_{b_j, c_2} . Теперь в случае II положим

$$\tilde{\Delta}_j := \gamma_{a_j, c_1} \cup \gamma_{b_j, c_2}, \quad j = 1, 2, \quad \begin{cases} E_1 := \gamma_2 \setminus \tilde{\Delta}_2, \\ E_2 := \gamma_1 \setminus \tilde{\Delta}_1. \end{cases} \quad (2.19)$$

Дуги E_1 и E_2 ограничивают “линзу” G :

$$\partial G := E_1 \cup E_2. \quad (2.20)$$

Заметим, что вещественно-аналитическая кривая γ_α должна проходить через точки c_1 , c_2 и делить область G на две части (в противном случае возникнет противоречие с принципом максимума для гармонических функций). Положим

$$\Delta_{1,2} := \gamma_\alpha \cap G. \quad (2.21)$$

Наконец, введем обозначения

$$\Delta_j := \tilde{\Delta}_j \cup \Delta_{1,2}, \quad \Delta_0 := \Delta_1 \cup \Delta_2 = \tilde{\Delta}_1 \cup \Delta_{1,2} \cup \tilde{\Delta}_2. \quad (2.22)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Для системы точек $A \in \Pi$ соответствующая риманова поверхность

$$\mathfrak{R}(A) := \overline{\mathfrak{R}_0 \cup \mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_2}$$

получается подклеиванием листов

$$\begin{cases} \mathfrak{R}_1 := \overline{\mathbb{C}} \setminus (\Delta_1 \cup E_1), \\ \mathfrak{R}_2 := \overline{\mathbb{C}} \setminus (\tilde{\Delta}_2 \cup E_1) = \overline{\mathbb{C}} \setminus \gamma_2, \end{cases} \quad (2.23)$$

представляющих собой комплексную плоскость с разрезами, к листу

$$\mathfrak{R}_0 := \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta_0 = \overline{\mathbb{C}} \setminus (\Delta_1 \cup \tilde{\Delta}_2),$$

после чего листы $\mathfrak{R}_1$ и $\mathfrak{R}_2$ склеиваются друг с другом вдоль E_1 (см. рис. 12).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. 1. Определенная таким образом структура листов римановой поверхности демонстрирует некоторую асимметрию относительно пар точек $\{a_1, b_1\}$ и $\{a_2, b_2\}$. Мы также можем рассмотреть двойственную структуру листов для $\mathfrak{R}$:

$$\mathfrak{R}_0 := \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta_0, \quad \mathfrak{R}_2 := \overline{\mathbb{C}} \setminus (\Delta_2 \cup E_2), \quad \mathfrak{R}_1 := \overline{\mathbb{C}} \setminus \gamma_1.$$

2. Хотя все три листа склеиваются друг с другом в точках c_1 , c_2 , легко проверить, что это не точки ветвления $\mathfrak{R}$.

3. Заметим, что лист $\mathfrak{R}_1$ (см. (2.23)) несвязен. Он состоит из двух компонент, а именно области G_1 , ограниченной E_1 и $\Delta_{1,2}$:

$$\partial G_1 := E_1 \cup \Delta_{1,2},$$

и области $\overline{\mathbb{C}} \setminus (\overline{G_1} \cup \tilde{\Delta}_1)$.

Рис. 12. Риманова поверхность случая II

Структура листов (2.23) задает глобальные ветви функций h и Φ :

$$\begin{aligned} h_0, \Phi_0 &\in H(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta_0), \\ h_1, \Phi_1 &\in H(\mathbb{C} \setminus (\tilde{\Delta}_1 \cup \overline{G_1})) \cup H(G_1), \\ h_2, \Phi_2 &\in H(\mathbb{C} \setminus (\tilde{\Delta}_2 \cup E_1)). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Точнее, в областях

$$\overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta_0, \quad \mathbb{C} \setminus (\tilde{\Delta}_1 \cup \overline{G_1}), \quad \mathbb{C} \setminus (\tilde{\Delta}_2 \cup E_1)$$

ветви

$$(h_0, \Phi_0), \quad (h_1, \Phi_1), \quad (h_2, \Phi_2)$$

получаются аналитическим продолжением (2.3) и (2.10) от точки на бесконечности, а ветвь (h_1, Φ_1) в G_1 получается аналитическим продолжением (h_0, Φ_0) через $\Delta_{1,2}$ или продолжением (h_2, Φ_2) через E_1 . Три ветви Φ_j , $j = 0, 1, 2$, разбивают комплексную плоскость на несколько подобластей:

$$\Omega_{j,k,\ell} = \{z \in \mathbb{C}: |\Phi_j(z)| < |\Phi_k(z)| < |\Phi_\ell(z)|\}, \quad j, k, \ell = 0, 1, 2. \quad (2.25)$$

Введем также множества

$$\Omega_{j,k} = \{z \in \mathbb{C}: |\Phi_j(z)| < |\Phi_k(z)|\}, \quad j, k = 0, 1, 2. \quad (2.26)$$

Учитывая непрерывность глобальных ветвей Φ вдоль γ_1 , γ_2 , γ_α и принцип максимума, получаем разбиение $\mathbb{C}$ контуром Γ на подобласти $\Omega_{j,k,\ell}$, как показано на рис. 13.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Если $A \in \Pi$, то контур Γ определенный в (2.11), (2.12), имеет следующую структуру:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \Gamma_{0,1} \cup \Gamma_{0,2} \cup \Gamma_{1,2} \\ \Gamma_{0,1} &:= \{z: |\Phi_0(z)| = |\Phi_1(z)|\} = \Delta_1, \\ \Gamma_{0,2} &:= \{z: |\Phi_0(z)| = |\Phi_2(z)|\} = \tilde{\Delta}_2, \\ \Gamma_{1,2} &:= \{z: |\Phi_1(z)| = |\Phi_2(z)|\} = E_1 \cup E_2 \cup (\gamma_\alpha \setminus \Delta_{1,2}), \end{aligned}$$

 Рис. 13. Разбиение $\mathbb{C}$ контуром Γ на подобласти $\Omega_{j,k,\ell}$. Случай II.

а для областей $\Omega_{j,k,\ell}$ выполнено (см. рис. 13)

$$\begin{cases} \partial\Omega_{0,1,2} = \gamma_\alpha \cup \tilde{\Delta}_1 \cup E_1 \cup E_2, \\ \partial\Omega_{0,2,1} = (\gamma_\alpha \setminus \Delta_{1,2}) \cup \tilde{\Delta}_2 \cup E_2. \end{cases} \quad (2.27)$$

Доказательства предложения 2.2 и следующей теоремы 2.1 см. в [18].

ТЕОРЕМА 2.1. Если $A \in \Pi$, то

1) скачок h_0 на Δ_0 задает положительную меру λ полной вариации 2:

$$\frac{1}{2\pi i} (h_{0+}(\xi) - h_{0-}(\xi)) d\xi =: d\lambda(\xi), \quad \xi \in \Delta_0;$$

мера λ имеет две компоненты λ_1 и $\tilde{\lambda}_2$ с носителями на Δ_1 и $\tilde{\Delta}_2$:

$$\lambda = \begin{cases} \lambda_1 & \text{на } \Delta_1, \\ \tilde{\lambda}_2 & \text{на } \tilde{\Delta}_2, \end{cases}$$

и плотностями

$$\begin{aligned} \lambda'_1(\xi) &= \frac{m_1(\xi)}{\sqrt{(\xi - a_1)(\xi - b_1)}}, & \tilde{\lambda}'_2(\xi) &= \frac{m_2(\xi)}{\sqrt{(\xi - a_2)(\xi - b_2)}}, \\ m_1 &\in H(\tilde{\Delta}_1) \cap H(\Delta_{1,2}), & m_2 &\in H(\tilde{\Delta}_2); \end{aligned}$$

2) скачок h_1 на E_1 задает положительную меру μ_1 :

$$\frac{1}{2\pi i} (h_{1+}(\xi) - h_{1-}(\xi)) d\xi =: d\mu_1(\xi), \quad \xi \in E_1,$$

где $\mu'_1 \in H(E_1)$;

3) массы этих мер связаны соотношениями

$$|\lambda_1| + |\tilde{\lambda}_2| = 2, \quad |\lambda_1| - |\mu_1| = 1.$$

Таким образом, в случае **II** риманова поверхность порождает три положительные меры

$$\{\lambda_1, \tilde{\lambda}_2, \mu_1\}, \quad \begin{cases} \text{supp } \lambda_1 = \Delta_1, \\ \text{supp } \tilde{\lambda}_2 = \tilde{\Delta}_2, \\ \text{supp } \mu_1 = E_1, \end{cases} \quad \begin{cases} |\lambda_1| + |\tilde{\lambda}_2| = 2, \\ |\lambda_1| - |\mu_1| = 1. \end{cases}$$

Рассмотрев двойственную риманову поверхность (см. замечание 2.1, пункт 1), мы приходим к двойственной системе из трех положительных мер

$$\{\lambda_2, \tilde{\lambda}_1, \mu_2\}, \quad \begin{cases} \text{supp } \lambda_2 = \Delta_2, \\ \text{supp } \tilde{\lambda}_1 = \tilde{\Delta}_1, \\ \text{supp } \mu_2 = E_2, \end{cases} \quad \begin{cases} |\lambda_2| + |\tilde{\lambda}_1| = 2, \\ |\lambda_2| - |\mu_2| = 1, \end{cases} \quad (2.28)$$

в которой выполнены соотношения

$$\lambda_1 + \tilde{\lambda}_2 = \lambda_2 + \tilde{\lambda}_1 = \lambda.$$

2.3. Слабая асимптотика, сходимости и задачи равновесия для векторного потенциала. В этом пункте мы формулируем следствия из сильной асимптотики многочленов Эрмита–Паде, полученные в [18] и относящиеся к слабой асимптотике полюсов аппроксимаций Эрмита–Паде и к сходимости этих аппроксимаций.

2.3.1. Слабая сходимость. Начнем со слабого предела считающих мер ν_{P_n} , приписывающих равную массу $1/(2n)$ полюсам аппроксимаций Эрмита–Паде. Мы снова будем интересоваться прежде всего геометрией, описываемой случаем **II**. Результаты, относящиеся к случаю **I**, можно рассматривать как вырождение сформулированных результатов. По поводу деталей или других геометрических конфигураций см. [18].

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть A соответствует случаю **II**. Тогда у полюсов аппроксимаций Эрмита–Паде (0.2)–(0.4) функций из (2.4) есть слабый предел:

$$\nu_{P_n} \xrightarrow{*} \frac{\lambda}{2}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (2.29)$$

где предельная мера λ определена в теореме 2.1.

Сформулируем теперь результат о конечных нулях функции второго рода из (0.4):

$$R_n^{(j)} := f_j P_n - Q_n^{(j)}, \quad j = 1, 2.$$

Эти нули представляют собой дополнительные точки интерполяции. Мы используем обозначение $\nu_{R_n^{(j)}}$ для считающих мер, приписывающих массу $1/n$ каждому конечному нулю $R_n^{(j)}$.

ТЕОРЕМА 2.3. Рассмотрим $R_n^{(j)}$ для функций (2.4). Для $A \in \mathbf{II}$ выполнено

$$\nu_{R_n^{(j)}} \xrightarrow{*} \mu_j, \quad j = 1, 2. \quad (2.30)$$

Предельные меры μ_1, μ_2 определены в теореме 2.1 и (2.28).

В следующей теореме описывается асимптотика корня n -й степени из погрешности

$$f_j - \pi_n^{(j)} = \frac{R_n^{(j)}}{P_n}, \quad \pi_n^{(j)} = \frac{Q_n^{(j)}}{P_n}, \quad j = 1, 2,$$

и сходимость аппроксимаций Эрмита–Паде (0.2)–(0.4).

ТЕОРЕМА 2.4. *Рассмотрим аппроксимации Эрмита–Паде функций (2.4). Если $A \in \Pi$, то*

$$|f_1 - \pi_n^{(1)}|^{1/n} \rightarrow \left| \frac{\Phi_0}{\Phi_1} \right| \text{ в } \overline{\mathbb{C}} \setminus (\Delta_1 \cup E_1), \quad |f_2 - \pi_n^{(2)}|^{1/n} \rightarrow \begin{cases} \left| \frac{\Phi_0}{\Phi_2} \right| & \text{в } (\overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta_2) \setminus G, \\ \left| \frac{\Phi_0}{\Phi_1} \right| & \text{в } G \setminus \Delta_{1,2} \end{cases}$$

(равномерно внутри указанных множеств), так что

$$\pi_n^{(j)} \rightarrow f_j \text{ в } \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta_j, \quad j = 1, 2.$$

Напомним, что ветви алгебраической функции Φ и области $\Omega_{j,0}$, $j = 1, 2$ (где расходятся аппроксимации Эрмита–Паде) определены в (2.26), (2.7) и (2.24).

2.3.2. Векторная задача равновесия. В заключение раздела сформулируем общую **векторную задачу равновесия** для логарифмических потенциалов мер $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$, μ_1 , μ_2 . Эти меры были введены в теореме 2.1 для описания слабых пределов полюсов и дополнительных точек интерполяции.

ТЕОРЕМА 2.5. *Пусть f_1, f_2 – функции из (2.4), а $A \in \mathbf{I} \cup \mathbf{II}$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

I. а) *Существуют кусочно аналитические дуги Δ_1 и Δ_2 , превращающие f_1 и f_2 в голоморфные функции:*

$$f_j \in H(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta_j), \quad j = 1, 2,$$

и кусочно аналитический контур E , ограничивающий область, содержащую пересечение этих дуг

$$\Delta_{1,2} := \Delta_1 \cap \Delta_2 \quad (\Delta_{1,2} = \emptyset \Rightarrow E = \emptyset).$$

б) *Существует тройка мер $(\lambda_1, \tilde{\lambda}_2, \mu_1)$ с носителями (здесь использовано обозначение $S(\mu) = \text{supp } \mu$)*

$$S(\lambda_1) \subset \Delta_1, \quad S(\tilde{\lambda}_2) \subset \tilde{\Delta}_2 := \Delta_2 \setminus \Delta_{1,2}, \quad S(\mu_1) \subset E$$

и с вариациями, удовлетворяющими соотношениям

$$\begin{cases} |\lambda_1| + |\tilde{\lambda}_2| = 2, \\ |\lambda_1| - |\mu_1| = 1. \end{cases}$$

с) Тройка мер $(\lambda_1, \tilde{\lambda}_2, \mu_1)$ удовлетворяет следующим соотношениям равновесия с некоторыми константами κ_1 и $\tilde{\kappa}_2$:

$$\begin{aligned} U_1 &:= 2V^{\lambda_1} + V^{\tilde{\lambda}_2} - V^{\mu_1} \begin{cases} = \kappa_1 & \text{на } S(\lambda_1), \\ \geq \kappa_1 & \text{на } \Delta_1, \end{cases} \\ U_2 &:= V^{\lambda_1} + 2V^{\tilde{\lambda}_2} + V^{\mu_1} \begin{cases} = \tilde{\kappa}_2 & \text{на } S(\tilde{\lambda}_2), \\ \geq \tilde{\kappa}_2 & \text{на } \tilde{\Delta}_2, \end{cases} \\ U_3 &:= -V^{\lambda_1} + V^{\tilde{\lambda}_2} + 2V^{\mu_1} \begin{cases} = \tilde{\kappa}_2 - \kappa_1 & \text{на } S(\mu_1), \\ \geq \tilde{\kappa}_2 - \kappa_1 & \text{на } E. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.31)$$

д) Носители мер $(\lambda_1, \tilde{\lambda}_2, \mu_1)$ удовлетворяют следующим соотношениям симметрии:

$$\begin{cases} \frac{\partial U_1}{\partial n_+} = \frac{\partial U_1}{\partial n_-} & \text{на } S(\lambda_1), \\ \frac{\partial U_2}{\partial n_+} = \frac{\partial U_2}{\partial n_-} & \text{на } S(\tilde{\lambda}_2), \\ \frac{\partial U_3}{\partial n_+} = \frac{\partial U_3}{\partial n_-} & \text{на } S(\mu_1), \end{cases} \quad (2.32)$$

где $\partial/\partial n_{\pm}$ – нормальные производные на соответствующих контурах.

