Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Герасимов, Д. Р. Лебедев, С. В. Облезин, Новые интегральные представления функций Уиттекера для классических групп Ли, *УМН*, 2012, том 67, выпуск 1, 3–96

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9463>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 17:52:48

УДК 517.986.68+517.912+519.4

Новые интегральные представления функций Уиттекера для классических групп Ли

А. А. Герасимов, Д. Р. Лебедев, С. В. Облезин

В работе получены новые интегральные представления $\mathfrak{g}$ -функций Уиттекера для произвольной полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$. В этих представлениях подынтегральная функция выражается через матричные элементы фундаментальных представлений алгебры $\mathfrak{g}$. Для классических алгебр Ли $\mathfrak{sp}_{2\ell}$, $\mathfrak{so}_{2\ell}$ и $\mathfrak{so}_{2\ell+1}$ получена модификация этой конструкции, являющаяся прямым обобщением интегрального представления $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$ -функций Уиттекера, которое было впервые построено Гивенталем. Представление Гивенталю имеет рекурсивную структуру относительно ранга $\ell+1$ алгебры Ли $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$, и предложенное обобщение на все классические алгебры Ли сохраняет это свойство. Ранее было замечено, что интегральный рекурсивный оператор для $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$ -функции Уиттекера в представлении Гивенталю совпадает с вырождением $\mathcal{Q}$ -оператора Бакстера для $\widehat{\mathfrak{gl}}_{\ell+1}$ -цепочек Тоды. В этой работе мы строим $\mathcal{Q}$ -операторы для аффинных алгебр Ли $\widehat{\mathfrak{so}}_{2\ell}$, $\widehat{\mathfrak{so}}_{2\ell+1}$ и скрученной формы алгебры $\widehat{\mathfrak{gl}}_{2\ell}$. Показано, что связь между рекурсивными интегральными операторами для обобщенных представлений Гивенталю и вырожденными $\mathcal{Q}$ -операторами сохраняется для всех классических алгебр Ли.

Библиография: 33 названия.

Ключевые слова: функция Уиттекера, цепочка Тоды, оператор Бакстера.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	5
1. Часть 1: результаты	7
1.1. Собственные функции цепочки Тоды как матричные элементы	7
1.1.1. Корневые данные для редуктивных групп	8
1.1.2. Модель Уиттекера для представлений основной серии	10
1.1.3. Функции Уиттекера как волновые функции цепочек Тоды	12
1.2. Интегральные представления собственных функций $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$ - и $\mathfrak{sl}_{\ell+1}$ -цепочек Тоды	15
1.2.1. $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$ -функция Уиттекера: факторизационная параметризация	17

1.2.2. $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$ -функция Уиттекера: модифицированная факторизационная параметризация.....	19
1.2.3. Связь с $\mathcal{Q}$ -оператором Бакстера $\widehat{\mathfrak{gl}}_{\ell+1}$ -цепочки Тоды.....	23
1.3. Интегральные представления собственных функций $\mathfrak{so}_{2\ell+1}$ -цепочки Тоды.....	26
1.3.1. $\mathfrak{so}_{2\ell+1}$ -функция Уиттекера: факторизационная параметризация.....	26
1.3.2. $\mathfrak{so}_{2\ell+1}$ -функция Уиттекера: модифицированная факторизационная параметризация.....	29
1.3.3. Рекурсия для $\mathfrak{so}_{2\ell+1}$ -функций Уиттекера и $\mathcal{Q}$ -оператор для $B_\ell^{(1)}$ -цепочки Тоды.....	36
1.4. Интегральные представления собственных функций $\mathfrak{sp}_{2\ell}$ -цепочки Тоды.....	41
1.4.1. $\mathfrak{sp}_{2\ell}$ -функция Уиттекера: факторизационная параметризация.....	41
1.4.2. $\mathfrak{sp}_{2\ell}$ -функция Уиттекера: модифицированная факторизационная параметризация.....	44
1.4.3. Рекурсия для $\mathfrak{sp}_{2\ell}$ -функций Уиттекера и $\mathcal{Q}$ -оператор для $A_{2\ell-1}^{(2)}$ -цепочки Тоды.....	50
1.5. Интегральные представления собственных функций $\mathfrak{so}_{2\ell}$ -цепочки Тоды.....	54
1.5.1. $\mathfrak{so}_{2\ell}$ -функция Уиттекера: факторизационная параметризация.....	54
1.5.2. $\mathfrak{so}_{2\ell}$ -функция Уиттекера: модифицированная факторизационная параметризация.....	58
1.5.3. Рекурсия для $\mathfrak{so}_{2\ell}$ -функций Уиттекера и $\mathcal{Q}$ -оператор для $D_\ell^{(1)}$ -цепочки Тоды.....	66
2. Часть 2. Доказательства.....	69
2.1. Мера на N_+ : доказательство леммы 1.2.....	71
2.2. Векторы Уиттекера для классических групп Ли: доказательства леммы 1.1 и предложения 1.1.....	73
2.3. Явные вычисления для матричных элементов.....	75
2.3.1. Выражения для $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$ -матричных элементов: доказательства теоремы 1.1 и теоремы 1.3.....	75
2.3.2. Выражения для $\mathfrak{so}_{2\ell+1}$ -матричных элементов: доказательства теоремы 1.4 и теоремы 1.6.....	78
2.3.3. Выражения для $\mathfrak{sp}_{2\ell}$ -матричных элементов: доказательства теоремы 1.8 и теоремы 1.10.....	81
2.3.4. Выражения для $\mathfrak{so}_{2\ell}$ -матричных элементов: доказательства теоремы 1.12 и теоремы 1.14.....	84
2.4. Реализация $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$ дифференциальными операторами.....	88
2.4.1. Образующие $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$: доказательство предложения 1.2.....	90
2.4.2. Образующие $\mathfrak{so}_{2\ell+1}$: доказательство предложения 1.4.....	90
2.4.3. Образующие $\mathfrak{sp}_{2\ell}$: доказательство предложения 1.8.....	91
2.4.4. Образующие $\mathfrak{so}_{2\ell}$: доказательство предложения 1.12.....	93
Список литературы.....	94

Введение

В работе [1] А. Гивенталем было предложено замечательное интегральное представление для общих собственных функций гамильтоновых операторов $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$ -цепочки Тоды (см. также [2]). Это представление естественно возникает в конструкции зеркальной симметрии для топологических замкнутых струн типа А на $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$ -многообразиях флагов. Интегральное представление Гивенталья имеет множество интересных свойств. Например, оно обладает явной рекурсивной структурой по отношению к рангу $\ell + 1$ соответствующей алгебры Ли $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$. Подынтегральная функция в интегральном представлении допускает сугубо комбинаторное описание в терминах простого графа, который можно отождествить с графом Гельфанда–Цейтлина, введенным в работе [3] для описания конечномерных представлений алгебры $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$. Такие же графы возникают при изучении плоских вырождений многообразий флагов к горнштейновым торическим многообразиям Фано [4], [5].

В работе [6] интегральное представление Гивенталья изучалось в рамках ретико-представленческого подхода к теории квантовых интегрируемых систем. Как показал Б. Костант [7], [8], общие собственные функции гамильтоновых операторов $\mathfrak{g}$ -цепочки Тоды описываются как обобщения классических функций Уиттекера [9] и могут быть выражены в терминах матричных элементов бесконечномерных представлений универсальной обертывающей алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. В работе [6] показано, что представление Гивенталья для собственных функций $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$ -цепочки Тоды совпадает с интегральным представлением соответствующего матричного элемента, полученного с использованием параметризации открытого подмножества $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$ -многообразия флагов.

Концептуальное объяснение данному специальному выбору координат на многообразии флагов можно дать, используя связь с формализмом $\mathcal{Q}$ -оператора Бакстера. В [6] также было замечено, что интегральное представление Гивенталья имеет рекурсивную структуру, которая связывает $\mathfrak{gl}_{\ell}$ - и $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$ -функции Уиттекера простым интегральным преобразованием. Соответствующий интегральный оператор совпадает с некоторым вырождением $\mathcal{Q}$ -оператора Бакстера для $\widehat{\mathfrak{gl}}_{\ell+1}$ -цепочки Тоды [10]. Хорошо известно, что $\mathcal{Q}$ -операторы реализуют в квантовых интегрируемых системах квантовые преобразования Бэклунда [11]. В классическом пределе формализм $\mathcal{Q}$ -оператора позволяет определить специальную систему координат на фазовом пространстве $\widehat{\mathfrak{gl}}_{\ell+1}$ -цепочки Тоды. Тем самым вырожденные $\mathcal{Q}$ -операторы определяют специальные координаты на открытом подмножестве многообразия флагов $\mathrm{GL}_{\ell+1}/B$ и непосредственно приводят к интегральному представлению Гивенталья для $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$ -функции Уиттекера.

До настоящего момента не было известно обобщение интегрального представления Гивенталья для $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$ -функций Уиттекера на алгебры Ли, отличные от $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$. Единственное известное обобщение [5], [12] конструкции Гивенталья состояло в интегральном представлении общих собственных функций определенных вырождений $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$ -цепочек Тоды [13]. Оно основано на плоских вырождениях многообразий частичных флагов G/P для $G = \mathrm{GL}(\ell + 1, \mathbb{C})$, где P – параболическая подгруппа в G [5].

В настоящей работе мы предлагаем универсальную конструкцию интегрального представления $\mathfrak{g}$ -функции Уиттекера для произвольной полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Для классических алгебр Ли $\mathfrak{sp}_{2\ell}$, $\mathfrak{so}_{2\ell}$ и $\mathfrak{so}_{2\ell+1}$ нам удалось модифицировать эту конструкцию и получить обобщение конструкции Гивенталья для классических алгебр Ли. Полученные таким образом интегральные представления обладают всеми характеристическими свойствами исходного интегрального представления Гивенталья. Интегральные представления для классических алгебр Ли имеют рекурсивную структуру. Далее, подынтегральные выражения в интегральных представлениях допускают комбинаторное описание в терминах графов. Предложенное обобщение на классические алгебры Ли основано на модификации факторизованного представления типичных элементов максимальных унитарных подгрупп в соответствующих группах Ли [14] (см. также [15], [16]). Конструкция модифицированного факторизованного представления существенно использует реализацию максимальных унитарных подгрупп классических групп Ли в виде явно заданных подгрупп в группе верхнетреугольных матриц (см., например, [17]). Также мы вводим $\mathcal{Q}$ -операторы Бакстера, связанные с классическими аффинными алгебрами Ли $\widehat{\mathfrak{so}}_{2\ell}$, $\widehat{\mathfrak{so}}_{2\ell+1}$ и со скрученной формой алгебры $\widehat{\mathfrak{gl}}_{2\ell}$. Мы показываем, что связь между интегральными операторами рекурсии обобщенного представления Гивенталья и вырожденными $\mathcal{Q}$ -операторами сохраняется для всех классических алгебр Ли.

Новое свойство построенного интегрального представления состоит в том, что в отличие от случая $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$ (где ядро оператора рекурсии задается простой функцией), интегральные ядра операторов рекурсии для всех других классических групп Ли заданы нетривиальными интегралами. Это наталкивает на мысль о том, что операторы рекурсии можно получить как композиции элементарных операторов. В самом деле, для нулевых собственных значений операторы рекурсии, связывающие собственные функции цепочки Тоды алгебр Ли с соседними рангами, можно представить как композиции элементарных операторов рекурсии, связывающих собственные функции цепочек Тоды *различных* классических серий.

Подчеркнем, что конструкция интегральных представлений $\mathfrak{g}$ -функций Уиттекера, изложенная в данной статье, допускает естественную интерпретацию в терминах торификации многообразий флагов для классических групп Ли. Граф, определяющий представление Гивенталья для классической группы Ли, можно отождествить с графом Гельфанда–Цейтлина (см., например, [18]). Эти графы также явно описывают торические вырождения соответствующих многообразий флагов, тем самым обобщая результаты работы [5] на все классические группы Ли.

