Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Бухштабер, О. В. Карпов, С. И. Тертычный, Система на торе, моделирующая динамику перехода Джексона, *УМН*, 2012, том 67, выпуск 1, 181–182

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9456>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 15:43:10

Система на торе, моделирующая динамику перехода Джозефсона

В. М. Бухштабер, О. В. Карпов, С. И. Тертычный

Работа посвящена развитию теории уравнения (см. [1], [2], а также [3])

$$\dot{\varphi}(t) + \sin \varphi(t) = i_0 + i_1 \sin \mu t, \quad (1)$$

где i_0, i_1, μ – константы. В первую очередь нас интересуют задачи, пришедшие из физики сильношунтированного перехода Джозефсона в сверхпроводниках, динамику которого успешно моделирует это уравнение (см. [4]–[7]).

Положив $x = \mu t + c$, где $c = \text{const}$, и $y = \varphi(t)$, мы получаем динамическую систему на торе

$$\dot{x} = \mu, \quad \dot{y} = i_0 + i_1 \sin x - \sin y. \quad (2)$$

Отметим, что при $\mu i_1 \neq 0$ система (2) эквивалентна уравнению (1). Пусть $x(t) = \mu t + c$, $y(t) = y(t; i_0, i_1, \mu)$ – решение этой системы. Классическое число вращения $\nu = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)/x(t)$ (см. [8]) не зависит от начальных данных $(x(0), y(0))$ и задает функцию $\nu = \nu(i_0, i_1, \mu)$ в $\mathbb{R}^3$. Например, $\nu(\mu, 1, \mu) \equiv 1$.

Область $Q_m = \{(i_0, i_1, \mu) \in \mathbb{R}^3: \nu = m\}$, где $m = 0, \pm 1, \dots$, называется областью квантования порядка m (см. [9]). Такое название объясняется следующим.

Положим $y_n(t) = y(t + nT)$, где $T = 2\pi/\mu$, и $q_n(t) = y_{n+1}(t) - y_n(t)$. В [9] доказано, что если последовательность функций $\{q_n(t), n = 0, 1, \dots\}$ сходится при фиксированном t , то $\lim q_n(t) = 2\pi\nu$ и, в частности, предел не зависит от t . Более того, в этом случае ν обязано быть целым числом и имеет физическую интерпретацию – номер ступеньки Шапиро.

Задачи: (i) описать карты областей Q_m в $\mathbb{R}^3$ и в плоскостях $\{(i_0, i_1)\}$, $\{(i_0, \mu)\}$, $\{(i_1, \mu)\}$ при фиксированных значениях μ, i_1, i_0 соответственно;

(ii) описать динамику карт областей Q_m в указанных плоскостях при изменении фиксированных значений μ, i_1 и i_0 .

Пусть $\varphi_k(t) = \varphi_k(t; i_0, i_1, \mu)$, $k = 1, 2$, – решения уравнения (1) с начальными данными $\varphi_1(0) = 0$ и $\varphi_2(0) = \pi$ соответственно. Положим $\xi_k(t) = \int_0^t \cos \varphi_k(t) dt$. Используя теорему 1 работы [1], получаем, что точка (i_0, i_1, μ) лежит в области Q_m для $m = \nu(i_0, i_1, \mu)$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{1}{2}(\varphi_2(T) - \varphi_1(T))\right) &= \exp\left\{-\frac{1}{2}(\xi_1(T) + \xi_2(T))\right\}, \\ \left|\exp\left\{\frac{1}{2}\xi_1(T)\right\} \cos\left(\frac{1}{2}\varphi_1(T)\right) + \exp\left\{\frac{1}{2}\xi_2(T)\right\} \sin\left(\frac{1}{2}\varphi_2(T)\right)\right| &\geq 2. \end{aligned}$$

В частности, если $\varphi_1(T; i_0, i_1, \mu) = 2l\pi$ для целого l , то точка (i_0, i_1, μ) лежит в области Q_m и на границе этой области, когда $\xi_1(T) = 0$. Например, $\varphi_1(T; \mu, 1, \mu) = 2\pi$ и $\xi_1(T) = 0$, поэтому точка $(\mu, 1, \mu)$ лежит на границе области Q_1 для любого μ .

Положим $\langle \sin \varphi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{nT}^{(n+1)T} \sin \varphi dt$. Из (1) следует, что если $(i_0, i_1, \mu) \in Q_m$, то $\langle \sin \varphi \rangle = i_0 - m\mu$, в частности, $|i_0 - m\mu| \leq 1$.

Непосредственная проверка показывает, что преобразование $x_1 = \varepsilon_1 x + \delta\pi$, $y_1 = \varepsilon_2 y$, где $\varepsilon_k = \pm 1$, $k = 1, 2$, и $\delta = 0$ или 1 , приводит к следующему преобразованию параметров системы (2): $(i_0, i_1, \mu) \mapsto (\varepsilon_2 i_0, (-1)^\delta \varepsilon_1 \varepsilon_2 i_1, \varepsilon_1 \mu)$.