II. Также имеет место двойственная задача для тройки $(\lambda_2, \tilde{\lambda}_1, \mu_2)$, которая получается из задачи **I.a)–I.d)** перестановкой индексов 1 и 2.

III. Равновесные меры $(\lambda_1, \tilde{\lambda}_2, \mu_1)$ и $(\lambda_2, \tilde{\lambda}_1, \mu_2)$ связаны следующим образом:

$$\begin{aligned} \lambda &:= \lambda_1 + \tilde{\lambda}_2 = \lambda_2 + \tilde{\lambda}_1, & S(\lambda) &\subset \Delta_0 := \Delta_1 \cup \Delta_2, \\ \mu &:= \mu_1 + \mu_2, & S(\mu_1) \cup S(\mu_2) &= E, \\ V^{\mu}|_E &= V^{\lambda_{1,2}}|_E, & \lambda_{1,2} &:= \lambda|_{\Delta_{1,2}}. \end{aligned}$$

IV. Мера $\lambda/2$ является слабым пределом (2.29) полюсов аппроксимаций Эрмита–Паде функций f_1, f_2 , а меры μ_1 и μ_2 – слабые пределы (2.30) дополнительных точек интерполяции.

Доказательство теоремы 2.5 (включая обобщения на другие геометрические конфигурации) приведено в [18].

В случае **I** имеем $\Delta_{1,2} = \emptyset$ и, следовательно, $E = \emptyset$,

$$\Delta_j = \tilde{\Delta}_j, \quad \lambda_j = \tilde{\lambda}_j, \quad \mu_j = 0, \quad S(\lambda_j) = \Delta_j, \quad j = 1, 2,$$

и в системах соотношений равновесия и симметрии (2.31), (2.32) последнее соотношение вырождается и имеют место только первые два соотношения, являющиеся соотношениями равновесия для системы Анжелеско (1.6) в комплексной плоскости. В случае **II** контуры для задачи равновесия заданы в (2.19)–(2.22). В этом случае (см. теорему 2.1) в задаче равновесия (2.31) и двойственной задаче нет вырожденных соотношений.

Соотношения равновесия (2.31) совпадают с соотношениями равновесия (1.54)–(1.56) из предыдущего раздела, что свидетельствует об их универсальном характере.

Глава 2

Ансамбли совместно ортогональных многочленов

3. Определения и детерминантные формулы

3.1. Ансамбли ортогональных многочленов. Многочлены, задаваемые условиями совместной ортогональности (1.5), естественным образом возникают в некоторых моделях случайных матричных ансамблей и ансамблей непересекающихся путей. Впервые это было замечено в [9], в случае эрмитова ансамбля случайных матриц с внешним источником.

Связи между ортогональными многочленами и теорией случайных матриц были установлены много раньше. Они были сначала разработаны М. Л. Мехтой и М. Годеном для гауссовых ансамблей [43], а затем обобщены на более общие инвариантные ансамбли (см. [44]–[51]). Постановка здесь следующая. В пространстве эрмитовых $(n \times n)$ -матриц M вводится вероятностная мера вида

$$\frac{1}{\tilde{Z}_n} e^{-\text{Tr } V(M)} dM, \quad (3.1)$$

где $V: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ – функция, для которой

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{V(x)}{\ln(1 + |x|)} = +\infty$$

(к примеру, многочлен четной степени с положительным старшим коэффициентом),

$$dM = \prod_{i=1}^n dM_{ii} \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=2}^n d\text{Re } M_{ij} d\text{Im } M_{ij}$$

– мера Лебега на множестве алгебраически независимых компонент M , а

$$\tilde{Z}_n = \int e^{-\text{Tr } V(M)} dM$$

– нормировочный множитель, превращающий (3.1) в вероятностную меру. Совместное вероятностное распределение для собственных значений $x_1, \dots, x_n$ матрицы M , выбранной случайным образом в соответствии с (3.1), имеет вид

$$\mathcal{P}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{Z_n} \prod_{i < j} (x_j - x_i)^2 \prod_{j=1}^n e^{-V(x_j)}, \quad (3.2)$$

где Z_n – еще один нормировочный множитель (см. [44], [45]).

Пусть $(p_k)_{k=0}^\infty$ – последовательность многочленов, ортогональных с весом $e^{-V(x)}$ на вещественной оси, а

$$K_n(x, y) = \sqrt{e^{-V(x)} e^{-V(y)}} \sum_{k=0}^{n-1} p_k(x) p_k(y) \quad (3.3)$$

– воспроизводящее ядро (также называемое ортогональным полиномиальным ядром или ядром Кристоффеля–Дарбу). Тогда (3.2) можно переписать как

определитель:

$$\mathcal{P}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n!} \det[K_n(x_i, x_j)]_{i,j=1}^n \quad (3.4)$$

и для всякого $k = 1, \dots, n$ так называемая k -точечная корреляционная функция

$$R(x_1, \dots, x_k) = \frac{n!}{(n-k)!} \int_{\mathbb{R}^{n-k}} \mathcal{P}(x_1, \dots, x_n) dx_{k+1} \cdots dx_n \quad (3.5)$$

(с точностью до множителя совпадающая с маргинальной плотностью) выражается как определитель $(k \times k)$ -матрицы:

$$R(x_1, \dots, x_k) = \det[K_n(x_i, x_j)]_{i,j=1, \dots, k}, \quad (3.6)$$

отвечающей тому же ядру (3.3). Формула (3.6) характеризует детерминантный точечный процесс с корреляционным ядром K_n .

Унитарный ансамбль (3.1) связывает с ортогональными многочленами еще и то, что характеристический многочлен

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \mathbb{E}[\det(xI - M)] \\ &= \frac{1}{Z_n} \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n (x - x_j) \mathcal{P}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \end{aligned} \quad (3.7)$$

равен ортогональному многочлену степени n со старшим коэффициентом 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_n(x) x^k e^{-nV(x)} dx = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

так что $p_n(x) = \gamma_n P_n(x)$, где γ_n – старший коэффициент ортогонального многочлена p_n (более подробные сведения об унитарных ансамблях и других моделях теории случайных матриц см., к примеру, в [52], [49], [53], [54]).

3.2. Ансамбли совместно ортогональных многочленов. Ансамбль совместно ортогональных многочленов задается обобщением функции плотности вероятностного распределения (3.2). Заметим, что в (3.2) мы имеем произведение двух определителей. Действительно, по хорошо известной формуле для определителя Вандермонда,

$$\prod_{i < j} (x_j - x_i) = \det[x_j^{i-1}]_{i,j=1, \dots, n}.$$

Полагая $w(x) = e^{-V(x)}$, мы можем выразить ансамбль ортогональных многочленов (3.2) в виде функции

$$\frac{1}{Z_n} \det[x_j^{i-1}]_{i,j=1, \dots, n} \det[x_j^{i-1} w(x_j)]_{i,j=1, \dots, n}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1 [55]. Ансамбль совместно ортогональных многочленов – это случайная векторная величина с плотностью вероятности на $\mathbb{R}^n$ вида

$$\mathcal{P}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{Z_n} \det[x_j^{i-1}]_{i,j=1, \dots, n} \det[\varphi_i(x_j)]_{i,j=1, \dots, n}, \quad (3.8)$$

где $\varphi_1, \dots, \varphi_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – функции, чья линейная оболочка совпадает с

$$\text{span}\{x^k w_j(x) \mid k = 0, \dots, n_j - 1, j = 1, \dots, p\}, \quad (3.9)$$

где $w_1, \dots, w_p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – некоторые p функций, а $n_1, \dots, n_p$ – натуральные числа такие, что $n = n_1 + \dots + n_p$. Будем говорить, что СОМ-ансамбль (3.8) порожден весами $w_1, \dots, w_p$ и мультииндексом $\vec{n} = (n_1, \dots, n_p)$.

Веса $w_1, \dots, w_p$ и мультииндекс $\vec{n} = (n_1, \dots, n_p)$ порождают СОМ-ансамбль тогда и только тогда, когда

$$\det[x_j^{i-1}]_{i,j=1,\dots,n} \det[\varphi_i(x_j)]_{i,j=1,\dots,n} \geq 0 \quad \text{для любого выбора } (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

или

$$\det[x_j^{i-1}]_{i,j=1,\dots,n} \det[\varphi_i(x_j)]_{i,j=1,\dots,n} \leq 0 \quad \text{для любого выбора } (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

и вдобавок

$$Z_n = \int_{\mathbb{R}^n} \det[x_j^{i-1}]_{i,j=1,\dots,n} \det[\varphi_i(x_j)]_{i,j=1,\dots,n} dx_1 \cdots dx_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (3.10)$$

По континуальной версии формулы Бине–Коши (см., к примеру, [56]) из (3.9) получаем

$$Z_n = n! \det \left[\int_{\mathbb{R}^n} x^{i-1} \varphi_j(x) dx \right]_{i,j=1,\dots,n}. \quad (3.11)$$

С помощью элементарных операций над столбцами под знаком определителя в (3.11) функции φ_j можно заменить на функции из (3.9). Тогда выражение (3.11) для Z_n превращается в блочный определитель Ганкеля

$$Z_n = c_n \det [H_1 \quad \cdots \quad H_p]$$

с p прямоугольными блоками, где блок

$$H_j = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x^{i+k-2} w_j(x) dx \right]_{i=1,\dots,n, k=1,\dots,n_j}$$

имеет размер $n \times n_j$ и образован моментами веса w_j .

Любую плотность вероятностного распределения вида (3.8) можно рассматривать как ансамбль совместно ортогональных многочленов, просто положив $p = n$, $w_j = \varphi_j$ и $n_j = 1$ для $j = 1, \dots, n$. Однако наибольший интерес вызывает ситуация, когда p мало по сравнению с n .

3.3. Детерминантный точечный процесс. Ансамбль совместно ортогональных многочленов является детерминантным точечным процессом. Иными словами, существует такое ядро K_n , что (3.8) можно переписать как

$$\mathcal{P}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n!} \det [K_n(x_i, x_j)]_{i,j=1,\dots,n} \quad (3.12)$$

и для всякого $k = 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned} R(x_1, \dots, x_k) &:= \frac{n!}{(n-k)!} \int_{\mathbb{R}^{n-k}} \mathcal{P}(x_1, \dots, x_n) dx_{k+1} \cdots dx_n \\ &= \det [K_n(x_i, x_j)]_{i,j=1, \dots, k}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Таким образом, формулы (3.4)–(3.6) выполнены и для СОМ-ансамбля (3.8). Ядро выражается через двойную сумму:

$$K_n(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [A_n^{-1}]_{j,i} x^{i-1} \varphi_j(y), \quad (3.14)$$

где $[A_n^{-1}]_{j,i}$ – (j, i) -й элемент матрицы, обратной к

$$A_n = \left[\int x^{i-1} \varphi_j(x) dx \right]_{i,j=1, \dots, n}$$

(см. также [57], [58]). Заметим, что $Z_n = n! \det A_n$ в силу (3.11). Поскольку $Z_n \neq 0$, матрица A_n обратима и (3.14) корректно определяет ядро.

Формулы (3.12)–(3.14) – частные случаи более общих формул для биортонгальных ансамблей [57], где вместо (3.8) возникает плотность вероятности, являющаяся произведением двух определителей общего вида:

$$\frac{1}{Z_n} \det [f_i(x_j)]_{i,j=1, \dots, n} \det [g_i(x_j)]_{i,j=1, \dots, n}. \quad (3.15)$$

Здесь мы не будем обсуждать эту более общую ситуацию.

В случае ортогональных многочленов ядро (3.3) можно выразить с помощью формулы Кристоффеля–Дарбу через ортогональные многочлены степеней только n и $n-1$:

$$K_n(x, y) = \sqrt{e^{-V(x)} e^{-V(y)}} \gamma_{n-1}^2 \frac{P_n(x) P_{n-1}(y) - P_{n-1}(x) P_n(y)}{x - y}.$$

Это очень помогает при вычислении асимптотик. Действительно, тогда в случае асимптотики при больших n , для описания поведения K_n придется учитывать только ортогональные многочлены большой степени.

Формула Кристоффеля–Дарбу для ядра (3.14) СОМ-ансамбля также известна: она была открыта в [9] для $p = 2$, а после того в [20] для $p \geq 2$. Для ее описания вспомним, что совместно ортогональный многочлен $P_{\vec{n}}$ (см. (1.5)) есть многочлен степени $n = |\vec{n}| = n_1 + \dots + n_p$ со старшим коэффициентом 1, характеризуемый условиями

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_{\vec{n}}(x) x^k w_j(x) dx = 0, \quad k = 0, \dots, n_j - 1, \quad j = 1, \dots, p. \quad (3.16)$$

В контексте СОМ-ансамблей (3.8), $P_{\vec{n}}$ определен однозначно и выражается как “усреднение характеристического многочлена” по ансамблю (3.8):

$$P_{\vec{n}}(z) = \mathbb{E} \left[\prod_{j=1}^n (z - x_j) \right]. \quad (3.17)$$

Таким образом,

$$P_{\vec{n}}(z) = \frac{1}{Z_n} \int_{\mathbb{R}_n} \prod_{j=1}^n (z - x_j) \prod_{i < j} (x_j - x_i) \det[\varphi_i(x_j)]_{i,j=1,\dots,n} dx_1 \cdots dx_n, \quad (3.18)$$

что дает нам представление $P_{\vec{n}}$ в виде n -кратного интеграла.

Многочлены $P_{\vec{n}}$ также называются совместно ортогональными многочленами типа II. Существует двойственная конструкция совместно ортогональных многочленов типа I. А именно, СОМ первого типа – это многочлены $A_{\vec{n},j}$, $j = 1, \dots, p$,

$$\deg A_{\vec{n},j} \leq n_j - 1, \quad (3.19)$$

для которых функция (линейная форма)

$$Q_{\vec{n}}(x) = \sum_{j=1}^p A_{\vec{n},j}(x) w_j(x) \quad (3.20)$$

удовлетворяет условиям ортогональности

$$\int x^k Q_{\vec{n}}(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } k = 0, \dots, |\vec{n}| - 2, \\ 1 & \text{при } k = |\vec{n}| - 1. \end{cases} \quad (3.21)$$

Опять-таки, в ситуации СОМ-ансамбля (3.8) совместно ортогональные многочлены типа I и форма (3.20) однозначно определены. Вдобавок, $Q_{\vec{n}}$ удовлетворяет равенству

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q_{\vec{n}}(x)}{z - x} dx = \mathbb{E} \left[\prod_{j=1}^n (z - x_j)^{-1} \right], \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},$$

что означает, что преобразование Коши $Q_{\vec{n}}$ является усреднением обращения характеристического многочлена случайного множества $x_1, \dots, x_n$ по ансамблю (3.8), см. также [59], [15].

