Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Буфетов, О мультипликативных функционалах
детерминантных процессов, *УМН*, 2012, том 67, вы-
пуск 1, 177–178

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9460>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 16:32:03

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

О мультипликативных функционалах детерминантных процессов

А. И. Буфетов

Г. И. Ольшанский ставит в [1] вопрос об условиях абсолютной непрерывности детерминантных мер. Приводимое ниже предложение 1 показывает, что умножение детерминантной меры на мультипликативный функционал дает, после нормализации, вновь детерминантный процесс.

Пусть E — локально компактное полное метрическое пространство. Символом $\text{Conf}(E)$ обозначим пространство конфигураций на E с естественной борелевской структурой (см., например, [2], [3]). Взяв ограниченное борелевское подмножество $A \subset E$, рассмотрим функцию $\#_A: \text{Conf}(E) \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$, ставящую в соответствие конфигурации $\mathbf{X} \in \text{Conf}(E)$ число частиц в ней, попавших в A . Снабдим пространство E борелевской σ -конечной мерой μ ; символом $\mathcal{I}_1(E, \mu)$ обозначим идеал компактных операторов $\tilde{K}: L_2(E, \mu) \rightarrow L_2(E, \mu)$, имеющих конечный след.

Для ограниченной измеримой функции $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$ рассмотрим оператор $\text{Mult}_\varphi: f \rightarrow \varphi f$ умножения на φ . Если $A \subset E$ — борелевское множество, то его индикатор обозначим χ_A . Обозначим также $\text{Mult}_A = \text{Mult}_{\chi_A}$.

Взяв оператор $K: L_2(E, \mu) \rightarrow L_2(E, \mu)$, будем писать $K \in \mathcal{I}_{1,\text{loc}}(E, \mu)$, если для всякого ограниченного борелевского подмножества $A \subset E$ выполнено $\text{Mult}_A K \in \mathcal{I}_1(E, \mu)$.

Напомним, что борелевская вероятностная мера P на пространстве $\text{Conf}(E)$ называется *детерминантной*, если найдется оператор $K \in \mathcal{I}_{1,\text{loc}}(E, \mu)$ такой, что для произвольных дизъюнктных ограниченных борелевских множеств $A_1, \dots, A_l \subset E$ и произвольных $z_1, \dots, z_l \in \mathbb{C}$ выполнено равенство

$$E_P z_1^{\#_{A_1}} \dots z_l^{\#_{A_l}} = \det \left(1 + \sum_{i=1}^l (z_i - 1) \text{Mult}_{A_i} K \right). \quad (1)$$

Определитель Фредгольма в (1) корректно определен, так как $K \in \mathcal{I}_{1,\text{loc}}(E, \mu)$.

Всюду ниже K есть оператор из класса $\mathcal{I}_{1,\text{loc}}(E, \mu)$, задающий детерминантную меру, которую мы будем обозначать P_K . Оператор K определяет P_K однозначно, но одна и та же мера может задаваться разными операторами. По теореме Макки–Сошникова [3], [4], всякое эрмитово положительное сжатие, лежащее в классе $\mathcal{I}_{1,\text{loc}}(E, \mu)$, задает детерминантный процесс.

Автор — стипендиат Фонда Альфреда Слоуна и Фонда “Династия”. Работа выполнена при поддержке гранта МК-4893.2010.1 Президента РФ, программы Президиума РАН “Динамические системы и математическая теория управления”, грантов РФФИ № 11-01-00654 и № 10-01-93115-НЦНИЛ.

Взяв неотрицательную ограниченную измеримую функцию g на E , определим на $\text{Conf}(E)$ мультипликативный функционал Ψ_g по формуле

$$\Psi_g(\mathbf{X}) = \prod_{x \in \mathbf{X}} g(x), \quad \mathbf{X} \in \text{Conf}(E).$$

Если $\text{Mult}_{g-1} K \in \mathcal{J}_1(E, \mu)$, то $\Psi_g \in L_1(\text{Conf}(E), \mathbf{P}_K)$ и $\mathbf{E}_{\mathbf{P}_K} \Psi_g = \det(1 + \text{Mult}_{g-1} K)$ (см. [1], [3]). Предположим теперь, что оператор $1 + \text{Mult}_{g-1} K$ обратим, и введем операторы

$$b_g K = \text{Mult}_g K (1 + \text{Mult}_{g-1} K)^{-1}, \quad \tilde{b}_g K = \text{Mult}_{\sqrt{g}} K (1 + \text{Mult}_{g-1} K)^{-1} \text{Mult}_{\sqrt{g}}.$$