Интегральное представление типа Гивенталья $\mathfrak{g}$ -функций Уиттекера для классических алгебр Ли находит прямое приложение в конструкции зеркальной симметрии для замкнутых струн типа А на многообразиях флагов, ассоциированных с классическими группами Ли G , $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$. Как показано у Гивенталья [1], зеркально симметричными к топологическим теориям струн типа А на многообразиях флагов, ассоциированных с группами Ли G , должны быть модели Ландау–Гинзбурга, связанные с двойственными по Ленглендсу группа-

ми $G^\vee$, для которых производящая функция корреляторов нулевого рода есть $\mathfrak{g}^\vee$ -функция Уиттекера, $\mathfrak{g}^\vee = \text{Lie}(G^\vee)$. В случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_{\ell+1}$ Гивенталь нашел описание суперпотенциала двойственной модели Ландау–Гинзбурга в терминах подынтегрального выражения в интегральном представлении соответствующей функции Уиттекера. Более того, интерпретация подынтегральных выражений в интегральных представлениях $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$ -функции Уиттекера в терминах торических вырождений многообразий флагов [4], [5], [19] позволяет дать явную конструкцию зеркальной симметрии. Мы предполагаем, что подынтегральные функции в интегральных представлениях для функций Уиттекера классических алгебр Ли имеют аналогичную связь с суперпотенциалами двойственных моделей Ландау–Гинзбурга.

Мы следуем следующему плану изложения. В части 1 мы предлагаем новые интегральные представления для $\mathfrak{g}$ -функций Уиттекера, отвечающих произвольной полупростой алгебре Ли $\mathfrak{g}$; при этом подынтегральные функции предложенных интегральных представлений выражены через матричные элементы фундаментальных представлений алгебры $\mathfrak{g}$. Соответствующее утверждение приведено в предложении 1.1. Затем для классических алгебр Ли $\mathfrak{so}_{2\ell+1}$, $\mathfrak{sp}_{2\ell}$ и $\mathfrak{so}_{2\ell}$ мы получаем модификацию этой конструкции, которая приводит к прямому обобщению интегрального представления для $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$ -функции Уиттекера, впервые полученного Гивенталем. Соответствующие результаты сформулированы в теоремах 1.3, 1.6, 1.10 и 1.14 соответственно. В части 2 собраны доказательства результатов, сформулированных в части 1.

Результаты этой работы были анонсированы в [20] (см. также [21], [22]) и в течение последних четырех лет докладывались на многих конференциях.

Авторы благодарны С. Харчеву за обсуждения на начальном этапе этого проекта. Работа первого автора выполнена при поддержке Enterprise Ireland Basic Research Grant. Второй автор благодарен факультету математики Тринити-колледжа в Дублине и Математическому институту им. Макса Планка за гостеприимство. Третий автор также благодарит Математический институт им. Макса Планка за гостеприимство; его исследования были частично поддержаны грантом Пьера Делиня, основанным на премии Бальзана по математике 2004 года.

1. Часть 1: результаты

1.1. Собственные функции цепочки Тоды как матричные элементы. Собственные функции $\mathfrak{g}$ -цепочки Тоды задаются определенными матричными элементами бесконечномерных представлений алгебры Ли $\mathfrak{g}$ [7], [8] (подробное изложение этого вопроса можно найти, например, в [23]). В этом разделе мы строим интегральные представления этих матричных элементов, подынтегральные функции которых выражены через матричные элементы конечномерных представлений алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Затем, в разделе 1.2 и в последующих разделах, получены явные выражения для соответствующих матричных элементов конечномерных представлений, использующих специальную параметризацию на максимальных унипотентных подгруппах. Также получены

интегральные представления для собственных функций $\mathfrak{g}$ -цепочек Тоды, обобщающие результаты Гивенталья для случая $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_{\ell+1}$ на остальные классические алгебры Ли. Начнем со стандартных определений теории алгебр Ли, следуя в основном книге [24]; обсуждение корневых данных для редуктивных групп также можно найти в обзоре [25].

1.1.1. Корневые данные для редуктивных групп. Корневые данные – это четверка $(X, \Phi, X^\vee, \Phi^\vee)$, где X – решетка конечного ранга, $X^\vee$ – двойственная решетка, Φ и $\Phi^\vee$ – подмножества в X и $X^\vee$, снабженные биекцией $\alpha \mapsto \alpha^\vee$ из Φ в $\Phi^\vee$, для которой выполнены следующие условия. Во-первых, $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$ для любого $\alpha \in \Phi$. Во-вторых, подмножества Φ и $\Phi^\vee$ должны быть инвариантны относительно всех автоморфизмов $s_\alpha, s_{\alpha^\vee}$:

$$s_\alpha(x) = x - \langle x, \alpha^\vee \rangle \alpha, \quad s_{\alpha^\vee}(y) = y - \langle y, \alpha \rangle \alpha^\vee, \quad x \in X, \quad y \in X^\vee, \quad \alpha \in \Phi.$$

Пусть $Q \subset X$ – подрешетка, порожденная элементами Φ , и P – решетка, определенная как

$$P = \{x \in X \otimes \mathbb{Q} \mid \langle x, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z}, \alpha \in \Phi\}.$$

Тогда $Q \subset P$ и группа P/Q конечна. Пусть $X_0 \subset X$ – подрешетка, заданная условиями

$$X_0 = \{x \in X \mid \langle x, y \rangle = 0, y \in \Phi^\vee\}.$$

С каждой редуктивной группой Ли можно связать корневые данные. А именно, пусть G – связная комплексная редуктивная группа Ли и $H \subset G$ – максимальный тор (подгруппа Картана). Свяжем с парой (G, H) корневые данные $(X, \Phi, X^\vee, \Phi^\vee)$ следующим образом. Пусть X – решетка характеров подгруппы H , являющаяся свободной абелевой группой конечного ранга, и $X^\vee = \text{Hom}(\mathbb{C}^*, H)$ – двойственная решетка однопараметрических мультипликативных подгрупп в H . Спаривание $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X^\vee \rightarrow \mathbb{Z}$ задается условием

$$\lambda(u(t)) = t^{\langle \lambda, u \rangle}, \quad \lambda \in X, \quad u \in X^\vee, \quad t \in \mathbb{C}^*.$$

Определим конечные подмножества Φ и $\Phi^\vee$ в X и $X^\vee$ соответственно, вместе с биекцией $\alpha \mapsto \alpha^\vee$ из Φ в $\Phi^\vee$. Присоединенное действие подгруппы H на алгебре Ли $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ определяет корневое разложение

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \Phi} \mathbb{C} e_\alpha, \quad \mathfrak{h} = \text{Lie}(H),$$

которое в свою очередь задает подмножество $\Phi \subset X$. Пусть B – борелевская подгруппа, содержащая H . На Φ имеется ровно одно упорядочение $>$, для которого подалгебра $\mathfrak{b} = \text{Lie}(B)$ порождается $\mathfrak{h} = \text{Lie}(H)$ и e_α по всем $\alpha > 0$. Зафиксируем базис $\Pi = \{\alpha_i, i \in \Gamma\}$ в Φ , согласованный с этим упорядочением, для некоторого множества Γ .

Имеется разложение $G = Z_0 \cdot G'$, где Z_0 – связная компонента единицы центра Z группы G , а подгруппа G' полупроста и совпадает с коммутантом группы G . Тогда $H = Z_0 \cdot H'$, где H' – максимальный тор в группе G' . Корневые данные, связанные с парой (G', H') , – это четверка $(X/X_0, \Phi, Q^\vee, \Phi^\vee)$, где $Q \subset X/X_0$. Имея базис $\{\alpha_i^\vee, i \in \Gamma\}$ в $Q^\vee$ и базис $\{\omega_j, j \in \tilde{\Gamma}\}$ в X , можно выбрать

такой набор представителей $\{\omega'_i = \omega_i + X_0, i \in \Gamma \subset \tilde{\Gamma}\}$ в X/X_0 , что $\{\omega'_i, i \in \Gamma\}$ образуют базис, двойственный к $\{\alpha_i^\vee, i \in \Gamma\}$.

В дальнейшем, если не оговорено противное, мы считаем, что $\mathfrak{g}$ – полупростая алгебра Ли ранга ℓ . Пусть $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ – картановская подалгебра, и $\mathfrak{b}_\pm$ – пара противоположных борелевских подалгебр алгебры $\mathfrak{g}$, содержащих $\mathfrak{h}$ и согласованных с корневым разложением и с упорядочением $>$ на Φ . Имеется разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$, где $\mathfrak{n}_\pm \subset \mathfrak{b}_\pm$ – нильпотентный радикал. Далее, Γ – множество вершин диаграммы Дынкина, отвечающей системе корней полупрострой алгебры $\mathfrak{g}$, и $|\Gamma| = \dim \mathfrak{h} = \ell$. Пусть $\Pi = \{\alpha_i \in \mathfrak{h}^*, i \in \Gamma\}$ – множество простых корней, $\{\omega_i \in \mathfrak{h}^*, i \in \Gamma\}$ – набор фундаментальных весов и $\Pi^\vee = \{\alpha_i^\vee \in \mathfrak{h}, i \in \Gamma\}$ – множество кокорней, определенное формулой $\langle \alpha_i^\vee, \omega_j \rangle = \delta_{ij}$. Рассмотрим матрицу Картана $A = \|a_{ij}\|, i, j = 1, \dots, \ell$, алгебры Ли $\mathfrak{g}$, элементы которой заданы как $a_{ij} = \langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle$. Обозначим через R_+ множество положительных корней алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и пусть ρ – это полусумма положительных корней, т.е. $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R_+} \alpha$. Найдутся положительные рациональные

числа $d_1, \dots, d_\ell$, для которых матрица $\|b_{ij}\| = \|d_i a_{ij}\|$ симметрична. Определим симметрическую билинейную форму на $\mathfrak{h}^*$ по формуле $(\alpha_i, \alpha_j) = b_{ij}$. Эта форма определяет невырожденное спаривание $\nu: \mathfrak{h} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}^*$, заданное условием $\nu(\alpha_i^\vee) = d_i^{-1} \alpha_i$.

Обозначим через $e_i, f_i, h_i, i = 1, \dots, \ell$, множество образующих Шевалле полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$, т.е. $e_i = e_{-\alpha_i}, f_i = e_{\alpha_i}, h_i = \alpha_i^\vee, i = 1, \dots, \ell$. Они удовлетворяют следующим соотношениям:

$$[h_i, h_j] = 0, \quad (1.1)$$

$$[h_i, e_j] = a_{ij} e_j, \quad [h_i, f_j] = -a_{ij} f_j, \quad [e_i, f_j] = \delta_{ij} h_i, \quad (1.2)$$

$$(\text{ad } e_i)^{1-a_{ij}} e_j = 0, \quad (\text{ad } f_i)^{1-a_{ij}} f_j = 0, \quad i \neq j. \quad (1.3)$$

Инвариантная симметрическая билинейная форма на алгебре $\mathfrak{g}$ определяется условиями

$$(h_i, h_j) = b_{ij} d_i^{-1} d_j^{-1}, \quad (e_i, f_j) = \delta_{ij} d_i^{-1}, \quad (e_i, h_j) = (f_i, h_j) = 0.$$

Единственная неполупростая редуктивная алгебра Ли, рассматриваемая в этой работе, – это алгебра Ли $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$. Мы явно задаем алгебру Ли образующими и соотношениями следующим образом. Рассмотрим множество образующих

$$\{e_{i,i \pm 1}, i = 1, \dots, \ell; \quad e_{k,k}, k = 1, \dots, \ell + 1\}$$

алгебры $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$. Они удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} [e_{i,i}, e_{j,j}] &= 0, & [e_{i,i+1}, e_{i+1,i}] &= e_{i,i} - e_{i+1,i+1}, \\ [e_{i,i}, e_{i,i+1}] &= e_{i,i+1}, & [e_{i+1,i+1}, e_{i,i+1}] &= -e_{i,i+1}, \\ [e_{i,i}, e_{i+1,i}] &= -e_{i+1,i}, & [e_{i+1,i+1}, e_{i+1,i}] &= e_{i+1,i}, \\ (\text{ad}_{e_{i,i+1}})^2 e_{j,j+1} &= 0, & (\text{ad}_{e_{i+1,i}})^2 e_{j+1,j} &= 0, & |i - j| &= 1. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Пусть $W = W(\mathfrak{g})$ – группа Вейля системы корней алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Она порождена простыми отражениями $s_i = s_{\alpha_i}$, $i \in \Gamma$, которые действуют в пространстве $\mathfrak{h}^*$ посредством следующих линейных преобразований:

$$s_i(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \alpha_i, \quad \lambda \in \mathfrak{h}^*. \quad (1.5)$$

Определяющие соотношения в группе Вейля имеют вид

$$s_i^2 = 1, \quad (s_i s_j)^{m_{ij}} = 1, \quad i, j = 1, \dots, \ell, \quad (1.6)$$

где

$$m_{ij} = 2, 3, 4, 6, \infty$$

для

$$a_{ij} a_{ji} = 0, 1, 2, 3, \geq 4$$

соответственно. Для элемента $w \in W$ приведенное слово – это последовательность индексов $I_w = (i_1, \dots, i_{l(w)})$, $i_k \in \Gamma$, минимальной длины, для которой $w = s_{i_1} \cdots s_{i_{l(w)}}$. Целое число $l(w)$ называется длиной элемента w . Обозначим через w_0 единственный элемент максимальной длины и положим $m = l(w_0)$. Ниже мы фиксируем подъем $\dot{w} \in G$ элемента $w \in W$, так что $w(u) = \text{Ad}_{\dot{w}} u$ для всех $u \in \mathfrak{g}$. Для простых отражений s_i определим

$$\dot{s}_i = e^{f_i} e^{-e_i} e^{f_i},$$

а для $w = s_{i_1} \cdots s_{i_{l(w)}}$ положим $\dot{w} = \dot{s}_{i_1} \cdots \dot{s}_{i_{l(w)}}$. Так определенный $\dot{w}$ не зависит от разложения элемента w в произведение простых отражений (см, например, [24; лемма 3.8]).