В формуле Кристоффеля–Дарбу для корреляционного ядра (3.14) возникают многочлен $P_{\vec{n}}$, линейные формы $Q_{\vec{n}}$ и аналогичные объекты с соседними мультииндексами $\vec{n} \pm \vec{e}_j$, $j = 1, \dots, p$, где $\vec{e}_j = (\delta_{i,j})_{i=1,\dots,p}$ – p -мерный вектор с единицей на j -й позиции и нулевыми прочими компонентами. Будем предполагать, что все эти мультииндексы нормальны, так что и многочлены и линейные формы корректно определены. Обозначим также

$$h_{\vec{n},j} = \int P_{\vec{n}}(x) x^{n_j} w_j(x) dx, \quad j = 1, \dots, p. \quad (3.22)$$

При наших предположениях эти величины не обращаются в нуль.

ТЕОРЕМА 3.1 [20], [60]. Пусть $\vec{n}$ и $\vec{n} \pm \vec{e}_j$ – нормальные мультииндексы. Тогда корреляционное ядро (3.14) СОМ-ансамбля, порожденного p весами $w_1, \dots, w_p$ и мультииндексом $\vec{n} = (n_1, \dots, n_p)$, выражается в следующем виде:

$$(x - y) K_n(x, y) = P_{\vec{n}}(x) Q_{\vec{n}}(y) - \sum_{j=1}^p \frac{h_{\vec{n},j}}{h_{\vec{n}-\vec{e}_j,j}} P_{\vec{n}-\vec{e}_j}(x) Q_{\vec{n}+\vec{e}_j}(y). \quad (3.23)$$

При $p = 1$ формула (3.23) сводится к формуле Кристоффеля–Дарбу для ортогональных многочленов. По поводу обобщения на совместно ортогональные многочлены смешанного типа см. [61], [62], [15].

Прежде чем доказывать (3.23), мы обсудим задачу Римана–Гильберта для совместно ортогональных многочленов, что приведет нас также к естественной переформулировке (3.23).

3.4. Задача Римана–Гильберта. Задача Римана–Гильберта для ортогональных многочленов впервые была сформулирована А. Фокашем, А. Итсом и А. В. Китаевым [63]. На совместно ортогональные многочлены ее обобщили В. ВанASSE, Дж. Геронимо и А. Б. Э. Койэлаарс [19].

Предположим, что веса $w_1, \dots, w_p$ достаточно гладкие (достаточно C^1 -гладкости) и задан мультииндекс $\vec{n} = (n_1, \dots, n_p)$. Тогда в задаче Римана–Гильберта требуется найти $((p+1) \times (p+1))$ -матричнозначную функцию

$$Y: \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{(p+1) \times (p+1)},$$

удовлетворяющую следующим условиям:

- (i) Y аналитична в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$;
- (ii) $Y(z)$ имеет граничные пределы при $z \rightarrow x \in \mathbb{R}$ из верхней и нижней полуплоскостей, которые будем обозначать соответственно через $Y_+(x)$ и $Y_-(x)$; эти пределы удовлетворяют равенству

$$Y_+(x) = Y_-(x) \begin{pmatrix} 1 & w_1(x) & w_2(x) & \cdots & w_p(x) \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R};$$

- (iii) при $z \rightarrow \infty$

$$Y(z) = (I_{p+1} + O(z^{-1})) \begin{pmatrix} z^n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & z^{-n_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & z^{-n_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z^{-n_p} \end{pmatrix}.$$

Задача Римана–Гильберта однозначно разрешима, тогда и только тогда, когда однозначно определен совместно ортогональный многочлен $P_{\vec{n}}$ степени $n = |\vec{n}|$, удовлетворяющий (3.16). Если ортогональные многочлены $P_{\vec{n}-\vec{e}_j}$ также существуют, то единственное решение задачи Римана–Гильберта дается формулой

$$Y(z) = \begin{pmatrix} P_{\vec{n}}(z) & \cdots & \frac{1}{2\pi i} \int \frac{P_{\vec{n}}(x)w_p(x)}{x-z} dx \\ -\frac{2\pi i}{h_{\vec{n}-\vec{e}_1,1}} P_{\vec{n}-\vec{e}_1}(z) & \cdots & \frac{1}{h_{\vec{n}-\vec{e}_1,1}} \int \frac{P_{\vec{n}-\vec{e}_1}(x)w_p(x)}{x-z} dx \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{2\pi i}{h_{\vec{n}-\vec{e}_p,p}} P_{\vec{n}-\vec{e}_p}(z) & \cdots & \frac{1}{h_{\vec{n}-\vec{e}_p,p}} \int \frac{P_{\vec{n}-\vec{e}_p}(x)w_p(x)}{x-z} dx \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Легко видеть, что обратная транспонированная матрица

$$X(z) = Y^{-t}(z)$$

решает следующую задачу Римана–Гильберта:

- (i) X аналитична в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$;
- (ii) X имеет пределы $X_+(x)$ и $X_-(x)$ в точках $x \in \mathbb{R}$, и эти пределы удовлетворяют равенству

$$X_+(x) = X_-(x) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -w_1(x) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -w_2(x) & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -w_p(x) & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R};$$

- (iii) при $z \rightarrow \infty$

$$X(z) = (I_{p+1} + O(z^{-1})) \begin{pmatrix} z^{-n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & z^{n_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & z^{n_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z^{n_p} \end{pmatrix}.$$

Единственное решение этой задачи Римана–Гильберта использует совместно ортогональные многочлены типа I и выглядит следующим образом:

$$X(z) = \begin{pmatrix} \int \frac{Q_{\vec{n}}(x)}{z-x} dx & 2\pi i A_{\vec{n},1}(z) & \cdots & 2\pi i A_{\vec{n},p}(z) \\ \frac{h_{\vec{n},1}}{2\pi i} \int \frac{Q_{\vec{n}+\vec{e}_1}(x)}{z-x} dx & h_{\vec{n},1} A_{\vec{n}+\vec{e}_1,1}(z) & \cdots & h_{\vec{n},1} A_{\vec{n}+\vec{e}_1,p}(z) \\ \frac{h_{\vec{n},2}}{2\pi i} \int \frac{Q_{\vec{n}+\vec{e}_2}(x)}{z-x} dx & h_{\vec{n},2} A_{\vec{n}+\vec{e}_2,1}(z) & \cdots & h_{\vec{n},2} A_{\vec{n}+\vec{e}_2,p}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{h_{\vec{n},p}}{2\pi i} \int \frac{Q_{\vec{n}+\vec{e}_p}(x)}{z-x} dx & h_{\vec{n},p} A_{\vec{n}+\vec{e}_p,1}(z) & \cdots & h_{\vec{n},p} A_{\vec{n}+\vec{e}_p,p}(z) \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

Сравнивая (3.23), (3.24) и (3.25), мы видим, что

$$\begin{aligned} (x-y)K_n(x,y) &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^p w_j(y) [Y_+^{-1}(y)Y_+(x)]_{j+1,1} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \begin{pmatrix} 0 & w_1(y) & \cdots & w_p(y) \end{pmatrix} Y_+^{-1}(y)Y_+(x) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

что является удобным выражением для ядра Кристоффеля–Дарбу (3.23).

3.5. Доказательство теоремы 3.1. Докажем теорему 3.1 в форме (3.26). Наше доказательство напоминает доказательство в [62].

Ядро K_n из (3.14) является подпространством нулей (неортогонального) проеکتора на пространство многочленов. Иными словами, если мы используем то же обозначение K_n для оператора

$$(K_n g)(x) = \int K_n(x, y) g(y) dy,$$

то $K_n g = g$ для полиномов g степени $\leq n - 1$. Пространство нулей K_n состоит из всех g таких, что $\int \varphi_j(x) g(x) dx = 0$ для каждого $j = 1, \dots, n$.

Доказательство сводится к проверке аналогичных утверждений для оператора, задаваемого правой частью (3.26). Итак, если $L_n(x, y)$ – это выражение в правой части (3.26) и

$$(L_n g)(x) = \int L_n(x, y) g(y) dy,$$

то мы докажем, что

- (а) $L_n g = g$, если g – многочлен степени $\leq n - 1$,
- (б) $L_n g = 0$, если для всякого $j = 1, \dots, n$ выполнено равенство

$$\int \varphi_j(x) g(x) dx = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (а). Пусть g – многочлен степени $\leq n - 1$. Тогда в силу (3.26)

$$\begin{aligned} (L_n g)(x) = & \left(\frac{1}{2\pi i} \int \frac{g(y) - g(x)}{x - y} \begin{pmatrix} 0 & w_1(y) & \cdots & w_p(y) \end{pmatrix} Y_+^{-1}(y) dy \right) Y_+(x) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ & + \frac{g(x)}{2\pi i} \int \begin{pmatrix} 0 & w_1(y) & \cdots & w_p(y) \end{pmatrix} Y_+^{-1}(y) Y_+(x) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \frac{dy}{x - y}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Поскольку $Y^{-1} = X^t$, мы видим из (3.25), что элементы Y^{-1} в строках со 2-й по p -ю являются совместно ортогональными многочленами типа I. Компоненты вектор-строки

$$\begin{pmatrix} 0 & w_1(y) & \cdots & w_p(y) \end{pmatrix} Y_+^{-1}(y)$$

являются линейными формами как в (3.20), поскольку

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & w_1(y) & \cdots & w_p(y) \end{pmatrix} Y_+^{-1}(y) \right]_k = \begin{cases} 2\pi i Q_{\vec{n}}(y), & k = 1, \\ h_{\vec{n}, k-1} Q_{\vec{n} + \vec{e}_{k-1}}(y), & k = 2, \dots, p + 1. \end{cases} \quad (3.28)$$

Для всякого x видим, что $\frac{g(y) - g(x)}{x - y}$ – многочлен от y степени $\leq n - 2$. Тогда первое слагаемое в правой части (3.27) равно 0 в силу (3.28) и условий совместной ортогональности первого типа (3.21).

Остается рассмотреть второе слагаемое в правой части (3.27), для которого из (3.28) и (3.25) получаем

$$\begin{aligned}(L_n g)(x) &= g(x) \int \left(Q_{\bar{n}}(y) Y_{11}(x) + \sum_{k=2}^{p+1} \frac{h_{\bar{n}, k-1}}{2\pi i} Q_{\bar{n} + \bar{e}_{k-1}}(y) Y_{k1}(x) \right) \frac{dy}{x-y} \\ &= g(x) \sum_{k=1}^p X_{k1,+}(x) Y_{k1}(x) = g(x).\end{aligned}$$

Последнее равенство выполнено, поскольку $X = Y^{-t}$. Тем самым часть (a) доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (b). Пусть для g выполнено $\int \varphi_j(y) g(y) dy = 0$ при $j = 1, \dots, n$. Тогда

$$\begin{aligned}(L_n g)(x) &= \left(\frac{1}{2\pi i} \int g(y) \begin{pmatrix} 0 & w_1(y) & \dots & w_p(y) \end{pmatrix} \frac{Y_+^{-1}(y) - Y_+^{-1}(x)}{x-y} dy \right) Y_+(x) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int g(y) \begin{pmatrix} 0 & w_1(y) & \dots & w_p(y) \end{pmatrix} Y_+^{-1}(x) Y_+(x) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \frac{dy}{x-y},\end{aligned}\tag{3.29}$$

где второе слагаемое справа с очевидностью нулевое. Поскольку $X = Y^{-t}$, из (3.24) и (3.19) мы видим, что элементы в $(k+1)$ -й строке, $k = 1, \dots, p$, матрицы $\frac{Y_+^{-1}(y) - Y_+^{-1}(x)}{x-y}$ являются многочленами от y степеней $\leq n_k - 1$. Так что все компоненты вектор-строки

$$\begin{pmatrix} 0 & w_1(y) & \dots & w_p(y) \end{pmatrix} \frac{Y_+^{-1}(y) - Y_+^{-1}(x)}{x-y}$$

лежат в линейной оболочке функций (3.9), которая совпадает с линейной оболочкой функций $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ в силу определения СОМ-ансамбля. Поскольку $\int \varphi_j(y) g(y) dy = 0$ для всех $j = 1, \dots, n$, мы видим теперь, что $L_n g = 0$. Тем самым часть (b) доказана.

4. Случайные матрицы с внешним источником

Модель эрмитовых случайных матриц с внешним источником – это обобщение унитарной модели случайных матриц (3.1), в котором отброшена унитарная инвариантность. Эта модель была введена и первоначально рассмотрена в физической литературе [64]–[66]. Рассмотрим потенциал V вида (3.1) и фиксированную эрмитову матрицу A размера $n \times n$. Тогда ансамбль случайных матриц с внешним источником задается вероятностной мерой

$$\frac{1}{Z_n} e^{-\text{Tr}(V(M) - AM)} dM\tag{4.1}$$

на пространстве эрмитовых матриц M размера $n \times n$. В силу унитарной инвариантности dM и следа, мера (4.1) зависит только от собственных значений внешнего источника A , и без ущерба для общности мы можем считать A диагональной матрицей, скажем,

$$A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n),$$

где $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$.

4.1. Модель с внешним источником как СОМ-ансамбль. Спектральное разложение эрмитовой матрицы M (см. [9])

$$M = UXU^{-1}, \quad X = \text{diag}(x_1, \dots, x_n),$$

где U унитарна, а $x_1, \dots, x_n$ – собственные значения M , можно трактовать как замену переменных. Якобиан этой замены пропорционален $\prod_{j>i} (x_j - x_i)^2$,

а потому (4.1) порождает следующую плотность вероятности на собственных значениях M (после усреднения по собственным векторам):

$$\frac{1}{\widehat{Z}_n} \prod_{j>i} (x_j - x_i)^2 \prod_{j=1}^{n-1} e^{-V(x_j)} \int_{U(n)} e^{AUXU^{-1}} dU, \quad (4.2)$$

где dU – мера Хаара на унитарной группе $U(n)$. Интеграл в (4.2) можно вычислить явно с помощью формулы Хариш–Чандры в модификации Итзиксона–Зубера [67]

$$\int_{U(n)} e^{AUXU^{-1}} dU = \left(\prod_{j=0}^{n-1} j! \right) \frac{\det[e^{a_i x_j}]_{i,j=1,\dots,n}}{\prod_{j>i} (a_j - a_i) \prod_{j>i} (x_j - x_i)}, \quad (4.3)$$

выполняющейся для попарно различных a_i и x_j . В случае, когда некоторые из a_i (или некоторые из x_j) совпадают, надо перейти в (4.3) к соответствующему пределу (при $a_i \rightarrow a_j$).