По определению, $b_g K, \tilde{b}_g K \in \mathcal{J}_{1, \text{loc}}(E, \mu)$, так как $K \in \mathcal{J}_{1, \text{loc}}(E, \mu)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть оператор $K \in \mathcal{J}_{1, \text{loc}}(E, \mu)$ задает детерминантную меру $\mathbf{P}_K$ на $\text{Conf}(E)$. Пусть g – неотрицательная ограниченная измеримая функция на E такая, что $\text{Mult}_{g-1} K \in \mathcal{J}_1(E, \mu)$, а оператор $1 + \text{Mult}_{g-1} K$ обратим. Тогда операторы $b_g K, \tilde{b}_g K$ задают детерминантную меру $\mathbf{P}_{b_g K} = \mathbf{P}_{\tilde{b}_g K}$ на пространстве $\text{Conf}(E)$, причем

$$\mathbf{P}_{b_g K} = \frac{\Psi_g \mathbf{P}_K}{\mathbf{E}_{\mathbf{P}_K} \Psi_g}.$$

Действительно, если f такова, что $\text{Mult}_{f-1} K \in \mathcal{J}_1$, то легко проверить равенство

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}_K} \Psi_f \Psi_g = \det(1 + \text{Mult}_{f-1} b_g K) = \det(1 + \text{Mult}_{f-1} \tilde{b}_g K),$$

из которого, с учетом (1), следует предложение.

Легко видеть, что если оператор K – положительное эрмитово сжатие, то и оператор $\tilde{b}_g K$ – положительное эрмитово сжатие. Например, если $\Pi: L_2(E, \mu) \rightarrow H$ есть ортогональный проектор на замкнутое подпространство H , то $\tilde{b}_g \Pi$ – ортогональный проектор на подпространство $\text{Mult}_{\sqrt{g}} H$.

Пусть $A \subset E$ – борелевское. Рассмотрим подмножество $\text{Conf}(E, A) \subset \text{Conf}(E)$ конфигураций, все частицы которых лежат в A (в случае дискретного E близкие процессы рассматривали А. М. Бородин и Э. М. Райнс [5]). Если $\text{Mult}_{E \setminus A} K \in \mathcal{I}_1(E, \mu)$, то выполнено равенство $\mathbf{P}_K(\text{Conf}(E, A)) = \det(1 - \text{Mult}_{E \setminus A} K)$. Если оператор $1 - \text{Mult}_{E \setminus A} K$ обратим, то $\mathbf{P}_K(\text{Conf}(E, A)) > 0$. Применяя предложение 1 к $g = \chi_A$, получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $\text{Mult}_{E \setminus A} K \in \mathcal{I}_1$, а оператор $1 - \text{Mult}_{E \setminus A} K$ обратим, то мера $\mathbf{P}_K$ индуцирует на $\text{Conf}(E, A)$ детерминантную меру $\mathbf{P}_{b_{\chi_A} K} = \mathbf{P}_{\tilde{b}_{\chi_A} K}$.

Список литературы

- [1] G. Olshanski, *Adv. Math.*, **226**:3 (2011), 2305–2350. [2] A. Lenard, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **59**:3 (1975), 219–239. [3] А. Б. Сошников, *УМН*, **55**:5(335) (2000), 107–160; англ. пер.: *Russian Math. Surveys*, **55**:5 (2000), 923–975. [4] O. Macchi, *Adv. Appl. Probab.*, **7** (1975), 83–122. [5] А. М. Borodin, E. М. Rains, *J. Statist. Phys.*, **121**:3–4 (2005), 291–317, arXiv: math-ph/0409059.

А. И. Буфетов (A. I. Bufetov)
МИАН, ИППИ РАН, НИУ ВШЭ
E-mail: bufetov@mi.ras.ru

Представлено Д. В. Аносовым
Принято редколлегией
19.01.2012