1.1.2. Модель Уиттекера для представлений основной серии. Рассмотрим универсальную обертывающую $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Пусть V и V' – это $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ -модули. Они называются сопряженными, если имеется такое невырожденное спаривание $\langle \cdot, \cdot \rangle: V' \times V \rightarrow \mathbb{C}$, что $\langle v', Xv \rangle = -\langle Xv', v \rangle$ для всех $v \in V$, $v' \in V'$ и $X \in \mathfrak{g}$. Мы предполагаем, что действие картановской подалгебры на V , V' может быть проинтегрировано до действия максимального тора.

Пусть $B_- = N_- H$ и $B_+ = H N_+$ – пара противоположных борелевских подгрупп, где H – максимальный тор, и $N_\pm$ – пара противоположных максимальных унипотентных подгрупп в G . Положим $\mathfrak{h} = \text{Lie}(H)$ и $\mathfrak{n}_\pm = \text{Lie}(N_\pm)$. Характеры алгебры $\mathfrak{n}_\pm$ определяются своими значениями на образующих, отвечающих простым корням. Пусть $\chi_\pm: \mathfrak{n}_\pm \rightarrow \mathbb{C}$ – это характер алгебры $\mathfrak{n}_\pm$, определенный условием $\chi_+(f_i) := -1$ (соответственно $\chi_-(e_i) := -1$) для всех $i = 1, \dots, \ell$. Вектор $\psi_R \in V$ называется вектором Уиттекера относительно χ_+ , если

$$f_i \psi_R = \chi_+(f_i) \psi_R = -\psi_R, \quad i = 1, \dots, \ell. \quad (1.7)$$

Аналогично, вектор $\psi_L \in V'$ называется вектором Уиттекера относительно χ_- , если

$$e_i \psi_L = \chi_-(e_i) \psi_L = -\psi_L, \quad i = 1, \dots, \ell. \quad (1.8)$$

Вектор Уиттекера ψ называется циклическим, если $\mathcal{U}(\mathfrak{g})\psi = V$. Далее, $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ -модуль V называется модулем Уиттекера, если он содержит циклический вектор Уиттекера. Каждый $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ -модуль Уиттекера V допускает инфинитезимальный характер ξ . Это означает, что имеется такой гомоморфизм $\xi: \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathbb{C}$ из центра $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})$, что $zv = \xi(z)v$ для всех $z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ и $v \in V$.

Рассмотрим представление основной серии $\text{Ind}_{B_-}^G \chi_\mu$ группы G , индуцированное характером χ_μ подгруппы $B_- = HN_-$, который тривиален на N_- . Оно реализуется в пространстве функций $f \in L^2(G)$, удовлетворяющих условию B_- -эквивариантности

$$f(bg) = \chi_\mu(b)f(g), \quad (1.9)$$

где группа G действует правыми сдвигами $(g_1 \cdot f)(g_2) = f(g_2 g_1)$. Мы интересуемся инфинитезимальной формой $\text{Ind}_{\mathcal{U}(\mathfrak{b}_-)}^{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} \chi_\mu$ этого представления. Действие алгебры Ли $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ в инфинитезимальной форме задано формулой

$$(Xf)(g) = \frac{d}{d\varepsilon} f(g e^{\varepsilon X}) \Big|_{\varepsilon \rightarrow 0}, \quad X \in \mathfrak{g}. \quad (1.10)$$

Обозначим через (π_μ, V_μ) соответствующий $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ -модуль.

Пусть $G(\mathbb{R})$ – вполне расщепимая вещественная форма редуктивной группы Ли G , $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \text{Lie}(G(\mathbb{R}))$ – соответствующая алгебра Ли и $N_+(\mathbb{R}) \subset N_+ \cap G(\mathbb{R})$ – унитарная подгруппа в $G(\mathbb{R})$. Рассмотрим биинвариантную меру Хаара $d\mu_{G(\mathbb{R})}$ на $G(\mathbb{R})$. Имеет место разложение Брюа $G(\mathbb{R}) = \coprod_{w \in W} B_-(\mathbb{R})wB_+(\mathbb{R})$.

Пусть $G_0(\mathbb{R}) = B_-(\mathbb{R})N_+(\mathbb{R})$ – это w -компонента этого разложения при $w = 1$. Ограничение меры $d\mu_{G(\mathbb{R})}$ на $G_0(\mathbb{R})$ с точностью до нормализации имеет следующий вид (см. [26]):

$$d\mu_{G(\mathbb{R})}(g) = \delta_{B_+(\mathbb{R})}(b) d\mu_{B_+(\mathbb{R})}(b) \wedge d\mu_{N_+(\mathbb{R})}(x). \quad (1.11)$$

Здесь $\delta_{B_+(\mathbb{R})}$ – модулярная функция на $B_+(\mathbb{R})$; для любого $b = ng_0 \in N_+(\mathbb{R})H$ она равна $\delta_{B_+(\mathbb{R})}(b) = \exp\{2\langle \rho, \ln g_0 \rangle\}$.

Положим $\mu = i\lambda - \rho$ и рассмотрим невырожденное спаривание $V_\mu \times V_\mu \rightarrow \mathbb{C}$:

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_{N_+(\mathbb{R})} d\mu_{N_+(\mathbb{R})}(x) f_1(x) \overline{f_2(x)},$$

где $d\mu_{N_+(\mathbb{R})}$ – ограничение (1.11) на $N_+(\mathbb{R})$. Это определяет на V_μ структуру унитарного представления π_μ алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$, и мы имеем $\langle f_1, Xf_2 \rangle = -\langle Xf_1, f_2 \rangle$ для любого $X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$.

Мы будем рассматривать несколько более общее спаривание, которое определяется следующим образом. Заметим, что $N_+(\mathbb{R}) \subset N_+$ является вещественной некомпактной подгруппой половинной размерности. Имеется естественная комплексная структура на алгебре Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C} = \mathfrak{g}^{1,0} \oplus \mathfrak{g}^{0,1}$, которая индуцирует комплексную структуру на N_+ . Тогда пространство голоморфных функций на N_+ является модулем относительно голоморфного действия подалгебры $\mathfrak{g}^{1,0} \subset \mathfrak{g}$. Правоинвариантная мера $d\mu_{N_+(\mathbb{R})}$ может быть продолжена до голоморфной формы $d\mu_{N_+}^{\text{hol}}$ максимальной степени на N_+ . Пусть $C \subset N_+$ –

произвольное некомпактное подмногообразие половинной размерности. Рассмотрим спаривание

$$\langle f_1, f_2 \rangle_C = \int_C d\mu_{N_+}^{\text{hol}}(x) f_1(x) \overline{f_2(\bar{x})}$$

на пространстве $\mathcal{S}_C^{\text{hol}}(N_+)$ голоморфных функций на N_+ , которые вместе со всеми своими производными экспоненциально убывают после ограничения на C . Это спаривание удовлетворяет условиям $\langle f_1, Xf_2 \rangle_C = -\langle Xf_1, f_2 \rangle_C$ для любого $X \in \mathfrak{g}^{1,0}$.

1.1.3. *Функции Уиттекера как волновые функции цепочек Тоды.* Следуя Костанту [7], [8], можно выразить собственные функции $\mathfrak{g}$ -цепочек Тоды в терминах инвариантного спаривания на модулях Уиттекера:

$$\Psi_\lambda^{\mathfrak{g}}(x) = e^{-\langle \rho, x \rangle} \langle \psi_L, \pi_\mu(e^{-h_x}) \psi_R \rangle, \quad x \in \mathfrak{h}, \quad (1.12)$$

где $h_x := \sum_{i=1}^{\ell} \langle \omega_i, x \rangle h_i$. В частном случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ функция $\Psi_\lambda^{\mathfrak{g}}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, совпадает с классической модифицированной функцией Бесселя 2-го рода [9] (иногда эту функцию называют функцией Макдональда). Ниже мы используем для матричного элемента (1.12) термин “ $\mathfrak{g}$ -функция Уиттекера” (см., например, [23]). Несколько другое определение функции Уиттекера дано в [27], [28].

Рассмотрим следующее множество коммутирующих дифференциальных операторов $\mathcal{H}_k \in \text{Diff}(\mathfrak{h})$, $k = 1, \dots, \ell$, отвечающих множеству $\{c_k, k = 1, \dots, \ell\}$ образующих центра $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})$:

$$\mathcal{H}_k \Psi_\lambda^{\mathfrak{g}}(x) = e^{-\langle \rho, x \rangle} \langle \psi_L, \pi_\mu(e^{-h_x}) c_k \psi_R \rangle. \quad (1.13)$$

Квадратичный образующий центра $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ (элемент Казимира) имеет вид

$$c_2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{\ell} c_{ij} h_i h_j + \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R_+} (e_\alpha f_\alpha + f_\alpha e_\alpha), \quad (1.14)$$

где матрица $\|c_{ij}\| = \|d_i d_j (b^{-1})_{ij}\|$ обратна к матрице $\|(\alpha_i^\vee, \alpha_j^\vee)\|$. Пусть $\{\epsilon_i, i = 1, \dots, \ell\}$ – ортонормированный базис в $\mathfrak{h}$, т.е. $(\epsilon_i, \epsilon_j) = \delta_{ij}$, и $x = \sum_{i=1}^{\ell} x_i \epsilon_i$ – разложение элемента $x \in \mathfrak{h}$ по этому базису. Проекция (1.13) элемента (1.14) определяет хорошо известный гамильтонов оператор $\mathfrak{g}$ -цепочки Тоды (см., например, [13])

$$\mathcal{H}_2^{\mathfrak{g}} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\ell} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^{\ell} d_i e^{\langle \alpha_i, x \rangle}. \quad (1.15)$$

Операторы $\mathcal{H}_k$ образуют полный набор коммутирующих гамильтонианов $\mathfrak{g}$ -цепочки Тоды [7].