Таким образом, $\nu(\varepsilon_2 i_0, (-1)^\delta \varepsilon_1 \varepsilon_2 i_1, \varepsilon_1 \mu) = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \nu(i_0, i_1, \mu)$. Получаем

$$\nu(-i_0, i_1, \mu) = -\nu(i_0, i_1, \mu), \quad \nu(i_0, -i_1, \mu) = \nu(i_0, i_1, \mu), \quad \nu(i_0, i_1, -\mu) = -\nu(i_0, i_1, \mu). \quad (3)$$

Поэтому достаточно изучить функцию $\nu(i_0, i_1, \mu)$ только при $i_0 \geq 0$, $i_1 \geq 0$, $\mu \geq 0$.

ЛЕММА 1. В случае системы (2) для любого $i \geq 0$ имеем:

$$(i_0 - i) + (i_1 - i) \sin x - \sin y \leq \dot{y} \leq (i_0 + i) + (i_1 - i) \sin x - \sin y, \quad (4)$$

$$(i_0 - 1) + i_1 \sin x \leq \dot{y} \leq (i_0 + 1) + i_1 \sin x. \quad (5)$$

Используя теорему сравнения Чаплыгина (см. [10]), получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\mu > 0$, тогда для любого $i \geq 0$

$$\nu(i_0 - i_1, |i_1 - i|, \mu) \leq \nu(i_0, i_1, \mu) \leq \nu(i_0 + i_1, |i_1 - i|, \mu). \quad (6)$$

ЛЕММА 2. Пусть $i_0 \geq 0$, $\mu > 0$ и $i_1 = 0$, тогда $\mu\nu = \gamma(i_0)$, где $\gamma(i_0) = 0$, если $i_0 \leq 1$, и $\gamma(i_0) = \sqrt{i_0^2 - 1}$, если $i_0 \geq 1$.

Используя лемму 2, получаем, что имеет место

ЛЕММА 3. Пусть $\mu > 0$, тогда $\gamma(i_0 - i_1) \leq \mu\nu(i_0, i_1, \mu) \leq \gamma(i_0 + i_1)$, в частности, $\nu(i_0, i_1, \mu) \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow \infty$ и $\nu(i_0, i_1, \mu) \rightarrow \infty$ при $|i_0 - i_1| > 1$ и $\mu \rightarrow 0$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $|i_0 - i_1| \leq 1$ и $|i_0 + i_1| \leq 1$, тогда $(i_0, i_1, \mu) \in Q_0$ для любого μ .

СЛЕДСТВИЕ 3. Пересечение области Q_m , $m \neq 0$, с областью $\{i_0 \geq 1 + i_1, i_1 \geq 0\}$ содержится в области $\{|i_0 - \sqrt{1 + \mu^2 m^2}| \leq i_1\}$, в частности, пересечением этой области с плоскостью $\{i_1 = 0\}$ является кривая $\{(i_0, \mu) : i_0^2 = 1 + m^2 \mu^2\}$.

Интегрируя неравенства (5), получаем следующее утверждение.

ЛЕММА 4. Пусть $\mu > 0$, тогда $(i_0 - 1) \leq \mu\nu(i_0, i_1, \mu) \leq (i_0 + 1)$ для любого i_1 .

Таким образом, имеет место

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mu > 0$, тогда

$$\max\{i_0 - 1, \gamma(i_0 - i_1)\} \leq \mu\nu(i_0, i_1, \mu) \leq \min\{i_0 + 1, \gamma(i_0 + i_1)\}.$$

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $(i_0, i_1, \mu) \in Q_m$ и $\mu > 0$, тогда

$$\max\{i_0 - 1, \gamma(i_0 - i_1)\} \leq \mu t \leq \min\{i_0 + 1, \gamma(i_0 + i_1)\}.$$

Список литературы

- [1] В. М. Бухштабер, О. В. Карпов, С. И. Тертычный, УМН, **59**:2(356) (2004), 187–188.
 [2] В. М. Бухштабер, О. В. Карпов, С. И. Тертычный, УМН, **63**:3(381) (2008), 155–156.
 [3] Ю. С. Ильяшенко, Д. А. Рыжов, Д. А. Филимонов, Функци. анализ и его прил., **45**:3 (2011), 41–54. [4] К. К. Лихарев, Б. Т. Ульрих, Системы с джозефсоновскими контактами, Изд-во Моск. ун-та, М., 1978. [5] А. Бароне, Дж. Патерно, Эффект Джозефсона. Физика и применения, Мир, М., 1984. [6] В. М. Бухштабер, О. В. Карпов, С. И. Тертычный, ЖЭТФ, **124**:3(9) (2003), 691–699. [7] O. V. Karpov, V. M. Buchstaber, S. I. Tertychniy, J. Niemeyer, O. Kieker, J. Appl. Phys., **104**:9 (2008), 093910; Virtual Journal of Applications of Superconductivity, **15**:10 (2008). [8] В. И. Арнольд, Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, МЦНМО, М., 2002. [9] В. М. Бухштабер, О. В. Карпов, С. И. Тертычный, ТМФ, **162**:2 (2010), 254–265. [10] Н. Н. Лузин, УМН, **6**:6(46) (1951), 3–27.

В. М. Бухштабер (V. M. Buchstaber)
 Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
 E-mail: buchstab@mi.ras.ru

Представлено С. П. Новиковым
 Принято редколлегией
 11.01.2012

О. В. Карпов (O. V. Karpov)
 ВНИИФТРИ
 E-mail: mera@vniiftri.org

С. И. Тертычный (S. I. Tertychniy)
 ВНИИФТРИ
 E-mail: mera@vniiftri.org