Подставив (4.3) в (4.2), найдем плотность вероятности:

$$\mathcal{P}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{Z_n(\vec{a})} \prod_{j>i} (x_j - x_i) \det[e^{a_i x_j}]_{i,j=1,\dots,n} \prod_{j=1}^n e^{-V(x_j)} \quad (4.4)$$

с новой константой

$$Z_n(\vec{a}) = \widehat{Z}_n \left(\prod_{j=0}^{n-1} j! \right)^{-1} \prod_{j>i} (a_j - a_i),$$

которая зависит от собственных значений a_j внешнего источника. Заметим, что равенство (4.4) имеет вид (3.8) с функциями $\varphi_i(x) = e^{-(V(x) - a_i x)}$. Оно выполняется, когда все a_i различны.

Предположим теперь, что не все a_i различны, а именно, пусть $a_1, \dots, a_p$ – различные собственные значения A и кратность a_j как собственного значения A равна n_j . Тогда, переходя в (4.4) к соответствующему пределу получим ансамбль совместно ортогональных многочленов (3.8), порожденный p весами

$$w_j(x) = e^{-(V(x) - a_j x)}, \quad j = 1, \dots, p, \quad (4.5)$$

и мультииндексом $(n_1, \dots, n_p)$.

4.2. Асимптотика для больших n . Чтобы разобраться в асимптотике случайных матриц с внешним источником (4.1) для больших n , важно для начала вспомнить аналогичную асимптотику стандартной модели случайных матриц (3.1) (без внешнего источника). Для получения нетривиальной асимптотики для больших n уместно заменить V на nV , что создаст асимптотический баланс между отталкиванием собственных значений и ограничивающим потенциалом. Тогда ортогональные многочлены в корреляционном ядре (3.3) будут зависеть от n . Пусть $p_{k,n}$ – многочлен степени k , ортогональный с весом $e^{-nV(x)}$. Тогда корреляционное ядро (3.3) принимает вид

$$K_n(x, y) = \sqrt{e^{-nV(x)}e^{-nV(y)}} \sum_{k=0}^{n-1} p_{k,n}(x)p_{k,n}(y). \quad (4.6)$$

Теперь мы можем рассмотреть предел при росте n в глобальном (макроскопическом) или локальном (микроскопическом) режимах. В глобальном режиме рассматривается предел глобального распределения собственных значений. Средняя плотность собственных значений равна

$$\rho_n(x) = \frac{1}{n} K_n(x, x),$$

и интерес представляет предел $\rho_n(x)$ при $n \rightarrow \infty$. Он действительно существует, и предельная плотность характеризуется классической задачей равновесия во внешнем поле из теории логарифмического потенциала [68]: требуется минимизировать

$$\iint \ln \frac{1}{|x-y|} d\mu(x) d\mu(y) + \int V(x) d\mu(x) \quad (4.7)$$

по всем вероятностным мерам μ на $\mathbb{R}$. Существует единственная точка минимума μ^* , которая обладает плотностью относительно меры Лебега (при условии, что V имеет гладкость C^2), и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} K_n(x, x) = \rho(x) := \frac{d\mu^*}{dx}. \quad (4.8)$$

В локальном режиме рассматривается поведение спектра на малых масштабах, позволяющих различать отдельные собственные значения. Основной чертой случайных матриц является универсальность локальной асимптотики собственных значений при больших n . А именно, это поведение не зависит от потенциала V . В терминах корреляционного ядра (4.5) эта универсальность выражается предельным соотношением

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\rho(x_0)} K_n\left(x_0 + \frac{x}{n\rho(x_0)}, x_0 + \frac{y}{n\rho(x_0)}\right) = \frac{\sin \pi(x-y)}{\pi(x-y)}, \quad (4.9)$$

выполняющимся для любой точки x_0 , в которой $\rho(x_0) > 0$. Выражение в правой части (4.9) называется синус-ядром (см., к примеру, [45], [49]).

На краю носителя μ^* асимптотическое поведение отличается от (4.9). Рассмотрим типичный случай, когда x_0 – правый конец носителя, а плотность ρ меры μ^* убывает как корень квадратный:

$$\rho(x) = \frac{c}{\pi} (x_0 - x)^{1/2} (1 + o(1)) \quad \text{при } x \rightarrow x_0,$$

где $c > 0$. В этом случае

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(cn)^{2/3}} K_n \left(x_0 + \frac{x}{(cn)^{2/3}}, x_0 + \frac{y}{(cn)^{2/3}} \right) = \frac{\text{Ai}(x) \text{Ai}'(y) - \text{Ai}'(x) \text{Ai}(y)}{x - y}, \quad (4.10)$$

где Ai – функция Эйри, являющаяся единственным решением дифференциального уравнения Эйри $y''(x) = xy(x)$ и имеющая асимптотику

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi} x^{1/4}} e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}} (1 + O(x^{-3/2})) \quad \text{при } x \rightarrow +\infty.$$

Наша цель – обобщить эти результаты на случайные матрицы с внешним источником и на более общие ансамбли совместно ортогональных многочленов. Фиксируем $p \geq 2$ и веса $w_1, \dots, w_p$ (возможно, зависящие от n). Для всякого n рассмотрим мультииндекс $\vec{n} = (n_1, \dots, n_p)$ с $n = |\vec{n}|$, а при $n \rightarrow \infty$ обычно предполагается существование пределов

$$\lim \frac{n_j}{n} = r_j. \quad (4.11)$$

Теперь, в зависимости от ситуации, мы либо хотим выразить глобальный режим (4.8) через меру μ^* , доставляющую минимум в задаче равновесия типа (4.7), либо в локальном режиме стремимся получить синус-ядро (4.9) или ядро Эйри (4.10) в качестве пределов масштабированного корреляционного ядра в типичной точке x_0 . А в особых точках мы хотим выявить новые типы асимптотического поведения, выражаемые через какие-либо предельные ядра.

Результаты, полученные в этом направлении, еще далеки от окончательных. В оставшейся части раздела мы опишем новые результаты по случайно-матричной модели с внешним источником, а в следующих разделах – результаты по другим моделям, приводящим к ортогональным полиномам. Основным методом получения асимптотик является метод наискорейшего спуска Дейффа–Чжоу для задачи Римана–Гильберта в приложении к задаче Римана–Гильберта для совместно ортогональных многочленов. Задача Римана–Гильберта ставится для матриц размера 3×3 или больше, что приводит к новым интересным свойствам при асимптотическом анализе по сравнению с задачей для (2×2) -матриц, однако в настоящей работе мы в эти вопросы не углубляемся.

4.3. Гауссова модель с внешним источником. Чтобы в случайно-матричной модели с внешним источником получить интересное асимптотическое поведение для больших n , заменим в (4.1) V на nV и A на nA ; таким образом мы будем рассматривать модель

$$\frac{1}{\widetilde{Z}_n} e^{-n \text{Tr}(V(M) - AM)} dM. \quad (4.12)$$

Гауссов случай $V(x) = x^2/2$ соответствует весам

$$w_j(x) = e^{-n(\frac{1}{2}x^2 - a_j x)}, \quad j = 1, \dots, p, \quad (4.13)$$

т. е. гауссовым весам, центрированным в a_j . Совместно ортогональные многочлены для таких весов называются совместно ортогональными многочленами

Рис. 14. Структура римановой поверхности для уравнения (4.15) при $a > 1$ (слева), $a = 1$ (посередине) и $0 < a < 1$ (справа). Во всех случаях собственные значения M скапливаются на отрезках на первом листе с плотностью, заданной в (4.16).

Эрмита; у них много специальных свойств, например, явно выписываемые дифференциальные уравнения и рекуррентные коэффициенты [69]. Гауссов случай с очень специальным внешним источником

$$A = \text{diag}(\underbrace{a, \dots, a}_{n/2}, \underbrace{-a, \dots, -a}_{n/2}), \quad (4.14)$$

где $a > 0$ – фиксированный параметр, а n – четное, анализировался в трех работах [21], [11], [22]. Пусть $K_n(x, y; a)$ – корреляционное ядро для собственных значений СОМ-ансамбля, отвечающего случайно-матричной модели (4.12) с $V(x) = x^2/2$ и с внешним источником (4.14).

Глобальный режим описывается в терминах алгебраического уравнения (Пастура [70])

$$\xi^3 - z\xi^2 + (1 - a^2)\xi + a^2z = 0, \quad (4.15)$$

задающего алгебраическую функцию $\xi(z)$ на трехлистной римановой поверхности. У функции в (4.15) есть точки ветвления $\pm z_1(a)$ и $\pm z_2(a)$, где

$$z_1(a) = \frac{(8a^4 + 20a^2 - 1 + (8a^2 + 1)^{3/2})^{1/2}}{2\sqrt{2}a},$$

$$z_2(a) = \frac{(8a^4 + 20a^2 - 1 - (8a^2 + 1)^{3/2})^{1/2}}{2\sqrt{2}a}.$$

Точка ветвления $z_1(a)$ всегда положительная вещественная. При $a > 1$ точка ветвления $z_2(a)$ тоже положительная вещественная и $0 < z_2(a) < z_1(a)$. При $a = 1$ имеем $z_2(a) = 0$, и при $0 < a < 1$ точка ветвления $z_2(a)$ чисто мнимая. Структура листов римановой поверхности показана на рис. 14 для случаев $a > 1$, $a = 1$ и $0 < a < 1$.

У уравнения (4.15) есть решение $\xi_1(z)$, удовлетворяющее условию

$$\xi_1(z; a) = z - \frac{1}{z} + O(z^{-2}) \quad \text{при } z \rightarrow \infty$$

и продолжающееся на первый лист римановой поверхности. Во всех случаях предельная средняя плотность собственных значений имеет вид

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} K_n(x, x; a) = \rho(x; a) \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \xi_{1,+}(x; a), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (4.16)$$

где $\xi_{1,+}(x; a)$ – предельное значение $\xi_1(z; a)$ при $z \rightarrow x \in \mathbb{R}$ для $\operatorname{Im} z > 0$.

В локальном режиме мы получаем синус-ядро (4.9) в $x_0 \in (-z_1(a), z_1(a))$, если $0 < a < 1$, и в $x_0 \in (-z_1(a), -z_2(a)) \cup (z_2(a), z_1(a))$, если $a > 1$. Предел будет описываться ядром Эйри (4.10) (с соответствующими модификациями для левой концевой точки) в точках ветвления $x_0 = \pm z_1(a)$ (во всех случаях) и в $x_0 = \pm z_2(a)$ при $a > 1$.

Новым эффектом в этой модели является фазовый переход при $a = 1$. В глобальном режиме в силу (4.16) получаем

$$\rho(x; 1) = \frac{\sqrt{3}}{2} |x|^{1/3} + O(x) \quad \text{при } x \rightarrow 0. \quad (4.17)$$

Новый показатель степени $1/3$ у предельной плотности указывает также на изменение локального поведения в $x = 0$. Оно, действительно, другое и, как показывает следующая теорема, при двойном масштабировании имеется следующий предел [64], [71], [22].

ТЕОРЕМА 4.1. *Для всякого фиксированного $b \in \mathbb{R}$*

$$\frac{1}{n^{3/4}} K_n\left(\frac{x}{n^{3/4}}, \frac{y}{n^{3/4}}; 1 + \frac{b}{2\sqrt{n}}\right) = K^{\text{Pe}}(x, y; b), \quad (4.18)$$

где K^{Pe} – ядро Пирси:

$$K^{\text{Pe}}(x, y; b) = \frac{p(x)q''(y) - p'(x)q'(y) + p''(x)q(y) - bp(x)q(y)}{x - y}, \quad (4.19)$$

в котором

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{4}s^4 - \frac{b}{2}s^2 + isx} ds \quad \text{и} \quad q(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} e^{\frac{1}{4}t^4 + \frac{b}{2}t^2 + ity} dt. \quad (4.20)$$

Контур Σ образован четырьмя лучами $\arg y = \pm\pi/4, \pm 3\pi/4$, ориентированными как на рис. 15.

Функции (4.20) называются интегралами Пирси. Они являются решениями дифференциальных уравнений третьего порядка

$$p''(x) = xp(x) + bp'(x), \quad q''(y) = -yq(y) + bq'(y). \quad (4.21)$$

Э. Брезин и Ш. Хиками [64] получили также представление ядра Пирси (4.19) в виде двойного интеграла:

$$K^{\text{Pe}}(x, y; b) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{4}s^4 + \frac{b}{2}s^2 - ys + \frac{1}{4}t^4 - \frac{b}{2}t^2 + xt\right\} \frac{ds dt}{s - t}. \quad (4.22)$$

Рис. 15. Контур Σ , участвующий в определении (4.20) функции $q(y)$

4.4. Негауссова модель с внешним источником. Анализ гауссовой случайно-матричной модели с внешним источником методом наискорейшего спуска был проведен в [21], [11], [22] на базе алгебраического уравнения (4.15). Если потенциал V из (4.12) – многочлен высокой степени, а внешний источник имеет вид (4.14), то все равно можно предположить существование алгебраического уравнения третьего порядка (спектральной кривой), которую можно использовать при асимптотическом анализе. Род соответствующей римановой поверхности может оказаться выше, и, по-видимому, выписать ее явно в общем случае было бы очень трудно. Однако в [72] разбирается модель четвертой степени $V(x) = x^4/4$ при достаточно больших a .

Альтернативный подход был разработан в [14] (см. также [12], [13]), где алгебраическое уравнение в конечном счете следует из задачи векторного равновесия для пары мер. Этот подход годится для случая векторно-матричной модели с внешним источником (4.12), когда потенциал является четным полиномом

$$V(x) = \sum_{j=1}^d v_j x^{2d}, \quad v_d > 0, \quad (4.23)$$

а внешний источник имеет вид (4.14) с $a > 0$. В задаче векторного равновесия, рассматриваемой в [14], требуется минимизировать следующий функционал энергии, обобщающий (4.7):

$$\begin{aligned} & \iint \ln \frac{1}{|x-y|} d\mu_1(x) d\mu_1(y) + \iint \ln \frac{1}{|x-y|} d\mu_2(x) d\mu_2(y) \\ & - \iint \ln \frac{1}{|x-y|} d\mu_1(x) d\mu_2(y) + \int (V(x) - a|x|) d\mu_1(x). \end{aligned} \quad (4.24)$$

В функционал (4.24) входят две меры, μ_1 и μ_2 , и предполагается, что

- (а) у μ_1 и μ_2 конечная логарифмическая энергия,
- (б) μ_1 – мера на $\mathbb{R}$ массы 1,
- (с) μ_2 – мера на $i\mathbb{R}$ массы $1/2$, удовлетворяющая ограничению

$$\mu_2 \leq \sigma, \quad (4.25)$$

где σ – мера на $i\mathbb{R}$ с постоянной плотностью

$$\frac{d\sigma}{|dz|} = \frac{a}{\pi}, \quad z \in i\mathbb{R}. \quad (4.26)$$

Важной особенностью является наличие ограничения сверху σ на меру μ_2 (см. (4.25)), в то время как внешнее поле $V(x) - a|x|$ действует на μ_1 . Задачи равновесия с ограничением сверху впервые возникли в контексте многочленов ортогональных по дискретной мере (см. [73]–[75]). Взаимодействие μ_1 и μ_2 в (4.24) происходит по никишинскому типу [34]. В работах [12], [13] рассматривалась эквивалентная (4.24)–(4.26) задача равновесия векторного потенциала трех мер, аналогичная задачам равновесия из разделов 1 и 2 настоящей статьи (с той же матрицей взаимодействия и с теми же соотношениями на вариации мер, но с добавлением внешних полей, задаваемых потенциалом внешнего источника $V(x) = x^4/4 - tx^2/2$).

