Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. И. Мохов, О комплексах однородных форм на пространствах петель гладких многообразий и их группах когомологий, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 2, 141–142

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm946>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 12:58:07

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

О КОМПЛЕКСАХ ОДНОРОДНЫХ ФОРМ
НА ПРОСТРАНСТВАХ ПЕТЕЛЬ ГЛАДКИХ
МНОГООБРАЗИЙ И ИХ ГРУППАХ КОГОМОЛОГИЙ

О.И. Мохов

Пусть M — гладкое N -мерное многообразие с локальными координатами $u^1, \dots, u^N$. Под *пространством петель* ΩM многообразия M в этой статье мы будем понимать пространство всех гладких параметризованных отображений окружности S^1 в M , $\gamma: S^1 \rightarrow M$, $\gamma(x) = \{u^i(x)\}$, $x \in S^1$. Касательное пространство $T_\gamma \Omega M$ пространства петель ΩM в точке γ состоит из всех гладких векторных полей $\xi = \{\xi^i, 1 \leq i \leq N\}$, определенных вдоль петли γ , причем $\xi(\gamma(x)) \in T_{\gamma(x)} M$, $\forall x \in S^1$, где $T_{\gamma(x)} M$ — касательное пространство многообразия M в точке $\gamma(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Однородными k -формами порядка m на пространстве петель ΩM многообразия M мы будем называть кососимметрические формы вида*

$$(1) \quad \omega(\xi_1, \dots, \xi_k) = \int_{S^1} \left(\sum M_{i_1 \dots i_k j_1 \dots j_s}^{[n_1 \dots n_k p_1 \dots p_s]}(u) u_{(p_1)}^{j_1} \dots u_{(p_s)}^{j_s} (\xi_1^{i_1})_{(n_1)} \dots (\xi_k^{i_k})_{(n_k)} \right) dx,$$

где суммирование взято по всем $s \geq 0$ и по всем $n_1, \dots, n_k, p_1, \dots, p_s$ таким, что $n_1 + \dots + n_k + p_1 + \dots + p_s = m$, а также по всем $1 \leq i_r \leq N$, $1 \leq r \leq k$; $1 \leq j_l \leq N$, $1 \leq l \leq s$; $M_{i_1 \dots i_k j_1 \dots j_s}^{[n_1 \dots n_k p_1 \dots p_s]}(u)$ — гладкие функции на многообразии M .

Мы используем здесь стандартные обозначения для полных производных по x : $f_{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n}$. Отметим также, что всегда можно считать, что $0 < p_1 \leq \dots \leq p_s$, и, кроме того, $n_1 = 0$, так как в нашем случае $\int_{S^1} \frac{d}{dx} G dx = 0$ для всех рассматриваемых нами функций $G(x, u(x), u_x(x), \dots)$, заданных на петлях γ .

Очевидно, что определение класса $\Omega_{[m]}^k$ однородных k -форм порядка m на ΩM не зависит от локальных координат $\{u^i\}$, так как локальные замены координат на многообразии M : $u^i = u^i(v^1, \dots, v^N)$, не выводят однородные k -формы порядка m из этого класса.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 94-01-01478), Международного научного фонда (грант № RKR300) и INTAS (грант № 93-0166).

Дифференциал d на k -формах определим следующей формулой:

$$(2) \quad (d\omega)(\xi_1, \dots, \xi_{k+1}) = \sum_{q=1}^{k+1} (-1)^{q+1} \int_{S^1} (\xi_q^i)_{(r)} (\xi_1^{i_1})_{(n_1)} \cdots (\xi_{q-1}^{i_{q-1}})_{(n_{q-1})} (\xi_{q+1}^{i_q})_{(n_q)} \cdots (\xi_{k+1}^{i_k})_{(n_k)} \\ \times \frac{\partial (M_{i_1 \dots i_k j_1 \dots j_s}^{n_1 \dots n_k p_1 \dots p_s})(u) u_{(p_1)}^{j_1} \cdots u_{(p_s)}^{j_s}}{\partial u_{(r)}^i} dx.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ. Дифференциал d переводит однородную k -форму порядка m в однородную $(k+1)$ -форму порядка m :

$$d: \Omega_{[m]}^k \rightarrow \Omega_{[m]}^{k+1},$$

причем $d^2 = 0$.

Таким образом, для любого m определен комплекс $(\Omega_{[m]}, d)$ однородных форм порядка m на пространстве петель ΩM :

$$(3) \quad 0 \xrightarrow{d} \Omega_{[m]}^0 \xrightarrow{d} \Omega_{[m]}^1 \xrightarrow{d} \Omega_{[m]}^2 \xrightarrow{d} \cdots$$

Введем обозначения $Z_{[m]}^k(\Omega M)$ и $B_{[m]}^k(\Omega M)$ для замкнутых ($d\omega = 0$) и, соответственно, точных ($\omega = d\alpha$) однородных k -форм ω порядка m на ΩM и определим группы когомологий нашего комплекса:

$$(4) \quad H_{[m]}^k(\Omega M, R) = Z_{[m]}^k(\Omega M) / B_{[m]}^k(\Omega M).$$

Очевидно, что когомологии комплекса однородных форм нулевого порядка совпадают с когомологиями де Рама многообразия M :

$$H_{[0]}^i(\Omega M, R) = H^i(M, R).$$

При $m = 1$ имеет место следующая теорема о связи групп когомологий комплекса однородных форм первого порядка с группами когомологий де Рама.

ТЕОРЕМА. При $i = 0, 1, 2$

$$(5) \quad H_{[1]}^i(\Omega M, R) = H^{i+1}(M, R).$$

Отметим, что однородные k -формы первого порядка инвариантны относительно действия группы $\text{Diff}^+(S^1)$ диффеоморфизмов окружности, сохраняющих ориентацию.

В [1]–[3] автором были введены и изучены однородные симплектические структуры на пространствах петель гладких многообразий (замкнутые однородные 2-формы порядка m на ΩM). Такие симплектические (предсимплектические) формы на пространствах петель псевдоримановых или почти симплектических многообразий определяются дифференциально-геометрическими связностями на многообразии, удовлетворяющими некоторым специальным соотношениям, и описываются инвариантным образом в терминах ковариантных производных и соответствующих тензоров кривизны и кручения связностей (см. [1]–[3]). При $m = 1$ соответствующие однородные симплектические формы первого порядка задают гамильтоновы структуры двумерных нелинейных σ -моделей в теории поля (см. [1]–[3]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Мохов О. И. // Функци. анализ и его прилож. 1990. Т. 24. № 3. С. 86–87. [2] Мохов О. И. // Функци. анализ и его прилож. 1991. Т. 25. № 2. С. 65–67. [3] Mokhov O. I. // Topics in topology and mathematical physics / ed. S. P. Novikov. Amer. Math. Soc. Translations. Series 2. V. 170. Providence: AMS, 1995. P. 121–151; hep-th/9503076.

Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: mokhov@class.mian.su

Принято редколлегией
15.01.1996