Отметим, что собственные функции (1.12) $\mathfrak{g}$ -цепочки Тоды записаны в весьма абстрактной форме. Чтобы получить явные интегральные представления, для начала выразим матричные элементы (1.12) бесконечномерных представлений в терминах матричных элементов конечномерных представлений алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Пусть π_i , $i \in \Gamma$, – фундаментальные представления, отвечающие фундаментальным весам ω_i , $i \in \Gamma$, алгебры Ли $\mathfrak{g}$, и пусть $\xi_{\omega_i}^{+/-}$, $i \in \Gamma$, – старшие/младшие векторы в этих представлениях, которые определяются условиями $\mathfrak{n}_{\pm}\xi_i^{\pm} = 0$, $i \in \Gamma$, и нормализованы так, что $\langle \xi_{\omega_i}^- | \xi_{\omega_i}^+ \rangle = 1$. Для старшего вектора $\xi_{\omega_i}^+$ в фундаментальном представлении V_{ω_i} имеем $s_i^{-1}\xi_{\omega_i}^+ = e_i\xi_{\omega_i}^+$. Рассмотрим следующие матричные элементы в фундаментальных (конечномерных) представлениях:

$$\Delta_{\omega_i, w}(g) = \langle \xi_{\omega_i}^- | \pi_i(g)\pi_i(w) | \xi_{\omega_i}^+ \rangle, \quad w \in W, \quad g \in G. \quad (1.16)$$

ЛЕММА 1.1. *Левый и правый векторы Уиттекера, определенные в (1.8) и (1.7), имеют вид*

$$\psi_R(v) = \exp \left\{ - \sum_{i=1}^{\ell} \frac{\Delta_{\omega_i, \dot{s}_i^{-1}}(v)}{\Delta_{\omega_i, 1}(v)} \right\}, \quad (1.17)$$

$$\psi_L(v) = \prod_{i=1}^{\ell} (\Delta_{\omega_i, \dot{w}_0^{-1}}(v))^{i\langle \lambda, \alpha_i^{\vee} \rangle - 1} \cdot \exp \left\{ \sum_{i=1}^{\ell} \frac{\Delta_{\omega_i, \dot{w}_0^{-1} \dot{s}_i^{-1}}(v)}{\Delta_{\omega_i, \dot{w}_0^{-1}}(v)} \right\}. \quad (1.18)$$

Доказательство приведено в разделе 2.2 части 2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Пусть $\mathfrak{g}$ – полупростая алгебра Ли. Общие собственные функции (1.12) $\mathfrak{g}$ -цепочки Тоды допускают следующее интегральное представление:*

$$\begin{aligned} \Psi_{\lambda}^{\mathfrak{g}}(x) &= e^{i\langle \lambda, x \rangle} \int_C d\mu_{N_+}^{\text{hol}}(v) \prod_{i=1}^{\ell} (\Delta_{\omega_i, \dot{w}_0^{-1}}(v))^{i\langle \lambda, \alpha_i^{\vee} \rangle - 1} \\ &\quad \times \exp \left\{ \sum_{i=1}^{\ell} \left(\frac{\Delta_{\omega_i, \dot{w}_0^{-1} \dot{s}_i^{-1}}(v)}{\Delta_{\omega_i, \dot{w}_0^{-1}}(v)} - e^{\langle \alpha_i, x \rangle} \frac{\Delta_{\omega_i, \dot{s}_i^{-1}}(v)}{\Delta_{\omega_i, 1}(v)} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (1.19)$$

где $\Delta_{\omega_i, w}(g)$ определено в (1.16). Здесь $C \subset N_+$ – некомпактный цикл половинной размерности, для которого подынтегральное выражение экспоненциально убывает на границе и на бесконечности. Интегральная мера определяется как ограничение на C голоморфного продолжения $d\mu_{N_+}^{\text{hol}}$ правоинвариантной меры $d\mu_{N_+(\mathbb{R})}$ на $N_+(\mathbb{R})$.

Первый пример интегрального представления этого типа для $\mathfrak{gl}_n$ -функций Уиттекера был рассмотрен в [29]. Указанное выше представление является его прямым обобщением. Доказательство предложения 1.1 дано в разделе 2.2 части 2.

Выражение (1.19) для функции Уиттекера является более детальным по сравнению с (1.12), однако все равно не дает явного интегрального представления. Для получения приемлемого представления функций Уиттекера надо

выбрать параметризацию на N_+ (или на его открытом подмножестве) и выразить меру $d\mu_{N_+}^{\text{hol}}$ и матричные элементы, входящие в (1.19), через соответствующие координаты на N_+ . Естественный выбор состоит в разложении элементов из открытого подмножества максимальной унипотентной подгруппы произвольной группы Ли в произведение определенного вида [14] (см. также [16], [15]). Для каждого $i \in \Gamma$ рассмотрим однопараметрическую подгруппу $X_i(t) = \exp\{tf_i\}$ в N_+ . Фиксируем разложение элемента максимальной длины w_0 группы Вейля $W = W(\mathfrak{g})$, отвечающее приведенному слову $I_{w_0} = (i_1, \dots, i_m)$, $l(w_0) = m = \dim N_+$. Тогда отображение

$$\mathbb{C}^m \dashrightarrow N_+^{(0)}, \quad (t_1, \dots, t_m) \mapsto v(t_1, \dots, t_m) = X_{i_1}(t_1) \cdots X_{i_m}(t_m), \quad (1.20)$$

является бирациональным изоморфизмом. Это определяет параметризацию открытого подмножества $N_+^{(0)}$ в N_+ , которую мы называем факторизационной. Параметризации, отвечающие различным выборам приведенного слова I_{w_0} , связаны бирациональными преобразованиями, которые явно описаны Г. Люстигом [14]. Правоинвариантная мера здесь допускает следующее описание.

ЛЕММА 1.2. *Правоинвариантная мера $d\mu_{N_+}^{\text{hol}}$ в факторизационной параметризации задается формулой*

$$d\mu_{N_+}^{\text{hol}}(v) = \prod_{i=1}^{\ell} \Delta_{\omega_i, w_0^{-1}}(v) \bigwedge_{k=1}^m \frac{dt_k}{t_k}. \quad (1.21)$$

Доказательство этого факта дано в разделе 2.1 части 2.

Тем самым проблема нахождения явных интегральных представлений для функций Уиттекера в факторизационной параметризации (1.20) сводится к вычислению матричных элементов конечномерных представлений алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в этой параметризации. Ниже (в теоремах 1.1, 1.4, 1.8 и 1.12) мы приводим соответствующие интегральные представления функций Уиттекера, а явные вычисления матричных элементов конечномерных представлений приведены в разделе 2.2. Следует отметить, что полученное таким образом интегральное представление для $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_{\ell+1}$ не совпадает с представлением Гивенталья [1]. Заметим, что для классических серий алгебр Ли факторизационная параметризация (1.20) имеет рекурсивную структуру относительно ранга ℓ , которая отражает рекурсивную структуру приведенного разложения элемента $w_0 \in W$. Однако эта структура не дает простой рекурсивной формы для матричных элементов бесконечномерных представлений в факторизационной параметризации и не воспроизводит рекурсивную структуру на интегральном представлении Гивенталья.

В работе [6] предложена модификация факторизационной параметризации (1.20) для $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_{\ell+1}$. Там показано, что интегральное представление (1.19) в этой параметризации в точности воспроизводит интегральное представление Гивенталья для $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$ -функций Уиттекера. В частности, для этой параметризации рекурсивная структура приведенного разложения элемента $w_0 \in W(A_\ell)$ определяет рекурсивную структуру интегрального представления соответствующей функции Уиттекера.

В данной работе мы обобщаем результаты [6] на все классические серии алгебр Ли. Мы предлагаем модификацию факторизационной параметризации (1.20), основанную на специальной реализации максимальных унитарных подгрупп $N_+ \subset G$ классических групп Ли как явно определенных подгрупп в максимальной унитарной подгруппе общей линейной группы. Для любой простой классической группы Ли максимальная унитарная подгруппа может быть реализована как подгруппа в группе верхнетреугольных матриц подходящего размера с единицами на диагонали (см., например, [17]). Соответствующее подмножество верхнетреугольных матриц для классической группы Ли можно описать явно. Мы определяем параметризацию на максимальных унитарных подгруппах классических групп посредством параметризации специального вида на соответствующем подмножестве верхнетреугольных матриц. Используя эту параметризацию, мы получаем явные интегральные представления для функций Уиттекера, связанных с классическими группами, и показываем, что эти интегральные представления обладают всеми характеристическими свойствами интегрального представления Гивенталья для $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$ -функций Уиттекера. В частности, в новой параметризации интегральное представление для функций Уиттекера обладает рекурсивной структурой по рангу соответствующей алгебры Ли.

1.2. Интегральные представления собственных функций $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$ - и $\mathfrak{sl}_{\ell+1}$ -цепочек Тоды. В этом разделе мы напомним конструкцию интегральных представлений для собственных функций $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$ - и $\mathfrak{sl}_{\ell+1}$ -цепочек Тоды, которая использует факторизационную параметризацию (1.20) на открытом подмножестве $N_+^{(0)}$ максимальной унитарной подгруппы $N_+ \subset \mathrm{GL}(\ell+1)$ и ее модификацию из работы [6]. Вторая параметризация приводит к интегральному представлению, которое ранее было получено Гивенталем [1] исходя из других соображений. Затем эти конструкции обобщаются на $\mathfrak{g}$ -цепочки Тоды для произвольных классических алгебр Ли $\mathfrak{g}$.

Начнем со случая редуктивной алгебры Ли $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$. Пусть $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_{\ell+1}\}$ – ортонормированный базис в $\mathbb{R}^{\ell+1}$, т. е. $(\epsilon_i, \epsilon_j) = \delta_{i,j}$. Корни и фундаментальные веса для $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$ отождествляются со следующими векторами в $\mathbb{R}^{\ell+1}$:

$$\alpha_i = \epsilon_{i+1} - \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, \ell, \quad \omega_j = -\epsilon_j, \quad j = 1, \dots, \ell+1. \quad (1.22)$$

Используя спаривание на $\mathbb{R}^{\ell+1}$, кокорни $\alpha_i^\vee$ можно отождествить с соответствующими корнями α_i . Этой системе корней/весов отвечает квантовая интегрируемая $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$ -система Тоды, для которой имеется $(\ell+1)$ попарно коммутирующих функционально независимых квантовых гамильтонианов $\mathcal{H}_k^{\mathfrak{gl}_{\ell+1}}$, $k = 1, \dots, \ell+1$. Мы интересуемся явными интегральными представлениями общих собственных функций полного набора квантовых гамильтоновых операторов для $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$. Например, линейный и квадратичный квантовые гамильтонианы $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$ -цепочки Тоды задаются формулами

$$\mathcal{H}_1^{\mathfrak{gl}_{\ell+1}} = -i \sum_{i=1}^{\ell+1} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (1.23)$$

$$\mathcal{H}_2^{\mathfrak{gl}_{\ell+1}} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\ell+1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^{\ell} e^{x_{i+1}-x_i}, \quad (1.24)$$

и собственная функция должна удовлетворять следующим уравнениям:

$$\mathcal{H}_1^{\mathfrak{gl}_{\ell+1}}(x) \Psi_{\lambda_1, \dots, \lambda_{\ell+1}}^{\mathfrak{gl}_{\ell+1}}(x_1, \dots, x_{\ell+1}) = \sum_{i=1}^{\ell+1} \lambda_i \Psi_{\lambda_1, \dots, \lambda_{\ell+1}}^{\mathfrak{gl}_{\ell+1}}(x_1, \dots, x_{\ell+1}), \quad (1.25)$$

$$\mathcal{H}_2^{\mathfrak{gl}_{\ell+1}}(x) \Psi_{\lambda_1, \dots, \lambda_{\ell+1}}^{\mathfrak{gl}_{\ell+1}}(x_1, \dots, x_{\ell+1}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\ell+1} \lambda_i^2 \Psi_{\lambda_1, \dots, \lambda_{\ell+1}}^{\mathfrak{gl}_{\ell+1}}(x_1, \dots, x_{\ell+1}). \quad (1.26)$$

Общая собственная функция квантовых гамильтонианов допускает следующее представление в виде матричного элемента:

$$\Psi_{\lambda}^{\mathfrak{gl}_{\ell+1}}(x) = e^{\sum x_i \rho_i} \langle \psi_L, \pi_{\mu}(e^{\sum x_i E_{i,i}}) \psi_R \rangle, \quad (1.27)$$

где $\rho_i = -(\ell - 2i + 2)/2$, $i = 1, \dots, \ell + 1$, — компоненты ρ в базисе $\{\epsilon_i, i = 1, \dots, \ell + 1\}$ пространства $\mathbb{R}^{\ell+1}$.

Конструкция для полупростой алгебры Ли $\mathfrak{sl}_{\ell+1}$ вполне аналогична случаю редуктивной алгебры Ли $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$. Корни и фундаментальные веса алгебры $\mathfrak{sl}_{\ell+1}$ можно записать в следующем виде (см., например, [30]):

$$\alpha_i = \epsilon_{i+1} - \epsilon_i, \quad \omega_i = -(\epsilon_1 + \dots + \epsilon_i) + \frac{i}{\ell+1}(\epsilon_1 + \dots + \epsilon_{\ell+1}), \quad (1.28)$$

где $i = 1, \dots, \ell$. Это представление системы корней/весов A_{ℓ} можно получить из системы корней/весов алгебры Ли $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$ следующим образом. Выберем двойственный базис из фундаментальных весов для $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$:

$$\omega'_i = -\epsilon_1 - \dots - \epsilon_i,$$

где $\langle \omega'_i, \alpha_j^{\vee} \rangle = \delta_{i,j}$ при $i, j = 1, \dots, \ell$ и $\langle \omega'_{\ell+1}, \alpha_j^{\vee} \rangle = 0$ при $j = 1, \dots, \ell$. Тогда $\omega'_{\ell+1}$ можно рассматривать как образующий элемент X_0 . Полагая

$$\omega_i = \omega'_i - \frac{i}{\ell+1} \omega'_{\ell+1},$$

несложно получить множество (1.28) фундаментальных весов для $\mathfrak{sl}_{\ell+1}$.