ТЕОРЕМА 4.2. *Функционал энергии имеет единственную точку минимума (μ_1^*, μ_2^*) на множестве всех векторнозначных мер (μ_1, μ_2) , удовлетворяющих условиям (а), (b), (c). Точка минимума обладает следующими свойствами.*

- (i) *Носитель μ_1^* ограничен и является объединением конечного числа отрезков:*

$$S(\mu_1^*) = \bigcup_{j=1}^N [a_j, b_j]. \quad (4.27)$$

- (ii) *Носитель μ_2^* совпадает с мнимой осью и для некоторого $c \geq 0$*

$$S(\sigma - \mu_2^*) = (-i\infty, -ic] \cup [ic, i\infty). \quad (4.28)$$

- (iii) *μ_1^* обладает плотностью ρ по мере Лебега. В регулярном случае (см. разъяснения ниже) ρ совпадает с предельной средней плотностью собственных значений случайной матрицы M в модели с внешним источником (4.12) при $n \rightarrow \infty$:*

$$\rho(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} K_n(x, x),$$

где K_n – корреляционное ядро для собственных значений в модели (4.12).

Сходимость в (iii) доказана только в регулярном случае, хотя она предположительно имеет место и в общем случае.

“Регулярность” описывается в терминах вариационных условий, связанных с векторной задачей равновесия. Существует константа ℓ , для которой

$$2V^{\mu_1^*}(x) = V^{\mu_2^*}(x) - V(x) + a|x| - \ell, \quad x \in S(\mu_1^*), \quad (4.29)$$

$$2V^{\mu_1^*}(x) \geq V^{\mu_2^*}(x) - V(x) + a|x| - \ell, \quad x \in \mathbb{R} \setminus S(\mu_1^*), \quad (4.30)$$

где V^μ – логарифмический потенциал μ (см. (1.26)). Мы будем говорить, что μ_1^* регулярна, если плотность μ_1^* положительна во внутренних точках каждого отрезка $[a_j, b_j]$ из $S(\mu_1^*)$, убывает на концах отрезков как корень квадратный и в вариационном условии (4.30) выполнено строгое неравенство. Мы будем

говорить, что μ_2^* регулярна, если $c > 0$ (см. (4.28)) или если $c = 0$ и в (4.25) выполнено строгое неравенство:

$$\frac{d\mu_2^*(z)}{|dz|} < \frac{a}{\pi}, \quad z \in i\mathbb{R}.$$

Обычные масштабируемые пределы локальных режимов, синус-ядро (4.9) во внутренних точках x_0 носителя $S(\mu_1^*)$ и ядро Эйри (4.10) в концевых точках $x_0 \in \{a_1, b_1, \dots, a_N, b_N\}$ также получаются с помощью анализа, проведенного в [14].

Рис. 16. Риманова поверхность в случае **I**, когда $S(\sigma - \mu_2^*) = i\mathbb{R}$

Рис. 17. Риманова поверхность в случае **II**, когда $0 \notin S(\mu_1^*) \cap S(\sigma - \mu_2^*)$

Основным инструментом анализа в [14] является трехлистная риманова поверхность, строящаяся следующим образом по решению векторной задачи равновесия. Носители $S(\mu_1^*)$ и $S(\sigma - \mu_2^*)$ участвуют в определении трех листов:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_1 &= \overline{\mathbb{C}} \setminus S(\mu_1^*), \\ \mathfrak{R}_2 &= \overline{\mathbb{C}} \setminus (S(\mu_1^*) \cup S(\sigma - \mu_2^*)), \\ \mathfrak{R}_3 &= \overline{\mathbb{C}} \setminus S(\sigma - \mu_2^*), \end{aligned} \quad (4.31)$$

склеиваемых по разрезам $S(\mu_1^*)$ и $S(\sigma - \mu_2^*)$, как обычно, крест-накрест, что дает компактную риманову поверхность $\mathfrak{R}$. В регулярном случае 0 лежит не более чем на одном из разрезов $S(\mu_1^*)$ или $S(\sigma - \mu_2^*)$ и можно выделить следующие три случая.

Случай I: $0 \notin S(\mu_1^*)$ и $0 \in S(\sigma - \mu_2^*)$,

Случай II: $0 \notin S(\mu_1^*)$ и $0 \notin S(\sigma - \mu_2^*)$,

Случай III: $0 \in S(\mu_1^*)$ и $0 \notin S(\sigma - \mu_2^*)$.

Первые два случая изображены на рис. 16, 17.

Во всех случаях положим

$$\begin{aligned} \xi_1(z) &= V'(z) - \int \frac{d\mu_1^*(s)}{z-s}, & z \in \mathfrak{R}_1, \\ \xi_2(z) &= \pm a + \int \frac{d\mu_1^*(s)}{z-s} - \int \frac{d\mu_2^*(s)}{z-s}, & z \in \mathfrak{R}_2, \quad \pm \operatorname{Re} z > 0, \\ \xi_3(z) &= \mp a + \int \frac{d\mu_2^*(s)}{z-s}, & z \in \mathfrak{R}_3, \quad \pm \operatorname{Re} z > 0. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Оказывается, что эти функции аналитически продолжаются до мероморфной функции на компактной римановой поверхности с единственным полюсом на бесконечности первого листа. Это следует из вариационных условий, связанных с векторной задачей равновесия. Три функции ξ_j оказываются теперь тремя решениями алгебраического уравнения с полиномиальными коэффициентами

$$\xi^3 + p_2(z)\xi^2 + p_1(z)\xi + p_0(z) = 0.$$

В результате, из векторной задачи равновесия мы получили спектральную кривую. Для потенциала внешнего источника $V(x) = x^4/4 - tx^2/2$ явный вид коэффициентов уравнения спектральной кривой был получен в [12].

Дальнейшее доказательство теоремы 4.2 состоит в анализе методом наискорейшего спуска задачи Римана–Гильберта для совместно ортогональных многочленов, аналогичной задаче из п. 3.4 и имеющей теперь размер 3×3 :

- (i) $Y: \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{3 \times 3}$ – аналитическая функция;
- (ii) $Y_+(x) = Y_-(x) \begin{pmatrix} 1 & e^{-n(V(x)-ax)} & e^{-n(V(x)+ax)} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ при $x \in \mathbb{R}$,
- (iii) $Y(z) = (I_3 + O(z^{-1})) \begin{pmatrix} z^n & 0 & 0 \\ 0 & z^{-n/2} & 0 \\ 0 & 0 & z^{-n/2} \end{pmatrix}$ при $z \rightarrow \infty$.

Этот анализ заключается в последовательности явно описанных преобразований $Y \mapsto X \mapsto T \mapsto S \mapsto R$, приводящих к задаче Римана–Гильберта для функции R , нормированной на бесконечности (а именно, $R(z) = I + O(1/z)$ при $z \rightarrow \infty$) и со скачком, стремящимся к тождественной матрице при $n \rightarrow \infty$. В результате получаем, что $R(z) \rightarrow I$ равномерно по z при $n \rightarrow \infty$. Ступени анализа методом наискорейшего спуска слишком сложны для изложения в настоящем обзоре.

Случаи, переходные между тремя вышеописанными, представляют нерегулярное поведение. В случае общего четного потенциала четвертой степени

$$V(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{t}{2}x^2$$

можно описать переходные случаи явно. Это дает фазовую диаграмму на рис. 18, заимствованную из [14] (см. также [13]).

Переход от случая I к случаю III происходит по типу Пирси, с которым мы уже сталкивались в гауссовом случае. Таким образом, существует предел двойного масштабирования, выражаемый через ядро Пирси, как в (4.18). Переход от случая I к случаю II носит иной характер. Тут тоже стягивается лакуна в носителе меры μ_1^* , но при этом также меняется род римановой поверхности. Это напоминает стягивание (или появление) лакуны в одноматричной модели, которая, как известно, описывается семейством ядер, построенных из решений пар Лакса, связанных с решением Гастингса–Маклеода уравнения Пенлеве II (см. [76], [77]). Также и переход от случая I к случаю II имеет тип Пенлеве II, хотя теперь лакуна открывается в носителе меры $\sigma - \mu_2^*$ на мнимой оси. Это сказывается только на втором и третьем (нефизических) листах и потому не приводит к какому-либо особому критическому поведению в локальной асимптотике собственных значений.

Рис. 18. Фазовая диаграмма для потенциала четвертой степени $x^4/4 - tx^2/2$. Сплошная кривая соответствует переходу по типу Пенлеве II. Прерывистая кривая соответствует переходу по типу Пирси.

5. Ансамбли непересекающихся путей

Собственные значения случайных матриц приводят к детерминантным случайным процессам, которые, как мы видели, могут редуцироваться к СОМ-ансамблям. Другим важным источником детерминантных случайных процессов являются ансамбли непересекающихся траекторий. В некоторых специальных случаях они также сводятся к СОМ-ансамблям.

5.1. Непересекающиеся броуновские движения. Постановка задачи для ансамблей непересекающихся путей следующая. Рассмотрим одномерный диффузионный процесс. Это строго марковский процесс на вещественной прямой с непрерывными реализациями. Рассмотрим n независимых копий с заданными начальными позициями $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ в момент времени $t = 0$. Тогда в силу замечательной формулы Карлина–Макгрегора [78] плотность вероятности для события попадания траекторий в точки $x_1, \dots, x_n$ в момент времени $t > 0$, при условии, что никакие две траектории не должны пересечься на интервале $[0, t]$, пропорциональна определителю

$$\det[p_t(a_i, x_j)]_{i,j=1,\dots,n}, \quad x_1 < x_2 < \dots < x_n, \quad (5.1)$$

где $p_t(a, x)$ — переходная плотность вероятности диффузионного процесса.

Сам по себе определитель (5.1) не приводит к детерминантному точечному процессу. Однако это случится, если предписать конечные позиции в некоторый позднейший момент. Действительно, рассматривая n непрерывных копий с заданными начальными позициями $a_1 < \dots < a_n$ и заданными конечными позициями $b_1 < \dots < b_n$ в момент $T > 0$, то событие, заключающееся в том, что в момент времени $t \in (0, T)$ траектории оказались в предписанных точках, при том, что никакие две из них не пересекаются на интервале $[0, T]$, имеет плотность вероятности, пропорциональную произведению двух определителей

$$\det[p_t(a_i, x_j)]_{i,j=1,\dots,n} \det[p_{T-t}(x_j, b_i)]_{i,j=1,\dots,n}. \quad (5.2)$$

Фактически это следует из строгой марковости.

Иными словами, при условии, что на всем временном интервале $[0, T]$ траектории не пересекаются, плотность вероятности для позиций в момент времени $t \in (0, T)$ равна

$$\frac{1}{Z_n} \det[p_t(a_i, x_j)]_{i,j=1,\dots,n} \det[p_{T-t}(x_j, b_i)]_{i,j=1,\dots,n} \quad (5.3)$$

с некоторым нормировочным множителем Z_n . Выражение (5.3) инвариантно относительно перестановок по x_j , так что после симметризации мы можем рассматривать (5.3) как плотность вероятности на всем пространстве $\mathbb{R}^n$ (с другим нормировочным множителем), что мы, как правило, и будем делать.

Плотность вероятности (5.3) действительно соответствует детерминантному точечному процессу, а точнее, биортогональному ансамблю (ср. (3.15) и см. [57]). Лишь в исключительных случаях она сводится к выражению (3.8) для СОМ-ансамбля. Основной пример, когда такое сведение происходит, – это случай броуновского движения (точнее, броуновских мостов), когда переходная плотность вероятности есть

$$p_t(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{2t}\right\}, \quad t > 0. \quad (5.4)$$

При полном вырождении, когда все a_i и все b_i стремятся к 0, переходная плотность вероятности (5.3) имеет предел, выражаемый как

$$\frac{1}{Z_n} \prod_{1 \leq j < k \leq n} (x_k - x_j)^2 \prod_{j=1}^n \exp\left\{-\frac{T}{2t(T-t)} x_j^2\right\}$$

с новой константой Z_n . Это совпадает с плотностью вероятности (3.2) собственных значений унитарного инвариантного ансамбля случайных матриц с потенциалом $V(x) = \frac{T}{2t(T-t)} x^2$. С точностью до нормировки, это гауссов унитарный ансамбль.

Снова положим $b_i \rightarrow 0$ в (5.3), но будем рассматривать случай p различных начальных значений, которые мы обозначим через $a_1, \dots, a_p$, так что пусть n_j траекторий стартуют из точки a_j . Тогда (5.3), (5.4) становится СОМ-ансамблем, порожденным весами

$$w_j(x) = \exp\left\{-\frac{T}{2t(T-t)} x^2 + \frac{a_j}{t} x\right\}, \quad j = 1, \dots, p, \quad (5.5)$$

и мультииндексом $(n_1, \dots, n_p)$. С точностью до нормировочного коэффициента эти веса совпадают с весами в (4.13), связанными с гауссовой матричной моделью с внешним источником. Вывод заключается в том, что собственные значения в этой случайно-матричной модели можно трактовать как позиции, занимаемые n непересекающимися броуновскими траекториями с p начальными положениями и одним и тем же конечным положением.

На рис. 19 мы приводим иллюстрацию, с $p = 2$ начальными положениями и $T = 1$. Из рисунка видно, что с ростом n должна вырисовываться предельная фигура (после подходящей нормировки дисперсии броуновского движения).

Рис. 19. Непересекающиеся броуновские мосты, с началом в двух разных точках и концом в 0. В любой момент $t \in (0, 1)$ позиции, занимаемые траекториями, имеют то же распределение, что и собственные значения гауссовой случайной матрицы размера $n \times n$ с внешним источником. Это распределение является совместно ортогональным многочленом относительно двух гауссовых весов вида (5.5).

И действительно, мы видим сердцевидную предельную область, содержащую траектории при $n \rightarrow \infty$. Для малых t траектории остаются разбитыми на две далеко отстоящие группы. Это соответствует большим значениям a в модели с внешним источником. В некоторый критический момент группы смыкаются и дальнейшее движение происходит единой группой. Переход в критический момент происходит по типу Пирси, обсуждавшемуся в теореме 4.1 в контексте случайно-матричной модели с внешним источником.

5.2. Непересекающиеся квадратичные бесселевские траектории.

Квадратичный бесселевский процесс – это еще один диффузионный процесс, который в вырожденном случае приводит к СОМ-ансамблю. Квадратичный бесселевский процесс – это марковский процесс на $[0, \infty)$, зависящий от параметра $\alpha > -1$, с переходной плотностью вероятности

$$\begin{aligned} p_t^{(\alpha)}(x, y) &= \frac{1}{2t} \left(\frac{y}{x} \right)^{\alpha/2} e^{-(x+y)/(2t)} I_{\alpha} \left(\frac{\sqrt{xy}}{t} \right), & x > 0, \quad y \geq 0, \\ p_t^{(\alpha)}(0, y) &= \frac{y^{\alpha}}{(2t)^{\alpha+1} \Gamma(\alpha+1)} e^{-y/(2t)}, & y \geq 0, \end{aligned} \quad (5.6)$$

где I_{α} – модифицированная функция Бесселя первого рода порядка α . Здесь вероятность перехода из x в y больше при $y - x > 0$, чем при $y - x < 0$, а при $x = 0$ переходы в $y < 0$ запрещены.

