Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Артамонов, В. А. Голубева, Некоммутативные
пфаффианы, *УМН*, 2012, том 67, выпуск 1, 179–180

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9458>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 18:13:21

Некоммутативные пфаффианы

Д. В. Артамонов, В. А. Голубева

С помощью некоммутативных определителей в алгебрах $U(\mathfrak{gl}_N)$, $U(\mathfrak{sp}_{2N})$, $U(\mathfrak{o}_N)$ строятся элементы Капелли, алгебраически порождающие центр соответствующей универсальной обертывающей алгебры [1]. Связь элементов Капелли и Казимира рассмотрена в [2]. В теории центральных элементов $U(\mathfrak{o}_N)$ даже большую роль, чем определители, играют некоммутативные пфаффианы, которые определяются по формуле $\text{Pf } \Phi = \frac{1}{n! \cdot 2^n} \sum_{\sigma \in S_{2n}} (-1)^\sigma \Phi_{\sigma(1)\sigma(2)} \cdots \Phi_{\sigma(2n-1)\sigma(2n)}$, где $\Phi = (\Phi_{ij})$, $i, j = 1, \dots, 2n$, — кососимметрическая $(2n \times 2n)$ -матрица, матричные элементы которой принадлежат некоммутативному кольцу. Будем считать, что пфаффиан матрицы нечетного порядка нулевой.

Соотношения между коммутативными пфаффианами изучались в [3]–[5].

В настоящей работе пфаффианы вычисляются в универсальной обертывающей алгебре $U(\mathfrak{o}_N)$. Рассмотрим реализацию ортогональной алгебры кососимметрическими матрицами с базисом $F_{ij} = E_{ij} - E_{ji}$, $i, j = 1, \dots, N$, $i < j$. Строим из F_{ij} кососимметрическую матрицу $F = (F_{ij})$. Для подмножества $I \subset \{1, \dots, N\}$ обозначим через F_I подматрицу матрицы F , образованную по правилу $F_I = (F_{ij})_{i,j \in I}$.

ТЕОРЕМА 1 (см. [1]). Пусть $C_k = \sum_{|I|=k, I \subset \{1, \dots, k\}} (\text{Pf } F_I)^2$, $k = 2, 4, \dots, 2[N/2]$. Тогда C_k принадлежат центру алгебры $U(\mathfrak{o}_N)$.

Первый результат настоящей работы касается вычисления коммутаторов между $\text{Pf } F_I$. Пусть $\mathbb{C}\langle A \rangle$ — свободная ассоциативная алгебра. Определим произведение с перетасовками $\star$ формулой $au \star bv = a(u \star bv) + b(au \star v)$, где $a, b \in A$, а $u, v \in A^*$ — слова. Пфаффиан был определен фактически как элемент $\mathbb{C}\langle F_{ij} \rangle$.

Пусть множество индексов $I_{j_1 \mapsto j_2}$ получается из I заменой индекса j_1 на j_2 . Ниже при взятии произведения с перетасовкой пфаффиан $\text{Pf } F_{I_{j_r \mapsto j_s}}$ должен рассматриваться как единый символ.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $I = \{i_1, \dots, i_k\}$, $J = \{j_1, \dots, j_l\}$, при этом $I \cap J = \{j_1, \dots, j_m\}$. Тогда

$$[\text{Pf } F_I, \text{Pf } F_J] = \sum_{j_r \in I \cap J, j_s \in J \setminus I} (-1)^{l(l+1)/2 - r - s - 1} \frac{1}{l/2} \text{Pf } F_{J \setminus \{j_r, j_s\}} \star \text{Pf } F_{I_{j_r \mapsto j_s}}.$$

Второй результат состоит в вычислении копроизведения пфаффианов.

ТЕОРЕМА 3. $\Delta \text{Pf } F_I = \sum_{I' \subset I} (-1)^{(I', I \setminus I')} \text{Pf } F_{I'} \otimes \text{Pf } F_{I \setminus I'}.$

Третий результат — соотношение для производящей функции пфаффианов.

Пусть Λ — внешняя алгебра, порожденная элементами e_i , $i = 1, \dots, N$, и элементами e_{ij} , $i, j = 1, \dots, N$. Производящим пфаффианным тензором назовем ряд

$$T(u) = \sum_{k \geq 0} k! (-1)^k \sum_{I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, N\}} (e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}) \otimes \frac{1}{u^k} \text{Pf } F_I \in \Lambda \otimes U(\mathfrak{o}_n)[[u]].$$

Полагая $\Theta = \frac{1}{2} \sum_{i_1, i_2 \in \{1, \dots, N\}} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \otimes \frac{1}{u} F_{i_1 i_2}$, получаем соотношение $T(u) = (1 +$

$\Theta)^{-\wedge}$, где $-\wedge$ — обратный элемент во внешней алгебре Λ .