Свяжем с этими корневыми данными квантовую интегрируемую $\mathfrak{sl}_{\ell+1}$ -систему Тоды, которая обладает ℓ попарно коммутирующими функционально независимыми гамильтонианами $\mathcal{H}_k^{\mathfrak{sl}_{\ell+1}}$, $k = 1, \dots, \ell$. Здесь удобнее рассматривать гамильтонианы $\mathfrak{sl}_{\ell+1}$ -цепочки Тоды как подмножество $\mathcal{H}_k^{\mathfrak{gl}_{\ell+1}}$, $k = 2, \dots, \ell + 1$, в множестве гамильтонианов $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$ -цепочки, действующих на ядре линейного гамильтониана $\mathcal{H}_1^{\mathfrak{gl}_{\ell+1}}$. Например, собственная функция квадратичного квантового гамильтониана $\mathfrak{sl}_{\ell+1}$ -цепочки Тоды должна удовлетворять уравнению

$$\begin{aligned} & \mathcal{H}_2^{\mathfrak{sl}_{\ell+1}} \Psi_{\lambda_1, \dots, \lambda_{\ell+1}}^{\mathfrak{sl}_{\ell+1}}(x_1, \dots, x_{\ell+1}) \\ &= \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\ell+1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^{\ell} e^{x_{i+1}-x_i} \right\} \Psi_{\lambda_1, \dots, \lambda_{\ell+1}}^{\mathfrak{sl}_{\ell+1}}(x_1, \dots, x_{\ell+1}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\ell+1} \lambda_i^2 \Psi_{\lambda_1, \dots, \lambda_{\ell+1}}^{\mathfrak{sl}_{\ell+1}}(x_1, \dots, x_{\ell+1}) \end{aligned} \quad (1.29)$$

с дополнительным ограничением $\lambda_1 + \dots + \lambda_{\ell+1} = 0$. Собственные функции $\mathfrak{sl}_{\ell+1}$ -цепочки Тоды также можно записать, используя следующий набор переменных:

$$\Psi_{\nu_1, \dots, \nu_\ell}^{\mathfrak{sl}_{\ell+1}}(y_1, \dots, y_\ell) \equiv \Psi_{\lambda_1, \dots, \lambda_{\ell+1}}^{\mathfrak{sl}_{\ell+1}}(x_1, \dots, x_{\ell+1}), \quad \nu_i = \lambda_{i+1} - \lambda_i, \quad y_i = x_{i+1} - x_i. \quad (1.30)$$

Заметим, что если не налагать ограничение $\lambda_1 + \dots + \lambda_{\ell+1} = 0$, то собственные функции $\mathfrak{sl}_{\ell+1}$ -цепочки Тоды можно выразить через собственные функции $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$ -цепочки Тоды следующим образом:

$$\Psi_{\nu_1, \dots, \nu_\ell}^{\mathfrak{sl}_{\ell+1}}(y_1, \dots, y_\ell) = \exp \left\{ -\frac{i}{\ell+1} \sum_{i=1}^{\ell+1} \lambda_i \cdot \sum_{i=1}^{\ell+1} x_i \right\} \Psi_{\lambda_1, \dots, \lambda_{\ell+1}}^{\mathfrak{gl}_{\ell+1}}(x_1, \dots, x_{\ell+1}). \quad (1.31)$$

Здесь использованы обозначения из (1.30). Далее мы рассматриваем в основном собственные функции $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$ -цепочки Тоды, ограничиваясь комментариями относительно случая $\mathfrak{sl}_{\ell+1}$, и преимущественно используем неприведенную форму $\Psi_{\lambda}^{\mathfrak{gl}_{\ell+1}}(x)$.

1.2.1. $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$ -функция Уиттекера: факторизационная параметризация. Для того чтобы сделать интегральное представление (1.19) для $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$ -функции Уиттекера явным, нам нужно выбрать специальную параметризацию $N_+^{(0)} \subset \mathrm{GL}(\ell+1)$. Пусть w_0 – элемент максимальной длины в группе Вейля $S_{\ell+1}$ алгебры Ли $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$. Рассмотрим приведенное разложение элемента w_0 , отвечающее приведенному слову I_ℓ :

$$I_\ell = (i_1, i_2, i_3, \dots, i_{m_\ell}) := (1, 21, 321, \dots, (\ell \dots 21)), \quad m_\ell = \frac{\ell(\ell+1)}{2}.$$

Заметим, что приведенное слово I_ℓ имеет очевидную рекурсивную структуру: $I_\ell = I_{\ell-1} \sqcup (\ell \dots 21)$. Тем самым, соответствующая параметризация унитарных элементов $v^{(\ell)}$ на открытом подмножестве $N_+^{(0)}$ подгруппы N_+ может быть записана рекурсивно:

$$v^{(\ell)} = v^{(\ell-1)} \mathfrak{X}_{\ell-1}^\ell, \quad (1.32)$$

где

$$\mathfrak{X}_{\ell-1}^\ell = X_\ell(y_{\ell,1}) \cdots X_2(y_{2,\ell-1}) X_1(y_{1,\ell}) \quad (1.33)$$

и $X_i(y) = \exp(yf_i)$. Параметры $y_{i,k}$ однопараметрических подгрупп будем называть параметрами факторизации. Рассмотренное в п. 1.1.2 действие алгебры Ли $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$ на G/B_- определяет действие алгебры Ли на пространстве функций V_μ , ограниченном на $N_+^{(0)}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. Следующие дифференциальные операторы реализуют представление π_μ алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}_{\ell+1})$ в пространстве V_μ в терминах факторизационной параметризации (1.32), (1.33):

$$E_{i,i+1} = \frac{\partial}{\partial y_{i,\ell+1-i}} + \sum_{k=1}^i \sum_{s=0}^{k-1} \frac{y_{i-1-s,\ell+2-i}}{y_{i-s,\ell+1-i}} \left\{ \frac{\partial}{\partial y_{i-1-k,\ell+1-i}} - \frac{\partial}{\partial y_{i-1-k,\ell+2-i}} \right\},$$

$$E_{i,i} = \mu_i - \sum_{k=1}^{\ell+1-i} y_{i,k} \frac{\partial}{\partial y_{i,k}} + \sum_{k=1}^{\ell+2-i} y_{i-1,k} \frac{\partial}{\partial y_{i-1,k}}, \quad (1.34)$$

$$E_{i+1,i} = \sum_{n=1}^{\ell+1-i} y_{i,n} \left\{ \mu_i - \mu_{i+1} - y_{i,n} \frac{\partial}{\partial y_{i,n}} - \sum_{j=1}^{\ell} a_{ij} \sum_{k=1}^{n-1+\delta_{i,j+1}} y_{j,k} \frac{\partial}{\partial y_{j,k}} \right\},$$

где $E_{i,j} = \pi_{\mu}(e_{i,j})$, $\mu_k = i\lambda_k - \rho_k$ и $\rho_k = -(\ell - 2k + 2)/2$ при $k = 1, \dots, \ell + 1$.

Доказательство приведено в п. 2.4.1 части 2.

Вычисление матричных элементов, входящих в интеграл (1.19), в факторизационной параметризации (1.32), (1.33) можно провести следуя [16] и [15] (подробности даны в разделе 2.3). Другой, более прямой подход, состоит в нахождении левого и правого векторов Уиттекера посредством решения уравнений (1.7), (1.8). Всюду далее мы считаем, что $\sum_{i=k}^j = 0$ при $k > j$ и $\prod_{i=k}^j = 1$ при $k > j$.

Напомним, что в соответствии с (1.7), (1.8) векторы Уиттекера являются решениями уравнений

$$E_{i,i+1}\psi_R = -\psi_R, \quad E_{i+1,i}\psi_L = -\psi_L, \quad i = 1, \dots, \ell.$$

ЛЕММА 1.3. *Имеют место следующие выражения для левого/правого векторов Уиттекера в терминах параметров факторизации:*

$$\psi_R(y) = \exp \left\{ - \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{n=1}^{\ell+1-i} y_{i,n} \right\}, \quad (1.35)$$

$$\begin{aligned} \psi_L(y) = & \prod_{i=1}^{\ell} \left(\prod_{k=i}^{\ell} \prod_{n=1}^i y_{k+1-k,n} \right)^{\mu_{i+1} - \mu_i} \\ & \times \exp \left\{ - \sum_{k=1}^{\ell} \frac{1}{y_{\ell+1-k,k}} \left(1 + \sum_{n=1}^{\ell-k} \prod_{i=1}^n \frac{y_{\ell+1-k-i,k+1}}{y_{\ell+1-k-i,k}} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (1.36)$$

С учетом (1.21) мы получаем следующее выражение $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$ -функции Уиттекера в факторизационной параметризации.

ТЕОРЕМА 1.1. *Собственные функции $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$ -цепочки Тоды (1.27) допускают интегральное представление:*

$$\begin{aligned} \Psi_{\lambda_1, \dots, \lambda_{\ell+1}}^{\mathfrak{gl}_{\ell+1}}(x_1, \dots, x_{\ell+1}) \\ = e^{i \sum_{k=1}^{\ell+1} \lambda_k x_k} \int_C \bigwedge_{i=1}^{\ell} \bigwedge_{n=1}^{\ell+1-i} \frac{dy_{i,n}}{y_{i,n}} \prod_{i=1}^{\ell} \left(\prod_{k=i}^{\ell} \prod_{n=1}^i y_{k+1-k,n} \right)^{i(\lambda_{i+1} - \lambda_i)} \\ \times \exp \left\{ - \sum_{k=1}^{\ell} \frac{1}{y_{\ell+1-k,k}} \left(1 + \sum_{n=1}^{\ell-k} \prod_{i=1}^n \frac{y_{\ell+1-k-i,k+1}}{y_{\ell+1-k-i,k}} \right) \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^{\ell} e^{x_{i+1} - x_i} \sum_{n=1}^{\ell+1-i} y_{i,n} \right\}. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Здесь $C \subset N_+$ – некомпактное подмногообразие половинной размерности, для которого подынтегральные функции экспоненциально убывают на границе и на бесконечности. В частности, в качестве C можно взять малую деформацию подмножества $\mathbb{R}_+^{\ell(\ell+1)/2}$ в $\mathbb{C}^{\ell(\ell+1)/2}$, для которой интеграл (1.37) сходится.

Доказательство дано в п. 2.3.1 части 2.

1.2.2. $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$ -функция Уиттекера: модифицированная факторизационная параметризация. Рассмотрим модификацию факторизационной параметризации (1.32), (1.33), которая приводит к интегральному представлению Гивенталья $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$ -функции Уиттекера. Эта модифицированная параметризация впервые возникла в работе [6]. Следует подчеркнуть, что между факторизационной и модифицированной факторизационной параметризациями имеется принципиальное отличие. А именно, параметризация (1.32), (1.33) определяется в терминах элементов подгруппы N_+ . В свою очередь, для того чтобы определить модифицированную факторизационную параметризацию на $N_+^{(0)}$, мы рассматриваем образ элемента группы в точном конечномерном представлении данной группы. В случае алгебр $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$ и $\mathfrak{sl}_{\ell+1}$ мы используем тавтологическое представление $\pi: \mathfrak{gl}_{\ell+1} \rightarrow \text{End}(\mathbb{C}^{\ell+1})$. Пусть $\epsilon_{i,j}$ – множество элементарных $(\ell+1) \times (\ell+1)$ -матриц с единицей на месте (i,j) и с нулями на остальных местах. Рассмотрим диагональные матрицы

$$U_k = \sum_{i=1}^k e^{-x_{k,i}} \epsilon_{i,i} + \sum_{i=k+1}^{\ell+1} \epsilon_{i,i} \quad (1.38)$$

и их верхнетреугольные деформации:

$$\tilde{U}_k = \sum_{i=1}^k e^{-x_{k,i}} \epsilon_{i,i} + \sum_{i=k+1}^{\ell+1} \epsilon_{i,i} + \sum_{i=1}^{k-1} e^{-x_{k-1,i}} \epsilon_{i,i+1}. \quad (1.39)$$

Модифицированная факторизационная параметризация на N_+ определяется следующим образом.