Рассмотрим теперь n непересекающихся бесселевских траекторий с начальными положениями $0 < a_1 < \dots < a_n$ и конечными положениями $0 < b_1 < \dots < b_n$, соответствующими моменту времени $T > 0$. В любой промежуточ-

Рис. 20. 50 непересекающихся бesselевских траекторий, выходящих из $a = 1$ и оканчивающихся в $b = 0$. Сплошные кривые очерчивают границу области, заполняемой квадратичными бesselевскими траекториями при $n \rightarrow \infty$.

ный момент $t \in (0, T)$ позиции траекторий описываются плотностью вероятности (5.3). Это сводится к СОМ-ансамблю, если $b_i \rightarrow 0$ для всех i (или если $a_i \rightarrow 0$ для всех i).

В пределе полного вырождения, когда и $a_i \rightarrow a > 0$ и $b_j \rightarrow 0$ для всех i и j , плотность вероятности (5.3) имеет вид СОМ-ансамбля (3.8), порожденного весами

$$\begin{aligned} w_1(x) &= x^{\alpha/2} \exp\left\{-\frac{T}{2t(T-t)} x\right\} I_{\alpha}\left(\frac{\sqrt{ax}}{t}\right), \\ w_2(x) &= x^{(\alpha+1)/2} \exp\left\{-\frac{T}{2t(T-t)} x\right\} I_{\alpha+1}\left(\frac{\sqrt{ax}}{t}\right) \end{aligned} \quad (5.7)$$

и мультииндексом (n_1, n_2) , где $n_1 = \lceil n/2 \rceil$ и $n_2 = \lfloor n/2 \rfloor$ (см. [79]). В пределе при $a \rightarrow 0$ это можно редуцировать дальше, к ансамблю многочленов на $[0, \infty)$ с весом Лагерра.

После масштабирования по времени

$$t \mapsto \frac{t}{2n}, \quad T \mapsto \frac{1}{2n}$$

квадратичные бesselевские траектории заполняют область в плоскости tx , явно описанную в [79]; см. иллюстрацию на рис. 20. Существует такой критический момент времени t^* , что при $t < t^*$ траектории отделены от стенки в $x = 0$ (“жесткий край”), а при $t > t^*$ ближайшие к 0 траектории подходят к стенке при $n \rightarrow \infty$.

В любой момент времени $t \in (0, 1)$ у траекторий есть предельное распределение среднего значения, которое характеризуется следующей векторной задачей равновесия (см. [79]), схожей по своей форме с задачей для модели с внешним

источником (см. (4.24)–(4.26)). Равновесная векторнозначная мера должна минимизировать

$$\begin{aligned} & \iint \ln \frac{1}{|x-y|} d\mu_1(x) d\mu_1(y) + \iint \ln \frac{1}{|x-y|} d\mu_2(x) d\mu_2(y) \\ & - \iint \ln \frac{1}{|x-y|} d\mu_1(x) d\mu_2(y) + \int \left(\frac{x}{t(1-t)} - \frac{2\sqrt{ax}}{t} \right) d\mu_1(x) \end{aligned} \quad (5.8)$$

среди всех векторных мер (μ_1, μ_2) таких, что

- (а) μ_1 и μ_2 имеют конечную логарифмическую энергию,
- (б) μ_1 – мера на $[0, \infty)$ массы 1,
- (с) μ_2 – мера на $(-\infty, 0]$ массы $1/2$, удовлетворяющая ограничению

$$\mu_2 \leq \sigma, \quad (5.9)$$

где σ – мера на $(-\infty, 0]$ с плотностью

$$\frac{d\sigma}{dx} = \frac{\sqrt{a}}{\pi t} |x|^{-1/2}, \quad x < 0. \quad (5.10)$$

Минимум достигается в единственной точке (μ_1^*, μ_2^*) , и μ_1^* соответствует предельной средней плотности для траекторий в момент времени t . Меры μ_j^* , $j = 1, 2$, абсолютно непрерывны относительно меры Лебега, и их плотности выражаются через решения кубического уравнения (спектральной кривой)

$$z\xi^3 - \frac{2z}{t(1-t)}\xi^2 + \left(\frac{z}{t^2(1-t)^2} + \frac{1}{t(1-t)} - \frac{a}{t^2} \right)\xi - \frac{1}{t^2(1-t)^2} = 0. \quad (5.11)$$

У уравнения (5.11) три решения, которые мы фиксируем условиями

$$\begin{aligned} \xi_1(z) &= \frac{1}{z} + O(z^{-2}), \\ \xi_2(z) &= \frac{1}{t(1-t)} - \frac{\sqrt{a}}{tz^{1/2}} - \frac{1}{2z} + O(z^{-3/2}), \\ \xi_3(z) &= \frac{1}{t(1-t)} + \frac{\sqrt{a}}{tz^{1/2}} - \frac{1}{2z} - O(z^{-3/2}) \end{aligned} \quad (5.12)$$

при $z \rightarrow \infty$. Тогда μ_1^* и μ_2^* задаются равенствами

$$\begin{aligned} \frac{d\mu_1^*}{dx} &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \xi_{2,+}(x), & x > 0, \\ \frac{d\mu_2^*}{dx} &= \frac{d\sigma}{dx} - \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \xi_{2,+}(x), & x < 0. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Переход в критический момент t^* проявляется следующим образом в поведении мер μ_1^* и μ_2^* . При $t < t^*$ имеем $S(\mu_1^*) = [p, q]$, где $0 < p < q < \infty$ и $S(\sigma - \mu_2^*) = (-\infty, 0]$, а при $t > t^*$ имеем $S(\mu_1^*) = [0, q]$ и $S(\sigma - \mu_2^*) = (-\infty, -p]$, где $p > 0$. Таким образом, условие (5.9) актуально только при $t > t^*$.

Локальное поведение в критический момент t^* недавно исследовалось в [80]. См. также [81], где изучался случай непересекающихся квадратичных бesselевских траекторий с положительными начальной и конечной позициями.

6. Двухматричная модель

Двухматричная модель – это еще одна модель из теории случайных матриц, приводящая к СОМ-ансамблям. Ее мы и обсудим в последнем разделе нашего обзора.

6.1. Определения. Эрмитова двухматричная модель задается вероятностной мерой вида

$$\frac{1}{Z_n} \exp\{-n \operatorname{Tr}(V(M_1) + W(M_2) - \tau M_1 M_2)\} dM_1 dM_2, \quad (6.1)$$

заданной на пространстве пар (M_1, M_2) эрмитовых матриц размера $n \times n$. Число $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ называется константой спаривания. В (6.1) входят два потенциала V и W , которые обычно считаются многочленами четной степени с положительными старшими коэффициентами, так что (6.1) действительно задает вероятностную меру.

Двухматричная модель (6.1) с полиномиальными потенциалами V и W была введена в [67], [82] как модель для квантовой теории гравитации и теории струн. В этом контексте интерес представляет предел двойного масштабирования для критических потенциалов. Распространено мнение, что с помощью двухматричной модели можно будет описать все минимальные модели $M(p, q)$ конформной теории поля, в то время как в случае одноматричной модели приходится ограничиваться минимальными моделями $M(p, 2)$.

Собственные значения матриц M_1 и M_2 в двухматричной модели порождают детерминантный точечный процесс с корреляционными ядрами, выражаемыми через так называемые биортогональные многочлены. Это два семейства многочленов со старшим коэффициентом 1, $\{p_{k,n}(x)\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{q_{l,n}(y)\}_{l=0}^{\infty}$ (где $p_{k,n}$ имеет степень k и $q_{l,n}$ имеет степень l), которые удовлетворяют условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_{k,n}(x) q_{l,n}(y) \exp\{-n(V(x) + W(y) - \tau xy)\} dx dy = h_{k,n}^2 \delta_{k,l}. \quad (6.2)$$

Н. Эрколани и Л. Маклолин [83] доказали, что эти полиномы однозначно определены условием (6.3), а нули у них вещественные и простые. Совсем недавно было показано, что их нули перемежаются [84]. Корреляционные ядра выражаются через эти биортогональные многочлены и их преобразования

$$Q_{l,n}(x) = \exp\{-nV(x)\} \int_{-\infty}^{\infty} q_{l,n}(y) \exp\{-n(W(y) - \tau xy)\} dy,$$

$$P_{k,n}(y) = \exp\{-nW(y)\} \int_{-\infty}^{\infty} p_{k,n}(x) \exp\{-n(V(x) - \tau xy)\} dx,$$

по формулам

$$\begin{aligned}
 K_{11}^{(n)}(x_1, x_2) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{h_{k,n}^2} p_{k,n}(x_1) Q_{k,n}(x_2), \\
 K_{12}^{(n)}(x, y) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{h_{k,n}^2} p_{k,n}(x) q_{k,n}(y), \\
 K_{21}^{(n)}(y, x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{h_{k,n}^2} P_{k,n}(y) Q_{k,n}(x) - \exp\{-n(V(x) + W(y) - \tau xy)\}, \\
 K_{22}^{(n)}(y_1, y_2) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{h_{k,n}^2} P_{k,n}(y_1) q_{k,n}(y_2).
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

Теперь совместная плотность вероятности для собственных значений $x_1, \dots, x_n$ матрицы M_1 и собственных значений $y_1, \dots, y_n$ матрицы M_2 дается формулой

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \\
 = \frac{1}{(n!)^2} \det \begin{pmatrix} (K_{11}^{(n)}(x_i, x_j))_{i,j=1}^n & (K_{12}^{(n)}(x_i, y_j))_{i,j=1}^n \\ (K_{21}^{(n)}(y_i, x_j))_{i,j=1}^n & (K_{22}^{(n)}(y_i, y_j))_{i,j=1}^n \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

а маргинальные плотности имеют вид

$$\begin{aligned}
 &\underbrace{\int \dots \int}_{n-k+n-l \text{ раз}} \mathcal{P}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) dx_{k+1} \dots dx_n dy_{l+1} \dots dy_n \\
 &= \frac{(n-k)!(n-l)!}{(n!)^2} \det \begin{pmatrix} (K_{11}^{(n)}(x_i, x_j))_{i,j=1}^k & (K_{12}^{(n)}(x_i, y_j))_{i,j=1}^{k,l} \\ (K_{21}^{(n)}(y_i, x_j))_{i,j=1}^{l,k} & (K_{22}^{(n)}(y_i, y_j))_{i,j=1}^l \end{pmatrix} \tag{6.4}
 \end{aligned}$$

(см. [85]–[87]). В частности, если положить $l = 0$, так что усреднение проводится по всем собственным значениям M_2 , то мы видим, что собственные значения M_1 порождают детерминантный точечный процесс (3.12) с ядром $K_{11}^{(n)}$.

Биортогональные многочлены, характеризующиеся условием (6.2), можно рассматривать как совместно ортогональные многочлены, если потенциалы V и W полиномиальны (см. [10]). Действительно, если $\deg W = p + 1$, то $p_{n,n}$ – совместно ортогональный многочлен относительно p весов

$$w_{j,n}(x) = e^{-nV(x)} \int_{-\infty}^{\infty} y^j \exp\{-n(W(y) - \tau xy)\} dy, \quad j = 0, \dots, p-1, \tag{6.5}$$

и диагонального мультииндекса $\vec{n} = (n/p, n/p, \dots, n/p)$, при условии, что n кратно p . Если n некратно p и, скажем, $n \equiv r$ по модулю p , где $1 \leq r \leq p-1$, то мультииндекс имеет вид

$$\vec{n} = \left(\underbrace{\lceil n/p \rceil, \dots, \lceil n/p \rceil}_{r \text{ раз}}, \underbrace{\lfloor n/p \rfloor, \dots, \lfloor n/p \rfloor}_{p-r \text{ раз}} \right).$$

Заметим, что для нечетных j вес (6.5) может не быть неотрицательным на $\mathbb{R}$. Однако это не важно, поскольку совместно ортогональные многочлены относительно весов (6.5) однозначно определены (согласно [83]) и потому алгебраические свойства из раздела 3 все равно выполнены. Итак, веса (6.5) вместе с указанным мультииндексом $\vec{n}$ порождают СОМ-ансамбль (3.8), совпадающий с совместным распределением собственных значений матрицы M_1 (после усреднения по собственным значениям M_2). Кроме того, совместно ортогональные многочлены характеризуются в терминах задачи Римана–Гильберта для $((p+1) \times (p+1))$ -матриц, как в п. 3.4. В иной, но эквивалентной форме эта задача Римана–Гильберта приведена в [88]. Как и раньше, корреляционное ядро $K_{11}^{(n)}$ выражается через решение задачи Римана–Гильберта по формуле (3.26).

6.2. Двухматричная модель с потенциалом четвертой степени.

Если W – квадратичный потенциал, то ядро $K_{11}^{(n)}$ по существу совпадает с корреляционным ядром (3.3) ансамбля ортогональных многочленов. В этом случае двухматричная модель снова редуцируется к одноматричной (если рассматривать только M_1).

Случай потенциала W степени 4 был недавно рассмотрен в [89]–[91]. В работе [89] метод наискорейшего спуска Дейффа–Чжоу применялся к задаче Римана–Гильберта в случае, когда

$$W(y) = \frac{1}{4} y^4,$$

а V – четный потенциал общего вида. Это позволило провести точный асимптотический анализ ядра $K_{11}^{(n)}$ при $n \rightarrow \infty$, что привело, в частности, к результатам о локальной универсальности, обычным для теории случайных матриц и формулируемым в терминах синус-ядра и ядра Эйри. В работе [89] рассматривался только случай рода нуль, но это ограничение было отброшено в [91], где рассматривался случай более высокого рода. Здесь имеется в виду род римановой поверхности (спектральной кривой), связанной с задачей и определенной в [89] при помощи векторной задачи равновесия аналогично обсуждениям в п. 4.4 для матричной модели с внешним источником.

В [90] этот анализ был перенесен на случай более общего потенциала четвертой степени

$$W(y) = \frac{1}{4} y^4 + \frac{\alpha}{2} y^2, \quad (6.6)$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$. Здесь мы резюмируем некоторые из полученных результатов.

Основным инструментом в [90] является векторная задача равновесия для трех мер. В ней требуется минимизировать функционал энергии

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^3 \iint \ln \frac{1}{|x-y|} d\mu_j(x) d\mu_j(y) - \sum_{j=1}^2 \iint \ln \frac{1}{|x-y|} d\mu_j(x) d\mu_{j+1}(y) \\ & + \int V_1(x) d\mu_1(x) + \int V_3(x) d\mu_3(x), \end{aligned} \quad (6.7)$$

где V_1 и V_3 – некоторые внешние поля (которые мы обсудим ниже), по всем векторнозначным мерам (μ_1, μ_2, μ_3) , удовлетворяющим следующим условиям:

- (a) все меры имеют конечную логарифмическую энергию;
- (b) μ_1 – мера на $\mathbb{R}$ массы 1;
- (c) μ_2 – мера на $i\mathbb{R}$ массы $2/3$;
- (d) μ_3 – мера на $\mathbb{R}$ массы $1/3$;
- (e) $\mu_2 \leq \sigma$, где σ – некоторая фиксированная мера на мнимой оси (также см. ниже).