Работа выполнена при поддержке программы “Ведущие научные школы” (грант НШ-8508.2010.1), РФФИ (грант № 08-01-00342_а), программы “МК-2011” (грант № 4270.2011.1).

Определим тензоры $T_1(u)$, $T_2(u)$, $\mathcal{R}(u)$, $\mathcal{R}^t(u) \in \Lambda \otimes \Lambda \otimes U(\mathfrak{o}_n)[[u]]$ равенствами

$$\begin{aligned} T_1(u) &= \sum_{k \geq 0} k! (-1)^k \sum_{I=\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, N\}} (e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}) \otimes 1 \otimes \frac{1}{u^k} \text{Pf } F_I, \\ T_2(u) &= \sum_{k \geq 0} k! (-1)^k \sum_{I=\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, N\}} 1 \otimes (e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}) \otimes \frac{1}{u^k} \text{Pf } F_I, \\ \mathcal{R}(u) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{e_{ij} \otimes e_{ji} \otimes 1}{u^k} \right)^{\wedge k}, \quad \mathcal{R}^t(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{e_{ij} \otimes e_{ij} \otimes 1}{u^k} \right)^{\wedge k}. \end{aligned}$$

Рассмотренные выше тензоры имеют вид $(1+a)^{-\wedge} = \sum_k (-1)^k a^{\wedge k}$, где a — тензор ненулевого порядка, $-\wedge$ теперь обозначает обращение в алгебре $\Lambda \otimes \Lambda \otimes U(\mathfrak{o}_n)[[u]]$. Так, для $\mathcal{R}$ имеем $a = -\sum_{i,j} \frac{e_{ij} \otimes e_{ji} \otimes 1}{z}$, для $\mathcal{R}^t$ имеем $a = -\sum_{i,j} \frac{e_{ij} \otimes e_{ij} \otimes 1}{z}$, для T_1 имеем $a = \sum_{i,j} \frac{1}{2u} (e_i \wedge e_j) \otimes 1 \otimes F_{ij}$, для T_2 имеем $a = \sum_{i,j} \frac{1}{2u} 1 \otimes (e_i \wedge e_j) \otimes F_{ij}$.

Определим произведение рядов вида $\sum_k (-1)^k a^{\wedge k}$ и $\sum_l (-1)^l b^{\wedge l}$. Имеется (не всюду определенная) операция матричного умножения: $e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il}$ и $e_{ij}(e_k \wedge e_l) = e_{ij}(e_{kl} - e_{lk}) = \delta_{jk}e_{il} - \delta_{jl}e_{ik}$.

Определим сначала произведение членов ряда $a^{\wedge k} \bullet b^{\wedge l}$ по следующему правилу. Сначала $k+l$ позиций всеми возможными способами разбиваем на три группы, содержащие r_1, r_2, r_3 элементов, при этом требуем, чтобы $r_1 + r_3 = k$, $r_2 + r_3 = l$. На местах первой группы пишем элемент $c_i = a$, на местах второй группы пишем элемент $c_i = b$, на местах третьей группы пишем элемент $c_i = ab$. Строим произведение $c_1 \wedge \dots \wedge c_{k+l}$ и затем по всем разбиениям $k+l$ позиций суммируем полученные произведения.

$$\text{Положим } \sum_k (-1)^k a^{\wedge k} \bullet \sum_l (-1)^l b^{\wedge l} := \sum_{k,l} (-1)^{k+l} a^{\wedge k} \bullet b^{\wedge l}.$$

ТЕОРЕМА 4. *Справедливо следующее уравнение отражения:*

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(u-v) \bullet T_1\left(u + \frac{1}{2}\right) \bullet (\mathcal{R}^t(-u-v)) \bullet T_2\left(v + \frac{1}{2}\right) \\ = T_2\left(v + \frac{1}{2}\right) \bullet (\mathcal{R}^t(-u-v)) \bullet T_1\left(u + \frac{1}{2}\right) \bullet \mathcal{R}(u-v). \end{aligned}$$

Список литературы

- [1] А. И. Молев, *Янгианы и классические алгебры Ли*, МЦНМО, М., 2009; англ. пер.: A. I. Molev, *Yangians and classical Lie algebras*, Math. Surv. Monogr., **143**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007. [2] M. Itoh, T. Umeda, *Compos. Math.*, **127**:3 (2001), 333–359. [3] A. W. M. Dress, W. Wenzel, *Adv. Math.*, **112**:1 (1995), 120–134. [4] M. Ishikawa, S. Okada, M. Wakayama, *J. Algebra*, **183**:1 (1996), 193–216. [5] J.-G. Luque, J.-Y. Thibon, *Adv. Appl. Math.*, **29**:4 (2002), 620–646.

Д. В. Артамонов (D. V. Artamonov)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: artamonov.dmitri@gmail.com

Представлено В. М. Закалюкиным
Принято редакцией
06.12.2011

В. А. Голубева (V. A. Golubeva)
Московский авиационный институт
E-mail: golubeva@yahoo.com