ТЕОРЕМА 1.2. (i) Образ типичного унитарного элемента $v \in N_+$ в тавтологическом представлении $\pi: \mathfrak{gl}_{\ell+1} \rightarrow \text{End}(\mathbb{C}^{\ell+1})$ можно представить в виде

$$\pi(v) = \tilde{U}_2 U_2^{-1} \tilde{U}_3 U_3^{-1} \dots \tilde{U}_\ell U_\ell^{-1} \tilde{U}_{\ell+1}, \quad (1.40)$$

где предполагается, что $x_{\ell+1,i} = 0$, $i = 1, \dots, \ell+1$.

(ii) Формула (1.40) определяет параметризацию множества полностью неотрицательных унитарных элементов $N_+^{(0)} \subset N_+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v(y)$ – элементы из N_+ , параметризованные в соответствии с (1.32), (1.33). Произведем следующую замену переменных:

$$y_{i,n} = e^{x_{n+i,i+1} - x_{n+i-1,i}}, \quad 1 \leq n \leq i \leq \ell, \quad (1.41)$$

где $x_{\ell+1,n} = 0$, $n = 1, \dots, \ell+1$. Несложно проверить, что после такой замены образ $\pi(v)$ элемента v , заданного в (1.32), (1.33), преобразуется в (1.40). Учитывая, что замена переменных (1.41) обратима, мы получаем параметризацию на подмножестве $N_+^{(0)} \subset N_+$. Теорема 1.2 доказана.

Применяя замену переменных (1.41) к выражениям из предложения 1.2, мы получаем искомую реализацию в модифицированной факторизационной параметризации.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. *Следующие дифференциальные операторы определяют реализацию представления π_μ алгебры $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$ в пространстве V_μ в терминах модифицированной факторизационной параметризации (1.38)–(1.40) на группе N_+ :*

$$\begin{aligned} E_{i,i} &= \mu_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial}{\partial x_{\ell+1+k-i,k}} + \sum_{k=i}^{\ell} \frac{\partial}{\partial x_{k,i}}, \\ E_{i,i+1} &= - \sum_{n=1}^i e^{x_{\ell-i+n,n} - x_{\ell+1-i+n,n}} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\partial}{\partial x_{\ell-i+k,k}} - \frac{\partial}{\partial x_{\ell-i+k,k-1}} \right\}, \\ E_{i+1,i} &= \sum_{n=1}^{\ell+1-i} e^{x_{n+i,i+1} - x_{k+i-1,i}} \left[\mu_i - \mu_{i+1} + \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\partial}{\partial x_{i+k-1,i}} - \frac{\partial}{\partial x_{i+k-1,i+1}} \right\} \right], \end{aligned} \quad (1.42)$$

где $E_{i,j} = \pi_\mu(e_{i,j})$ и $x_{\ell+1,i} = 0$ при $i = 1, \dots, \ell + 1$.

Реализация дифференциальными операторами представления основной серии алгебры $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$ основывается на специальной параметризации максимальной унитарной подгруппы N_+ , входящей в разложение Гаусса группы $GL(\ell + 1)$. Она возникла благодаря интегральной формуле Гивенталья. В работе [6] мы предложили использовать для этой реализации представления основной серии термин “представление Гаусса–Гивенталья”. Используя замену переменных (1.41) в выражениях из леммы 1.3, мы получаем векторы Уиттекера в модифицированной факторизационной параметризации.

ЛЕММА 1.4. *Имеют место следующие выражения для левого и правого векторов Уиттекера:*

$$\begin{aligned} \psi_R(x) &= \exp \left\{ - \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{n=1}^{\ell+1-i} e^{x_{n+i,i+1} - x_{n+i-1,i}} \right\}, \\ \psi_L(x) &= \exp \left\{ \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{i=1}^k (\mu_k - \mu_{k+1}) x_{k,i} \right\} \exp \left\{ - \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{k=1}^{\ell+1-i} e^{x_{k+i-1,k} - x_{k+i,k}} \right\}, \end{aligned} \quad (1.43)$$

где $x_{\ell+1,i} = 0$, $i = 1, \dots, \ell + 1$.

Теперь мы готовы предъявить интегральное представление для спаривания (1.27) с использованием модифицированной факторизационной параметризации. Переходя от (1.27) к (1.19), а затем к (1.37), мы действуем элементом подгруппы Картана $e^{\sum x_i E_{i,i}}$ на (1.27) справа. Другой выбор действия (например, левого действия) приводит к преобразованию подынтегрального выражения добавлением к нему полного дифференциала от некоторой функции. Выбор диагонального элемента в (1.19), (1.37) не является наиболее симметричным. Одно из специальных свойств представления Гаусса–Гивенталья состоит

в том, что с точностью до простого экспоненциального множителя в $\psi_L(x)$ левый и правый векторы Уиттекера (1.43) очень похожи (это не так в случае факторизационной параметризации (1.17), (1.18)). Нам бы хотелось сохранить эту симметрию в подынтегральном выражении интегрального представления. Представим элемент подгруппы Картана H в виде

$$e^H = e^{H_L} e^{H_R},$$

где

$$e^H = e^{\sum x_i E_{i,i}} = \exp \left\{ \sum_{i=1}^{\ell} x_{\ell+1,i} \left(\mu_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial}{\partial x_{\ell+1+k-i,k}} + \sum_{k=i}^{\ell} \frac{\partial}{\partial x_{k,i}} \right) \right\}, \quad (1.44)$$

$$e^{H_L} = \exp \left\{ \sum_{i=1}^{\ell+1} x_{\ell+1,i} \sum_{k=i}^{\ell} \frac{\partial}{\partial x_{k,i}} \right\}, \quad (1.45)$$

$$e^{H_R} = \exp \left\{ \sum_{i=1}^{\ell+1} x_{\ell+1,i} \mu_i - \sum_{i=1}^{\ell+1} x_{\ell+1,i} \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial}{\partial x_{\ell+1+k-i,k}} \right\}. \quad (1.46)$$

При вычислении матричного элемента мы будем выбирать дифференциальный оператор H_L , действующий на левом векторе, и оператор H_R , действующий на правом векторе Уиттекера в (1.27). Так мы получим следующую интегральную формулу для собственных функций $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$ -цепочки Тоды.

ТЕОРЕМА 1.3. *Собственные функции $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$ -цепочки Тоды (1.27) допускают следующее интегральное представление:*

$$\Psi_{\lambda_1, \dots, \lambda_{\ell+1}}^{\mathfrak{gl}_{\ell+1}}(x_1, \dots, x_{\ell+1}) = \int_C \prod_{k=1}^{\ell} d\underline{x}_k e^{\mathcal{F}^{\mathfrak{gl}_{\ell+1}}(x)}, \quad (1.47)$$

где $\underline{x}_k = (x_{k,1}, \dots, x_{k,k})$, $k = 1, \dots, \ell$, а функция $\mathcal{F}^{\mathfrak{gl}_{\ell+1}}(x)$ задана как

$$\mathcal{F}^{\mathfrak{gl}_{\ell+1}}(x) = i \sum_{n=1}^{\ell+1} \lambda_n \left(\sum_{i=1}^n x_{n,i} - \sum_{i=1}^{n-1} x_{n-1,i} \right) - \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{i=1}^k (e^{x_{k,i} - x_{k+1,i}} + e^{x_{k+1,i+1} - x_{k,i}}). \quad (1.48)$$

Здесь $x_i = x_{\ell+1,i}$, $i = 1, \dots, \ell+1$, а $C \subset N_+$ – некомпактное подмногообразие половинной размерности, для которого подынтегральные функции экспоненциально убывают на границе и на бесконечности. Например, C можно получить малой деформацией подпространства $\mathbb{R}^{(\ell+1)\ell/2} \subset \mathbb{C}^{(\ell+1)\ell/2}$, обеспечивающей сходимость интеграла (1.47).

Отметим, что указанное выше интегральное представление (1.47), (1.48) можно получить непосредственно из (1.37), подставляя

$$y_{i,n} = e^{x_{\ell+1,i} - x_{\ell+1,i+1}} e^{x_{n+i,i+1} - x_{n+i-1,i}}, \quad i = 1, \dots, \ell, \quad n = 1, \dots, \ell+1-i. \quad (1.49)$$

СЛЕДСТВИЕ 1.1. *$\mathfrak{sl}_{\ell+1}$ -функция Уиттекера допускает следующее интегральное представление:*

$$\begin{aligned} & \Psi_{\lambda_2 - \lambda_1, \dots, \lambda_{\ell+1} - \lambda_{\ell}}^{\mathfrak{sl}_{\ell+1}}(x_2 - x_1, \dots, x_{\ell+1} - x_{\ell}) \\ &= \exp \left\{ \frac{i}{\ell+1} \sum_{i=1}^{\ell+1} x_i \left(\ell \lambda_i - \sum_{j \neq i} \lambda_j \right) \right\} \int_C \prod_{k=1}^{\ell} d\underline{x}_k e^{\mathcal{F}^{\mathfrak{gl}_{\ell+1}}(x)}, \end{aligned}$$

зде

$$\mathcal{F}^{\mathfrak{sl}_{\ell+1}}(x) = \imath \sum_{k=1}^{\ell} (\lambda_{k+1} - \lambda_k) \sum_{i=1}^k (x_{\ell+1,k} - x_{k,i}) - \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{i=1}^k (e^{x_{k,i} - x_{k+1,i}} + e^{x_{k+1,i+1} - x_{k,i}})$$

$$u \ x_k = x_{\ell+1,k}, \ k = 1, \dots, \ell + 1.$$

ПРИМЕР 1.1. Пусть $x_1 = x_{2,1}$, $x_2 = x_{2,2}$. В случае $\ell = 1$ представление (1.47), (1.48) превращается в

$$\Psi_{\lambda_1, \lambda_2}^{\mathfrak{sl}_2}(x_1, x_2) = \int_{\mathbb{R}} dx_{1,1} \exp\{\imath \lambda_2(x_1 + x_2 - x_{1,1}) + \imath \lambda_1 x_{1,1} - e^{x_{1,1} - x_1} - e^{x_2 - x_{1,1}}\}.$$

Здесь $\mathfrak{sl}_2$ -функция Уиттекера (1.50) совпадает с так называемой модифицированной функцией Бесселя 2-го рода [9]:

$$\begin{aligned} \Psi_{\lambda_2 - \lambda_1}^{\mathfrak{sl}_2}(x_2 - x_1) &= e^{\frac{\imath}{2}(\lambda_2 - \lambda_1)(x_1 + x_2)} \int_{\mathbb{R}} dx_{1,1} e^{\imath(\lambda_1 - \lambda_2)x_{1,1} - e^{x_{1,1} - x_1} - e^{x_2 - x_{1,1}}} \\ &= \int_{\mathbb{R}} dx_{1,1} \exp\left\{\imath(\lambda_1 - \lambda_2)x_{1,1} - e^{\frac{x_2 - x_1}{2}}(e^{x_{1,1}} + e^{-x_{1,1}})\right\} \\ &= K_{\imath(\lambda_1 - \lambda_2)}(2e^{\frac{x_2 - x_1}{2}}). \end{aligned} \quad (1.50)$$

Интегральное представление (1.47), (1.48) для собственных функций $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$ -цепочки Тоды было впервые получено Гивенталем в его работе о квантовых ко-гомологиях $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$ -многообразия флагов [1] (см. также [2]). Теоретико-представленческий вывод интегральной формулы Гивенталья в виде матричного элемента (1.27) впервые появился в работе [6].

Согласно Гивенталю, функция $\mathcal{F}^{\mathfrak{gl}_{\ell+1}}(x)$ при $\lambda_k = 0$, $k = 1, \dots, \ell + 1$, допускает простое описание в терминах следующей диаграммы:

$$\begin{array}{ccccccc} & & x_{\ell+1,1} & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ & & x_{\ell,1} & \longrightarrow & x_{\ell+1,2} & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \vdots & & \ddots & & \ddots \\ & & \downarrow & & & & \\ & & x_{2,1} & \longrightarrow & \ddots & \longrightarrow & x_{\ell+1,\ell} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ x_{1,1} & \longrightarrow & x_{2,2} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & x_{\ell,\ell} \longrightarrow x_{\ell+1,\ell+1} \end{array} \quad (1.51)$$

Мы связываем переменные $x_{k,i}$ с вершинами (k, i) и функции e^{y-x} со стрелками $(x \longrightarrow y)$ диаграммы (1.51). Тогда потенциал $\mathcal{F}^{\mathfrak{gl}_{\ell+1}}(x)$ из (1.48) на нулевом уровне спектра $\lambda_i = 0$ задается суммой функций, отвечающих всем стрелкам.