В случае, когда $\alpha = 0$ в (6.6), поля V_1 и V_3 и ограничение сверху σ явно выписываются. Для общего α их описание довольно сложно. Мы проведем его при $\alpha < 0$, что соответствует двухъявному потенциалу W ; см. обсуждение всех случаев в [90].

Итак, пусть $\alpha < 0$. Будем также считать без ограничения общности, что $\tau > 0$. Внешнее поле V_1 , действующее на μ_1 , имеет вид

$$V_1(x) = V(x) + \min_{s \in \mathbb{R}} (W(s) - \tau xs). \quad (6.8)$$

Минимум здесь достигается для такого $s = s_1(x) \in \mathbb{R}$, что $W'(s) = \tau x$, т. е.

$$s^3 + \alpha s = \tau x. \quad (6.9)$$

При $\alpha < 0$ у (6.9) может быть несколько вещественных решений. Для задачи важно то из них, что имеет тот же знак, что и x (поскольку $\tau > 0$). Оно однозначно определено, за исключением случая $x = 0$.

При $\alpha < 0$ внешнее поле $V_3(x)$ тождественно обращается в нуль вне интервала $(-x^*(\alpha), x^*(\alpha))$, где

$$x^*(\alpha) = \frac{2}{\tau} \left(\frac{-\alpha}{3} \right)^{3/2}. \quad (6.10)$$

При $x \in (-x^*(\alpha), x^*(\alpha))$ у уравнения (6.9) есть три вещественных решения $s_1 = s_1(x)$, $s_2 = s_2(x)$, $s_3 = s_3(x)$, которые мы упорядочиваем так, чтобы выполнялись неравенства

$$W(s_1) - \tau xs_1 \leq W(s_2) - \tau xs_2 \leq W(s_3) - \tau xs_3.$$

Тогда внешнее поле V_3 , действующее на μ_3 , определяется как

$$V_3(x) = (W(s_3(x)) - \tau xs_3(x)) - (W(s_2(x)) - \tau xs_2(x)) \quad \text{при } x \in (-x^*(\alpha), x^*(\alpha)) \quad (6.11)$$

и $V_3(x) = 0$ в остальных точках. Итак, $V_3(x)$ является разностью между локальным максимумом и вторым локальным минимумом отображения $s \mapsto W(s) - \tau xs$, который на самом деле существует только для $x \in (-x^*(\alpha), x^*(\alpha))$.

Мера σ , играющая роль ограничения для μ_2 , имеет носителем всю мнимую ось, когда $\alpha < 0$. В этом случае уравнение седловой точки

$$s^3 + \alpha s = \tau z, \quad \text{где } z \in i\mathbb{R}, \quad (6.12)$$

имеет решение на мнимой оси, решение $s(z)$ в правой полуплоскости, а также отражение последнего относительно мнимой оси $-\overline{s(z)}$. Теперь меру σ можно определить равенством

$$\frac{d\sigma(z)}{|dz|} = \frac{\tau}{\pi} \operatorname{Re} s(z), \quad z \in i\mathbb{R}, \quad (6.13)$$

где $s(z)$ – решение уравнения (6.12) с положительной вещественной частью.

Следующий результат из [90] аналогичен теореме 4.2.

ТЕОРЕМА 6.1. *В вышеописанной векторной задаче равновесия минимум достигается в единственной точке $(\mu_1^*, \mu_2^*, \mu_3^*)$. Она удовлетворяет следующим условиям.*

(i) *Носитель μ_1^* ограничен и состоит из конечного числа отрезков:*

$$S(\mu_1^*) = \bigcup_{j=1}^N [a_j, b_j]. \quad (6.14)$$

(ii) *Носитель μ_2^* совпадает с носителем σ и для некоторого $c_2 \geq 0$*

$$S(\sigma - \mu_2^*) = (-i\infty, -ic_2] \cup [ic_2, i\infty). \quad (6.15)$$

(iii) *Существует константа $c_3 \geq 0$, для которой*

$$S(\mu_3^*) = (-\infty, -c_3] \cup [c_3, \infty). \quad (6.16)$$

(iv) *μ_1^* обладает плотностью ρ относительно меры Лебега. В регулярном случае ρ оказывается предельной средней плотностью распределения собственных значений случайной матрицы M_1 в двуматричной модели при $n \rightarrow \infty$, т. е.*

$$\rho(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} K_{11}^{(n)}(x, x).$$

Регулярными являются те же случаи, что и в утверждении (iii) теоремы 4.2. В регулярном случае $S(\mu_1^*)$ и $S(\sigma - \mu_2^*)$ не пересекаются, как не пересекаются и $S(\sigma - \mu_2^*)$ с $S(\mu_3^*)$. Разрезы по этим множествам используются в определении четырехлистной римановой поверхности $\mathfrak{R}$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_1 &= \overline{\mathbb{C}} \setminus S(\mu_1^*), \\ \mathfrak{R}_2 &= \overline{\mathbb{C}} \setminus (S(\mu_1^*) \cup S(\sigma - \mu_2^*)), \\ \mathfrak{R}_3 &= \overline{\mathbb{C}} \setminus (S(\sigma - \mu_2^*) \cup S(\mu_3^*)), \\ \mathfrak{R}_4 &= \overline{\mathbb{C}} \setminus S(\mu_3^*); \end{aligned} \quad (6.17)$$

листы склеиваются друг с другом, как обычно, крест-накрест. И так же, как в случае модели с внешним источником (см. (4.32)), мы видим, что функция

$$\xi_1(z) = V'(z) - \int \frac{d\mu_1^*(s)}{z - s}, \quad z \in \mathfrak{R}_1, \quad (6.18)$$

мероморфно продолжается на всю поверхность $\mathfrak{R}$ с полюсами только в точках на бесконечности. На самом деле, у нее простой полюс в точке на бесконечности, общей для второго, третьего и четвертого листов, и в этом ситуация отличается от (4.32).

Изложенные сведения являются основными ингредиентами анализа задачи Римана–Гильберта для матриц размера 4×4 методом наискорейшего спуска.

Наконец, мы обсудим фазовую диаграмму для случая, когда $V(x) = x^2/2$, а $W(y) = y^4/4 + \alpha y^2/2$ (см. [84], [90]). В этом случае модель зависит от двух

параметров, $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\tau > 0$. Случаи, когда $S(\mu_1^*) \cap S(\sigma - \mu_2^*) \neq \emptyset$ или $S(\mu_3^*) \cap S(\sigma - \mu_2^*) \neq \emptyset$, не являются регулярными. Они соответствуют смене структуры разбиения римановой поверхности на листы, а в некоторых случаях изменению ее рода.

Четыре области соответствуют следующим случаям:

случай I: $0 \in S(\mu_1^*)$, $0 \notin S(\sigma - \mu_2^*)$, и $0 \in S(\mu_3^*)$,

случай II: $0 \notin S(\mu_1^*)$, $0 \notin S(\sigma - \mu_2^*)$ и $0 \in S(\mu_3^*)$,

случай III: $0 \notin S(\mu_1^*)$, $0 \in S(\sigma - \mu_2^*)$ и $0 \notin S(\mu_3^*)$,

случай IV: $0 \in S(\mu_1^*)$, $0 \notin S(\sigma - \mu_2^*)$ и $0 \notin S(\mu_3^*)$.

Есть еще пятый случай, однако он невозможен при $V(x) = x^2/2$:

случай V: $0 \notin S(\mu_1^*)$, $0 \notin S(\sigma - \mu_2^*)$ и $0 \notin S(\mu_3^*)$.

Переходам от одного случая к другому соответствуют появление или стягивание лакуны в одном (или нескольких) из носителей. В общем положении это переходы типа Пирси или Пенлеве II (см. [90]). Все четыре области сходятся в особой точке $(\alpha, \tau) = (-1, 1)$. Это кратно-критический случай, в котором можно ожидать новую картину локального поведения. В настоящее время его изучение продолжается.

Список литературы

- [1] Ch. Hermite, “Sur la fonction exponentielle”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **77** (1873), 18–24, 74–79, 226–233, 285–293.
- [2] А. А. Марков, “Два доказательства сходимости некоторых непрерывных дробей”, *Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля*, Гостехиздат, М., 1948, 106–119; пер. с фр.: A. Markoff, “Deux démonstrations de la convergence de certaines fractions continues”, *Acta Math.*, **19**:1 (1895), 93–104.
- [3] В. Н. Сорокин, “Циклические графы и теорема Апери”, *УМН*, **57**:3 (2002), 99–134; англ. пер.: V. N. Sorokin, “Cyclic graphs and Apéry’s theorem”, *Russian Math. Surveys*, **57**:3 (2002), 535–571.
- [4] W. Van Assche, “Multiple orthogonal polynomials, irrationality and transcendence”, *Continued fractions: from analytic number theory to constructive approximation* (University of Missouri–Columbia, Columbia, MO, USA, 1998), *Contemp. Math.*, **236**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, 325–342.
- [5] *Рациональные приближения постоянной Эйлера и рекуррентные соотношения*, Сборник статей, Совр. пробл. матем., **9**, ред. А. И. Аптекарев, МИАН, М., 2007, 84 с.
- [6] В. А. Калягин, “Аппроксимации Эрмита–Паде и спектральный анализ несимметричных операторов”, *Матем. сб.*, **185**:6 (1994), 79–100; англ. пер.: V. A. Kalyagin, “Hermite–Padé approximants and spectral analysis of nonsymmetric operators”, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, **82**:1 (1995), 199–216.
- [7] A. Aptekarev, V. Kaliaguine (Kalyagin), “Complex rational approximation and difference operators”, *Proceedings of the 3rd International Conference on Functional Analysis and Approximation Theory*, v. I (Acquafredda di Maratea, Italy, 1996), *Rend. Circ. Mat. Palermo* (2) Suppl., **52**, Circolo Matematico di Palermo, Palermo, 1998, 3–21.
- [8] A. I. Aptekarev, V. A. Kalyagin, E. B. Saff, “Higher-order three-term recurrences and asymptotics of multiple orthogonal polynomials”, *Constr. Approx.*, **30**:2 (2009), 175–223.

- [9] P. M. Bleher, A. B. J. Kuijlaars, “Random matrices with external source and multiple orthogonal polynomials”, *Int. Math. Res. Not.*, 2004, № 3, 109–129.
- [10] A. B. J. Kuijlaars, K. T.-R. McLaughlin, “A Riemann–Hilbert problem for biorthogonal polynomials”, *J. Comput. Appl. Math.*, **178**:1-2 (2005), 313–320.
- [11] A. I. Aptekarev, P. M. Bleher, A. B. J. Kuijlaars, “Large n limit of Gaussian random matrices with external source. II”, *Comm. Math. Phys.*, **259**:2 (2005), 367–389.
- [12] А. И. Аптекарев, В. Г. Лысов, Д. Н. Туляков, “Глобальный режим распределения собственных значений случайных матриц с ангармоническим потенциалом и внешним источником”, *ТМФ*, **159**:1 (2009), 34–57; англ. пер.: A. I. Aptekarev, V. G. Lysov, D. N. Tulyakov, “Global eigenvalue distribution regime of random matrices with an anharmonic potential and an external source”, *Theoret. Math. Phys.*, **159**:1 (2009), 448–468.
- [13] А. И. Аптекарев, В. Г. Лысов, Д. Н. Туляков, “Случайные матрицы с внешним источником и асимптотика совместно ортогональных многочленов”, *Матем. сб.*, **202**:2 (2011), 3–56; англ. пер.: A. I. Aptekarev, V. G. Lysov, D. N. Tulyakov, “Random matrices with external source and the asymptotic behaviour of multiple orthogonal polynomials”, *Sb. Math.*, **202**:2 (2011), 155–206.
- [14] P. Bleher, S. Delvaux, A. B. J. Kuijlaars, “Random matrix model with external source and a constrained vector equilibrium problem”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **64** (2011), 116–160.
- [15] S. Delvaux, “Average characteristic polynomials for multiple orthogonal polynomial ensembles”, *J. Approx. Theory*, **162**:5 (2010), 1033–1067.
- [16] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, В. Н. Сорокин, “Об аппроксимациях Эрмита–Падэ для систем функций марковского типа”, *Матем. сб.*, **188**:5 (1997), 33–58; англ. пер.: A. A. Gonchar, E. A. Rakhmanov, V. N. Sorokin, “Hermite–Padé approximants for systems of Markov-type functions”, *Sb. Math.*, **188**:5 (1997), 671–696.
- [17] А. И. Аптекарев, В. Г. Лысов, “Системы марковских функций, генерируемые графами, и асимптотика их аппроксимаций Эрмита–Падэ”, *Матем. сб.*, **201**:2 (2010), 29–78; англ. пер.: A. I. Aptekarev, V. G. Lysov, “Systems of Markov functions generated by graphs and the asymptotics of their Hermite–Padé approximants”, *Sb. Math.*, **201**:2 (2010), 183–234.
- [18] A. I. Aptekarev, A. B. J. Kuijlaars, W. Van Assche, “Asymptotics of Hermite–Padé rational approximants for two analytic functions with separated pairs of branch points (case of genus 0)”, *Int. Math. Res. Pap. IMRP*, 2008, Art. ID rpm007, 128 pp.
- [19] W. Van Assche, J. S. Geronimo, A. B. J. Kuijlaars, “Riemann–Hilbert problems for multiple orthogonal polynomials”, *Special Functions 2000: Current Perspective and Future Directions* (Tempe, AZ, USA, 2000), NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., **30**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2001, 23–59.
- [20] E. Daems, A. B. J. Kuijlaars, “A Christoffel–Darboux formula for multiple orthogonal polynomials”, *J. Approx. Theory*, **130**:2 (2004), 190–202; arXiv: math/0402031.
- [21] P. M. Bleher, A. B. J. Kuijlaars, “Large n limit of Gaussian random matrices with external source. I”, *Comm. Math. Phys.*, **252**:1-3 (2004), 43–76.
- [22] P. M. Bleher, A. B. J. Kuijlaars, “Large n limit of Gaussian random matrices with external source. III. Double scaling limit”, *Comm. Math. Phys.*, **270** (2007), 481–517.
- [23] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, “О сходимости совместных аппроксимаций Падэ для систем функций марковского типа”, *Теория чисел, математический анализ и их приложения*, Сборник статей. Посвящается академику Ивану Матвеевичу Виноградову к его девяностолетию, Тр. МИАН СССР, **157**, 1981, 31–48; англ. пер.: A. A. Gonchar, E. A. Rakhmanov, “On convergence of simultaneous Padé approximants for systems of functions of Markov type”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **157** (1983), 31–50.