Как показано в теореме 1.2, переменные $\{x_{k,i}, 1 \leq i \leq k \leq \ell\}$ определяют параметризацию открытого подмножества $N_+^{(0)}$ многообразия флагов $X = \mathrm{SL}(\ell+1, \mathbb{C})/B$. Некомпактное многообразие $N_+^{(0)}$ обладает естественным действием тора T^{m_ℓ} и допускает компактификацию, которая является горенштейновым торическим многообразием. Множество соотношений между мономами, определяющее эту компактификацию, можно описать следующим образом. Введем новые переменные

$$a_{k,i} = e^{x_{k,i} - x_{k+1,i}}, \quad b_{k,i} = e^{x_{k+1,i+1} - x_{k,i}}, \quad 1 \leq i \leq k \leq \ell,$$

связанные со стрелками диаграммы (1.51). Тогда имеют место соотношения

$$\begin{aligned} a_{k,i} b_{k,i} &= b_{k+1,i} a_{k+1,i+1}, & 1 \leq i \leq k < \ell, \\ a_{\ell,i} b_{\ell,i} &= e^{x_{\ell+1,i+1} - x_{\ell+1,i}}, & i = 1, \dots, \ell. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Их можно интерпретировать как соотношения между различными композициями элементарных путей с совпадающими исходной и конечной вершинами. Множество соотношений между более общими путями (следующих из (1.52)) определяет торическое вложение вырождения многообразия флагов (подробности см. в [5] и [19]). Отметим, что диаграмма (1.51) совпадает с диаграммой Гельфанда–Цейтлина для алгебры Ли $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$.

1.2.3. *Связь с $\mathcal{Q}$ -оператором Бакстера $\hat{\mathfrak{gl}}_{\ell+1}$ -цепочки Тоды.* Интегральное представление (1.47), (1.48) для $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$ -функции Уиттекера имеет рекурсивную структуру относительно ранга $\ell+1$ алгебры Ли. В самом деле, это интегральное представление можно переписать в следующем виде:

$$\Psi_{\lambda_1, \dots, \lambda_{\ell+1}}^{\mathfrak{gl}_{\ell+1}}(\underline{x}_{\ell+1}) = \int_C \prod_{k=1}^{\ell} d\underline{x}_k \prod_{k=1}^{\ell+1} Q_{\mathfrak{gl}_{k-1}}^{\mathfrak{gl}_k}(\underline{x}_k, \underline{x}_{k-1}; \lambda_k), \quad (1.53)$$

где

$$\begin{aligned} Q_{\mathfrak{gl}_k}^{\mathfrak{gl}_{k+1}}(\underline{x}_{k+1}, \underline{x}_k; \lambda_{k+1}) &= \exp \left\{ i \lambda_{k+1} \left(\sum_{i=1}^{k+1} x_{k+1,i} - \sum_{i=1}^k x_{k,i} \right) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^k (e^{x_{k,i} - x_{k+1,i}} + e^{x_{k+1,i+1} - x_{k,i}}) \right\}. \end{aligned} \quad (1.54)$$

Здесь использовано обозначение $\underline{x}_k = (x_{k,1}, \dots, x_{k,k})$ и предполагается, что $Q_{\mathfrak{gl}_0}^{\mathfrak{gl}_1} = e^{i \lambda_1 x_{1,1}}$.

Выберем линейные координаты $\underline{x}_k = (x_{k,1}, \dots, x_{k,k})$ в пространстве $\mathbb{C}^k$. Пусть $\mathcal{C}_k$ – некомпактное подмногообразие половинной размерности в $\mathbb{C}^k$, для которого (1.54) как функция от $\underline{x}_k$ экспоненциально убывает на возможных

границах и на бесконечности $\mathcal{C}_k$. Рассмотрим следующий интегральный оператор:

$$(Q_{\mathfrak{gl}_k}^{\mathfrak{gl}_{k+1}} f)(\underline{x}_{k+1}) = \int_{\mathcal{C}_k} Q_{\mathfrak{gl}_k}^{\mathfrak{gl}_{k+1}}(\underline{x}_{k+1}, \underline{x}_k; \lambda_{k+1}) f(\underline{x}_k) d\underline{x}_k.$$

Он действует на функциях, которые растут не слишком быстро на возможных границах и на бесконечности в $\mathcal{C}_k$. Интегральные операторы $Q_{\mathfrak{gl}_k}^{\mathfrak{gl}_{k+1}}$ определяют рекурсивную конструкцию $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$ -функций Уиттекера:

$$\Psi_{\lambda_1, \dots, \lambda_{\ell+1}}^{\mathfrak{gl}_{\ell+1}}(\underline{x}_{\ell+1}) = \int_{\mathcal{C}_\ell} d\underline{x}_\ell Q_{\mathfrak{gl}_\ell}^{\mathfrak{gl}_{\ell+1}}(\underline{x}_{\ell+1}, \underline{x}_\ell; \lambda_{\ell+1}) \Psi_{\lambda_1, \dots, \lambda_\ell}^{\mathfrak{gl}_\ell}(\underline{x}_\ell). \quad (1.55)$$

С оператором рекурсии $Q_{\mathfrak{gl}_\ell}^{\mathfrak{gl}_{\ell+1}}$ можно связать ориентированный путь на графе (1.51):

$$\begin{array}{ccccccc} x_{\ell+1,1} & & x_{\ell+1,2} & & \dots & & x_{\ell+1,\ell+1} \\ & \searrow & \nearrow & \searrow & & \nearrow & \\ & x_{\ell,1} & & \dots & & & x_{\ell,\ell} \end{array} \quad (1.56)$$

Диаграмму (1.51) можно рассматривать как набор ориентированных путей (1.56), и тем самым рекурсивная структура интегрального представления (1.47) закодирована в диаграмме (1.51) очевидным образом.

В силу (1.55) интегральные операторы $Q_{\mathfrak{gl}_k}^{\mathfrak{gl}_{k+1}}$ с ядрами $Q_{\mathfrak{gl}_k}^{\mathfrak{gl}_{k+1}}(\underline{x}_{k+1}, \underline{x}_k; \lambda_{k+1})$ удовлетворяют сплетающим соотношениям для гамильтонианов квантовых цепочек Тоды. Например, между квадратичными гамильтонианами $\mathcal{H}_2^{\mathfrak{gl}_{k+1}}(\underline{x}_{k+1})$ и $\mathcal{H}_2^{\mathfrak{gl}_k}(\underline{x}_k)$ имеет место соотношение

$$\mathcal{H}_2^{\mathfrak{gl}_{k+1}}(\underline{x}_{k+1}) Q_{\mathfrak{gl}_k}^{\mathfrak{gl}_{k+1}}(\underline{x}_{k+1}, \underline{x}_k; \lambda_{k+1}) = Q_{\mathfrak{gl}_k}^{\mathfrak{gl}_{k+1}}(\underline{x}_{k+1}, \underline{x}_k; \lambda_{k+1}) \mathcal{H}_2^{\mathfrak{gl}_k}(\underline{x}_k) + \frac{1}{2} \lambda_{k+1}^2. \quad (1.57)$$

Мы будем предполагать, что в подобных соотношениях гамильтоновы операторы в левой части действуют справа, а гамильтоновы операторы в правой части действуют слева. Похожие коммутационные соотношения имеют место для высших квантовых гамильтоновых операторов (подробности см. в [6]).

Операторы рекурсии $Q_{\mathfrak{gl}_k}^{\mathfrak{gl}_{k+1}}$ тесно связаны с важным объектом теории квантовых интегрируемых систем, который называется $\mathcal{Q}$ -оператором. Специальный вид $\mathcal{Q}$ -оператора был введен Р. Бакстером в работе [31] для решения одного класса квантовых интегрируемых моделей. В случае (периодической) $\widehat{\mathfrak{gl}}_{\ell+1}$ -цепочки Тоды с квадратичным гамильтонианом

$$\mathcal{H}_2^{\widehat{\mathfrak{gl}}_{\ell+1}} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\ell+1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^{\ell} e^{x_{i+1}-x_i} + g e^{x_1-x_{\ell+1}}, \quad (1.58)$$

где g – произвольная константа связи, $\mathcal{Q}$ -оператор имеет следующее интегральное ядро:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}^{\widehat{\mathfrak{gl}}_{\ell+1}}(\underline{x}^{(\ell+1)}, \underline{y}^{(\ell+1)}; \lambda) = \exp \left\{ \imath \lambda \sum_{i=1}^{\ell+1} (x_i - y_i) \right. \\ \left. - \left(\sum_{i=1}^{\ell} (e^{y_i - x_i} + e^{x_{i+1} - y_i}) + e^{y_{\ell+1} - x_{\ell+1}} + g e^{x_1 - y_{\ell+1}} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (1.59)$$

Здесь мы используем обозначения $\underline{x}^{(\ell+1)} = (x_1, \dots, x_{\ell+1})$ и $\underline{y}^{(\ell+1)} = (y_1, \dots, y_{\ell+1})$. Этот $\mathcal{Q}$ -оператор был впервые построен в работе [10]. Он коммутирует со всеми гамильтонианами $\widehat{\mathfrak{gl}}_{\ell+1}$ -цепочки Тоды и порождает квантовые преобразования Бэклунда [10]. Например, для квадратичных гамильтонианов мы получаем:

$$\mathcal{H}_2^{\widehat{\mathfrak{gl}}_{\ell+1}}(\underline{x}^{(\ell+1)}) \mathcal{Q}^{\widehat{\mathfrak{gl}}_{\ell+1}}(\underline{x}^{(\ell+1)}, \underline{y}^{(\ell+1)}; \lambda) = \mathcal{Q}^{\widehat{\mathfrak{gl}}_{\ell+1}}(\underline{x}^{(\ell+1)}, \underline{y}^{(\ell+1)}; \lambda) \mathcal{H}_2^{\widehat{\mathfrak{gl}}_{\ell+1}}(\underline{y}^{(\ell+1)}). \quad (1.60)$$

Для установления связи между $\mathcal{Q}$ -оператором Бакстера для $\widehat{\mathfrak{gl}}_{k+1}$ -теории Тоды и оператором рекурсии для $\mathfrak{gl}_{k+1}$ -теории Тоды полезно ввести несколько модифицированный оператор рекурсии $Q_{\mathfrak{gl}_k \oplus \mathfrak{gl}_1}^{\mathfrak{gl}_{k+1}}$ с ядром:

$$\begin{aligned} Q_{\mathfrak{gl}_k \oplus \mathfrak{gl}_1}^{\mathfrak{gl}_{k+1}}(\underline{x}^{(k+1)}, \underline{y}^{(k+1)}; \lambda) = e^{-\imath \lambda y_{k+1}} Q_{\mathfrak{gl}_k}^{\mathfrak{gl}_{k+1}}(\underline{x}^{(k+1)}, \underline{y}^{(k)}; \lambda) \\ = \exp \left\{ \imath \lambda \left(\sum_{i=1}^{k+1} x_i - \sum_{i=1}^{k+1} y_i \right) - \sum_{i=1}^k (e^{y_i - x_i} + e^{x_{i+1} - y_i}) \right\}, \end{aligned} \quad (1.61)$$

где $\underline{x}^{(k+1)} = (x_1, \dots, x_{k+1})$, $\underline{y}^{(k)} = (y_1, \dots, y_k)$ и $\underline{y}^{(k+1)} = (y_1, \dots, y_k, y_{k+1})$.