- [24] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, “О задаче равновесия для векторных потенциалов”, *УМН*, **40**:4(244) (1985), 155–156; англ. пер.: А. А. Gonchar, E. A. Rakhmanov, “On the equilibrium problem for vector potentials”, *Russian Math. Surveys*, **40**:4 (1985), 183–184.
- [25] A. Angelesco, “Sur deux extensions des fractions continues algébriques”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **168** (1919), 262–265.
- [26] Е. М. Никишин, “О совместных аппроксимациях Паде”, *Матем. сб.*, **113**:4 (1980), 499–519; англ. пер.: E. M. Nikishin, “On simultaneous Padé approximants”, *Math. USSR-Sb.*, **41**:4 (1982), 409–425.
- [27] K. Driver, H. Stahl, “Simultaneous rational approximants to Nikishin-systems. I, II”, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **60**:1-2 (1995), 245–263; **61**:1-4 (1995), 261–284.
- [28] U. Fidalgo Prieto, G. López Lagomasino, “Nikishin systems are perfect”, *Constr. Approx.*, **34**:3 (2011), 297–356; arXiv: 1001.0554v1.
- [29] А. И. Аптекарев, “Асимптотика полиномов совместной ортогональности в случае Анджелеско”, *Матем. сб.*, **136(178)**:1(5) (1988), 56–84; англ. пер.: A. I. Aptekarev, “Asymptotics of simultaneously orthogonal polynomials in the Angelesco case”, *Math. USSR-Sb.*, **64**:1 (1989), 57–84.
- [30] Ж. Бустаманте, Г. Лопес Лагомасино, “Аппроксимации Эрмита–Паде для систем Никишина аналитических функций”, *Матем. сб.*, **183**:11 (1992), 117–138; англ. пер.: Zh. Bustamante, G. L. Lagomasino, “Hermite–Padé approximation for Nikishin systems of analytic functions”, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, **77**:2 (1994), 367–384.
- [31] Е. М. Никишин, “Об асимптотике линейных форм для совместных аппроксимаций Паде”, *Изв. вузов. Матем.*, 1986, № 2, 33–41; англ. пер.: E. M. Nikishin, “The asymptotic behavior of linear forms for joint Padé approximations”, *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, **30**:2 (1986), 43–52.
- [32] А. И. Аптекарев, “Сильная асимптотика многочленов совместной ортогональности для систем Никишина”, *Матем. сб.*, **190**:5 (1999), 3–44; англ. пер.: A. I. Aptekarev, “Strong asymptotics of multiply orthogonal polynomials for Nikishin systems”, *Sb. Math.*, **190**:5 (1999), 631–669.
- [33] А. И. Аптекарев, “Асимптотика аппроксимаций Эрмита–Паде для пары функций с точками ветвления”, *Докл. РАН*, **422**:4 (2008), 443–445; англ. пер.: A. I. Aptekarev, “Asymptotics of Hermite–Padé approximants for two functions with branch points”, *Dokl. Math.*, **78**:2 (2008), 717–719.
- [34] Е. М. Никишин, В. Н. Сорокин, *Рациональные приближения и ортогональность*, Наука, М., 1988, 256 с.; англ. пер.: E. M. Nikishin, V. N. Sorokin, *Rational approximations and orthogonality*, Transl. Math. Monogr., **92**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, viii+221 pp.
- [35] Л. Янг, *Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления*, Мир, М., 1974, 488 с.; пер. с англ.: L. C. Young, *Lectures on the calculus of variations and optimal control theory*, Saunders, Philadelphia–London–Toronto, 1969, xi+331 pp.
- [36] Е. А. Рахманов, “К асимптотике многочленов Эрмита–Паде для двух марковских функций”, *Матем. сб.*, **202**:1 (2011), 133–140; англ. пер.: E. A. Rakhmanov, “The asymptotics of Hermite–Padé polynomials for two Markov-type functions”, *Sb. Math.*, **202**:1 (2011), 127–134.
- [37] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, “Равновесная мера и распределение нулей экстремальных многочленов”, *Матем. сб.*, **125(167)**:1(9) (1984), 117–127; англ. пер.: A. A. Gonchar, E. A. Rakhmanov, “Equilibrium measure and the distribution of zeros of extremal polynomials”, *Math. USSR-Sb.*, **53**:1 (1986), 119–130.
- [38] R. T. Baumel, J. L. Gammel, J. Nuttall, “Asymptotic form of Hermite–Padé polynomials”, *IMA J. Appl. Math.*, **27**:3 (1981), 335–357.

- [39] J. Nuttall, “Hermite–Padé approximants to functions meromorphic on a Riemann surface”, *J. Approx. Theory*, **32**:3 (1981), 233–240.
- [40] J. Nuttall, “Asymptotics of diagonal Hermite–Padé polynomials”, *J. Approx. Theory*, **42**:4 (1984), 299–386.
- [41] C. L. Siegel, *Topics in complex function theory*, v. I: *Elliptic functions and uniformization theory*, Wiley, New York–London–Sydney, 1969, ix+186 pp.; v. II: *Automorphic functions and Abelian integrals*, Wiley, New York, 1971, xii+193 pp.
- [42] A. I. Aptekarev, V. A. Kalyagin, V. G. Lysov, D. N. Toulyakov, “Equilibrium of vector potentials and uniformization of the algebraic curves of genus 0”, *J. Comput. Appl. Math.*, **233**:3 (2009), 602–616.
- [43] M. L. Mehta, M. Gaudin, “On the density of eigenvalues of a random matrix”, *Nuclear Phys.*, **18** (1960), 420–427.
- [44] M. L. Mehta, *Random matrices*, 1st edition, Academic Press, New York, 1967, x+259 pp.; 3rd edition, Pure Appl. Math. (Amst.), **142**, Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2004, xviii+688 pp.
- [45] P. Deift, *Orthogonal polynomials and random matrices: a Riemann–Hilbert approach*, Courant Lect. Notes Math., **3**, New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York; Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, viii+273 pp.
- [46] P. Deift, X. Zhou, “A steepest descent method for oscillatory Riemann–Hilbert problems. Asymptotics for the MKdV equation”, *Ann. of Math.* (2), **137**:2 (1993), 295–368.
- [47] В. Г. Лысов, “Сильная асимптотика аппроксимаций Эрмита–Паде для системы стилтьесовских функций с весом Лареппа”, *Матем. сб.*, **196**:12 (2005), 99–122; англ. пер.: V. G. Lysov, “Strong asymptotics of the Hermite–Padé approximants for a system of Stieltjes functions with Laguerre weight”, *Sb. Math.*, **196**:12 (2005), 1815–1840.
- [48] P. Deift, T. Kriecherbauer, K. T.-R. McLaughlin, “New results on the equilibrium measure for logarithmic potentials in the presence of an external field”, *J. Approx. Theory*, **95**:3 (1998), 388–475.
- [49] P. Deift, T. Kriecherbauer, K. T.-R. McLaughlin, S. Venakides, X. Zhou, “Uniform asymptotics for polynomials orthogonal with respect to varying exponential weights and applications to universality questions in random matrix theory”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **52**:11 (1999), 1335–1425.
- [50] A. B. J. Kuijlaars, K. T.-R. McLaughlin, W. Van Assche, M. Vanlessen, “The Riemann–Hilbert approach to strong asymptotics for orthogonal polynomials on $[-1, 1]$ ”, *Adv. Math.*, **188**:2 (2004), 337–398.
- [51] А. И. Аптекарев, “Точные константы рациональных аппроксимаций аналитических функций”, *Мат. сб.*, **193**:1 (2002), 3–72; англ. пер.: A. I. Aptekarev, “Sharp constants for rational approximations of analytic functions”, *Sb. Math.*, **193**:1 (2002), 1–72.
- [52] G. W. Anderson, A. Guionnet, O. Zeitouni, *An introduction to random matrices*, Cambridge Stud. Adv. Math., **118**, Cambridge University Press, Cambridge, 2010, xiv+492 pp.
- [53] P. Forrester, *Log-gases and random matrices*, London Math. Soc. Monogr. Ser., **34**, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2010, xiv+791 pp.
- [54] G. Akemann, J. Baik, Ph. Di Francesco (eds.), *The Oxford handbook of random matrix theory*, Oxford University Press, Oxford, 2011, xxxi+919 pp.
- [55] A. B. J. Kuijlaars, “Multiple orthogonal polynomial ensembles”, *Recent trends in orthogonal polynomials and approximation theory*, Contemp. Math., **507**, eds. J. Arvesú, F. Marcellán, A. Martínez-Finkelshtein, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010, 155–176.

- [56] P. Deift, D. Gioev, *Random matrix theory: invariant ensembles and universality*, Courant Lect. Notes Math., **18**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009, x+217 pp.
- [57] A. Borodin, “Biorthogonal ensembles”, *Nuclear Phys. B*, **536**:3 (1999), 704–732.
- [58] K. Johansson, “Random matrices and determinantal processes”, *Mathematical statistical physics*, Elsevier, Amsterdam, 2006, 1–55.
- [59] P. Desrosiers, P. J. Forrester, “A note on biorthogonal ensembles”, *J. Approx. Theory*, **152**:2 (2008), 167–187.
- [60] W. Van Assche, “Nearest neighbor recurrence relations for multiple orthogonal polynomials”, *J. Approx. Theory*, **163**:10 (2011), 1427–1448; arXiv: 1104.3778.
- [61] C. Álvarez-Fernández, U. Fidalgo Prieto, M. Mañas, “Multiple orthogonal polynomials of mixed type: Gauss–Borel factorization and the multi-component 2D Toda hierarchy”, *Adv. Math.*, **227**:4 (2011), 1451–1525.
- [62] E. Daems, A. B. J. Kuijlaars, “Multiple orthogonal polynomials of mixed type and non-intersecting Brownian motions”, *J. Approx. Theory*, **146**:1 (2007), 91–114.
- [63] A. S. Fokas, A. R. Its, A. V. Kitaev, “The isomonodromy approach to matrix models in 2D quantum gravity”, *Comm. Math. Phys.*, **147**:2 (1992), 395–430.
- [64] E. Brézin, S. Hikami, “Universal singularity at the closure of a gap in a random matrix theory”, *Phys. Rev. E* (3), **57**:4 (1998), 4140–4149.
- [65] E. Brézin, S. Hikami, “Level spacing of random matrices in an external source”, *Phys. Rev. E* (3), **58**:6, Part A (1998), 7176–7185.
- [66] P. Zinn-Justin, “Random Hermitian matrices in an external field”, *Nuclear Phys. B*, **497** (1997), 725–732.
- [67] C. Itzykson, J. B. Zuber, “The planar approximation. II”, *J. Math. Phys.*, **21**:3 (1980), 411–421.
- [68] E. B. Saff, V. Totik, *Logarithmic potentials with external fields*, Grundlehren Math. Wiss., **316**, Springer-Verlag, Berlin, 1997, xvi+505 pp.
- [69] A. I. Aptekarev, A. Branquinho, W. Van Assche, “Multiple orthogonal polynomials for classical weights”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **355**:10 (2003), 3887–3914.
- [70] Л. А. Пастур, “О спектре случайных матриц”, *ТМФ*, **10**:1 (1972), 102–112; англ. пер.: L. A., “On the spectrum of random matrices”, *Theoret. Math. Phys.*, **10**:1 (1972), 67–74.
- [71] C. A. Tracy, H. Widom, “The Pearcey process”, *Comm. Math. Phys.*, **263**:2 (2006), 381–400.
- [72] K. T.-R. McLaughlin, “Asymptotic analysis of random matrices with external source and a family of algebraic curves”, *Nonlinearity*, **20**:7 (2007), 1547–1571.
- [73] Е. А. Рахманов, “Равновесная мера и распределение нулей экстремальных многочленов дискретной переменной”, *Матем. сб.*, **187**:8 (1996), 109–124; англ. пер.: E. A. Rakhmanov, “Equilibrium measure and the distribution of zeros of the extremal polynomials of a discrete variable”, *Sb. Math.*, **187**:8 (1996), 1213–1228.
- [74] P. D. Dragnev, E. B. Saff, “Constrained energy problems with applications to orthogonal polynomials of a discrete variable”, *J. Anal. Math.*, **72**:1 (1997), 223–259.
- [75] J. Baik, T. Kriecherbauer, K. T.-R. McLaughlin, P. D. Miller, *Discrete orthogonal polynomials. Asymptotics and applications*, Ann. of Math. Stud., **164**, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2007, viii+170 pp.
- [76] P. Bleher, A. Its, “Double scaling limit in the random matrix model: the Riemann–Hilbert approach”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **56**:4 (2003), 433–516.
- [77] T. Claeys, A. B. J. Kuijlaars, “Universality of the double scaling limit in random matrix models”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **59**:11 (2006), 1573–1603.
- [78] S. Karlin, J. McGregor, “Coincidence probabilities”, *Pacific J. Math.*, **9**:4 (1959), 1141–1164; <http://projecteuclid.org/euclid.pjm/1103038889>.

- [79] A. B. J. Kuijlaars, A. Martínez-Finkelshtein, F. Wielonsky, “Non-intersecting squared Bessel paths and multiple orthogonal polynomials for modified Bessel weights”, *Comm. Math. Phys.*, **286**:1 (2009), 217–275.
- [80] A. B. J. Kuijlaars, A. Martínez-Finkelshtein, F. Wielonsky, *Non-intersecting squared Bessel paths: critical time and double scaling limit*, 2010, arXiv: [1011.1278](#).
- [81] S. Delvaux, A. B. J. Kuijlaars, P. Román, L. Zhang, *Non-intersecting squared Bessel paths with one positive starting and ending point*, 2011, arXiv: [1105.2481](#).
- [82] M. L. Mehta, “A method of integration over matrix variables”, *Comm. Math. Phys.*, **79**:3 (1981), 327–340.
- [83] N. M. Ercolani, K. T.-R. McLaughlin, “Asymptotics and integrable structures for biorthogonal polynomials associated to a random two-matrix model”, *Phys. D*, **152–153** (2001), 232–268.
- [84] M. Duits, D. Geudens, A. B. J. Kuijlaars, “A vector equilibrium problem for the two-matrix model in the quartic/quadratic case”, *Nonlinearity*, **24**:3 (2011), 951–993.
- [85] B. Eynard, M. L. Mehta, “Matrices coupled in a chain. I. Eigenvalue correlations”, *J. Phys. A*, **31**:19 (1998), 4449–4456.
- [86] M. L. Mehta, P. Shukla, “Two coupled matrices: eigenvalue correlations and spacing functions”, *J. Phys. A*, **27**:23 (1994), 7793–7803.
- [87] S. Delvaux, “Average characteristic polynomials in the two-matrix model”, *J. Math. Phys.*, **52**:1 (2011), 013513, 23 pp.
- [88] M. Bertola, B. Eynard, J. Harnad, “Differential systems for biorthogonal polynomials appearing in 2-matrix models and the associated Riemann–Hilbert problem”, *Comm. Math. Phys.*, **243**:2 (2003), 193–240.
- [89] M. Duits, A. B. J. Kuijlaars, “Universality in the two matrix model: a Riemann–Hilbert steepest descent analysis”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **62**:8 (2009), 1076–1153.
- [90] M. Duits, A. B. J. Kuijlaars, M. Y. Mo, *The Hermitian two matrix model with an even quartic potential*, Mem. Amer. Math. Soc., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011, v+105 pp.
- [91] M. Y. Mo, “Universality in the two matrix model with a monomial quartic and a general even polynomial potential”, *Comm. Math. Phys.*, **291**:3 (2009), 863–894.

А. И. Аптекарев (A. I. Aptekarev)

Институт прикладной математики

им. М. В. Келдыша РАН

E-mail: aptekkaa@keldysh.ru

Поступила в редакцию

15.09.2011

А. Б. Э. Койэлаарс (A. B. J. Kuijlaars)

Katholieke Universiteit Leuven, Belgium

E-mail: arno.kuijlaars@wis.kuleuven.be