Этот модифицированный оператор сплетает гамильтоновы операторы $\mathfrak{gl}_{k+1}$ - и $\mathfrak{gl}_k \oplus \mathfrak{gl}_1$ -цепочек Тоды (новая переменная y_{k+1} входит только в описание $\mathfrak{gl}_1$ -цепочки Тоды). Тем самым, для квадратичных гамильтоновых операторов имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_2^{\mathfrak{gl}_{k+1}}(\underline{x}^{(k+1)}) Q_{\mathfrak{gl}_k \oplus \mathfrak{gl}_1}^{\mathfrak{gl}_{k+1}}(\underline{x}^{(k+1)}, \underline{y}^{(k+1)}; \lambda) \\ = Q_{\mathfrak{gl}_k \oplus \mathfrak{gl}_1}^{\mathfrak{gl}_{k+1}}(\underline{x}^{(k+1)}, \underline{y}^{(k+1)}; \lambda) (\mathcal{H}_2^{\mathfrak{gl}_k}(\underline{y}^{(k)}) + \mathcal{H}_2^{\mathfrak{gl}_1}(y_{k+1})), \end{aligned}$$

где $\mathcal{H}_2^{\mathfrak{gl}_1}(y_{k+1}) = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y_{k+1}^2}$. Ясно, что проекция этого соотношения на подпространство функций $F(\underline{y}^{(k)}, y_{k+1}) = e^{-\imath \lambda y_{k+1}} f(\underline{y}^{(k)})$ приводит к (1.57).

Рассмотрим однопараметрическое семейство интегральных операторов

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}^{\widehat{\mathfrak{gl}}_{\ell+1}}(\underline{x}^{(k+1)}, \underline{y}^{(k+1)}; \lambda; \varepsilon) = \varepsilon^{-\imath \lambda} \exp \left\{ \imath \lambda \sum_{i=1}^{\ell+1} (x_i - y_i) \right. \\ \left. - \left(\sum_{i=1}^{\ell} (e^{y_i - x_i} + e^{x_{i+1} - y_i}) + \varepsilon e^{y_{\ell+1} - x_{\ell+1}} + \varepsilon^{-1} g e^{x_1 - y_{\ell+1}} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (1.62)$$

полученных из (1.59) сдвигом переменной $y_{\ell+1} \rightarrow y_{\ell+1} + \ln \varepsilon$. Предельное поведение операторов (1.60) при $\varepsilon \rightarrow 0$, $g \varepsilon^{-1} \rightarrow 0$ можно описать следующим

образом:

$$Q_{\mathfrak{gl}_{k+1}^I \oplus \mathfrak{gl}_1^I}(\underline{x}^{(k+1)}, \underline{y}^{(k+1)}; \lambda) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0, \\ g\varepsilon^{-1} \rightarrow 0}} \varepsilon^{\lambda} \mathcal{Q}^{\widehat{\mathfrak{gl}_{k+1}^I}}(\underline{x}^{(k+1)}, \underline{y}^{(k+1)}; \lambda; \varepsilon). \quad (1.63)$$

Это устанавливает взаимосвязь между $\mathcal{Q}$ -оператором Бакстера и (модифицированным) оператором рекурсии.

1.3. Интегральные представления собственных функций $\mathfrak{so}_{2\ell+1}$ -цепочки Тоды. В этом разделе мы получим обобщение интегрального представления Гивенталья для $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$ -функций Уиттекера на случай алгебры Ли $\mathfrak{so}_{2\ell+1}$. Мы начнем с задания интегрального представления $\mathfrak{so}_{2\ell+1}$ -функций Уиттекера, использующего факторизационное представление. Затем будет рассмотрена модификация факторизационного представления, которая приводит к интегральному представлению типа Гивенталья.

Рассмотрим систему корней типа B_ℓ , отвечающую алгебре Ли $\mathfrak{so}_{2\ell+1}$. Пусть $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_\ell\}$ – ортонормированный базис в пространстве $\mathbb{R}^\ell$. Реализуем корни, кокорни и фундаментальные веса, связанные с системой B_ℓ , как векторы в $\mathbb{R}^\ell$:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \epsilon_1, & \alpha_1^\vee &= 2\epsilon_1, & \omega_1 &= \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \dots + \epsilon_\ell), \\ \alpha_2 &= \epsilon_2 - \epsilon_1, & \alpha_2^\vee &= \epsilon_2 - \epsilon_1, & \omega_2 &= \epsilon_2 + \dots + \epsilon_\ell, \\ \dots & & \dots & & \dots & \\ \alpha_\ell &= \epsilon_\ell - \epsilon_{\ell-1}, & \alpha_\ell^\vee &= \epsilon_\ell - \epsilon_{\ell-1}, & \omega_\ell &= \epsilon_\ell. \end{aligned} \quad (1.64)$$

Матрица Картана в этом случае имеет вид $a_{ij} = \langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle$. Для положительных рациональных чисел $d_1 = 1/2, d_2 = 1, \dots, d_\ell = 1$ матрица $\|b_{ij}\| = \|d_i a_{ij}\|$ симметрична. С этими данными связана квантовая цепочка Тоды с квадратичным гамильтонианом

$$\mathcal{H}_2^{B_\ell} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\ell} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{1}{2} e^{x_1} + \sum_{i=1}^{\ell-1} e^{x_{i+1} - x_i}. \quad (1.65)$$

Можно дополнить (1.65) до полного набора из ℓ попарно коммутирующих функционально независимых гамильтонианов $\mathcal{H}_k^{B_\ell}$, $k = 1, \dots, \ell$, для $\mathfrak{so}_{2\ell+1}$ -цепочки Тоды. Мы ищем интегральное представление общей собственной функции для $\mathcal{H}_k^{B_\ell}$. Задача о собственной функции квадратичного гамильтониана может быть записана в следующем виде:

$$\mathcal{H}_2^{B_\ell} \Psi_{\lambda_1, \dots, \lambda_\ell}^{B_\ell}(x_1, \dots, x_\ell) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i^2 \Psi_{\lambda_1, \dots, \lambda_\ell}^{B_\ell}(x_1, \dots, x_\ell). \quad (1.66)$$

1.3.1. $\mathfrak{so}_{2\ell+1}$ -функция Уиттекера: факторизационная параметризация. Приведенное слово, отвечающее элементу w_0 максимальной длины в группе Вейля типа B_ℓ , можно представить рекурсивно:

$$I_\ell = (i_1, i_2, i_3, \dots, i_{m_\ell}) := (1, 212, 32123, \dots, (\ell \dots 212 \dots \ell)), \quad m_\ell = \ell^2,$$

где индексы $i_k \in \Gamma = \{1, \dots, \ell\}$ соответствуют отражениям относительно простых корней α_{i_k} . Пусть $N_+ \subset G$ – максимальная унипотентная подгруппа в $G = \mathrm{SO}(2\ell + 1)$. Свяжем с приведенным словом I_ℓ следующую рекурсивную параметризацию типичного унипотентного элемента $v^{B_\ell} \in N_+$:

$$v^{B_\ell} = v^{B_{\ell-1}} \mathfrak{X}_{B_{\ell-1}}^{B_\ell}, \quad (1.67)$$

где

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_{B_{\ell-1}}^{B_\ell} &= X_\ell(y_{\ell,1}) \cdots X_k(y_{k,2(\ell+1-k)-1}) \cdots X_2(y_{2,2\ell-3}) \\ &\quad \times X_1(y_{1,\ell}) X_2(y_{2,2\ell-2}) \cdots X_k(y_{k,2(\ell+1-k)}) X_\ell(y_{\ell,2}). \end{aligned} \quad (1.68)$$

Здесь $X_i(y) = e^{y f_i}$ и $f_i \equiv f_{\alpha_i}$ – образующие, которые соответствуют простым корням. Подмножество $N_+^{(0)}$ элементов, допускающих такое представление, открыто в N_+ . Действие (1.10) алгебры Ли $\mathfrak{so}_{2\ell+1}$ на N_+ , которое рассматривалось п. 1.1.2, определяет действие алгебры Ли на $N_+^{(0)}$. Следующее предложение дает явное описание этого действия на пространстве V_μ , которое рассматривается как пространство эквивариантных функций на $N_+^{(0)}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4. *Следующие дифференциальные операторы определяют реализацию представления основной серии π_μ алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{so}_{2\ell+1})$ в терминах факторизационной параметризации на $N_+^{(0)}$:*

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{\partial}{\partial y_{1,\ell}} + \sum_{n=1}^{\ell-1} \left\{ \prod_{j=n}^{\ell-1} \frac{y_{2,2i}}{y_{2,2i-1}} \left(\frac{\partial}{\partial y_{1,n}} - \frac{\partial}{\partial y_{1,n+1}} \right) \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{y_{2,2(n-1)}}{y_{1,n}} \prod_{i=n+1}^{\ell-1} \frac{y_{2,2i}}{y_{2,2i-1}} \left(\frac{\partial}{\partial y_{2,2n-1}} - \frac{\partial}{\partial y_{2,2n}} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (1.69)$$

$$\begin{aligned} F_k &= \frac{\partial}{\partial y_{k,2(\ell+1-k)}} + (1 - \delta_{k,\ell}) \sum_{n=1}^{\ell-k} \left\{ \prod_{i=n}^{\ell-k} \frac{y_{k+1,2i}}{y_{k+1,2i-1}} \frac{y_{k,2(i+1)-1}}{y_{k,2(i+1)}} \left(\frac{\partial}{\partial y_{k,2n}} - \frac{\partial}{\partial y_{k,2n+1}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{y_{k+1,2n}}{y_{k,2(n+1)}} \prod_{i=n+1}^{\ell-k} \frac{y_{k+1,2i}}{y_{k+1,2i-1}} \frac{y_{k,2(i+1)-1}}{y_{k,2(i+1)}} \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{\partial}{\partial y_{k+1,2n-1}} - \frac{\partial}{\partial y_{k+1,2n}} \right) \right\}, \quad k = 2, \dots, \ell, \end{aligned}$$

$$H_k = \langle \mu, \alpha_k^\vee \rangle + \sum_{i=1}^{\ell} a_{k,i} \sum_{j=1}^{n_i} y_{i,j} \frac{\partial}{\partial y_{i,j}}, \quad 1 \leq k \leq \ell, \quad (1.70)$$

$$\begin{aligned} E_1 &= \sum_{n=1}^{\ell} y_{1,n} \left\{ -\langle \mu, \alpha_1^\vee \rangle + \sum_{j=1}^{2n-3} 2y_{2,j} \frac{\partial}{\partial y_{2,j}} - 2 \sum_{j=1}^{n-1} y_{1,j} \frac{\partial}{\partial y_{1,j}} - y_{1,n} \frac{\partial}{\partial y_{1,n}} \right\}, \\ E_2 &= \sum_{n=1}^{2(\ell-1)} y_{2,n} \left\{ -\langle \mu, \alpha_2^\vee \rangle + \sum_{j=1}^{\alpha(n)+1} y_{1,j} \frac{\partial}{\partial y_{1,j}} - 2 \sum_{j=1}^{n-1} y_{2,j} \frac{\partial}{\partial y_{2,j}} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^{2\beta(n)-3} y_{3,j} \frac{\partial}{\partial y_{3,j}} - y_{2,n} \frac{\partial}{\partial y_{2,n}} \right\}, \end{aligned} \quad (1.71)$$

$$E_k = \sum_{n=1}^{2(\ell+1-k)} y_{k,n} \left\{ -\langle \mu, \alpha_k^\vee \rangle + \sum_{j=1}^{2\alpha(n)+2} y_{k-1,j} \frac{\partial}{\partial y_{k-1,j}} - 2 \sum_{j=1}^{n-1} y_{k,j} \frac{\partial}{\partial y_{k,j}} + \sum_{j=1}^{2\beta(n)-3} y_{k+1,j} \frac{\partial}{\partial y_{k+1,j}} - y_{k,n} \frac{\partial}{\partial y_{k,n}} \right\}, \quad k = 3, \dots, \ell,$$

где $\pi_\mu(e_i) = E_i$, $\pi_\mu(f_i) = F_i$, $\pi_\mu(h_i) = H_i$, $i = 1, \dots, \ell$, $n_1 = \ell$, $n_k = 2(\ell + 1 - k)$ при $1 < k \leq \ell$, a_{ij} – элементы матрицы Картана и предполагается, что члены, содержащие $y_{i,j}$ с индексами не из множества $\{1 \leq i, j \leq \ell\}$, опущены. Также мы используем обозначения $\alpha(n) := [n/2]$, $\beta(n) := [(n+1)/2]$.

Доказательство дано в п. 2.4.2 части 2.

Левый и правый векторы Уиттекера определены посредством (1.7) и (1.8); в факторизационной параметризации они имеют следующий вид.

ЛЕММА 1.5. *Левый и правый векторы Уиттекера задаются выражениями*

$$\psi_R(y) = \exp \left\{ - \left(\sum_{n=1}^{\ell} y_{1,n} + \sum_{k=2}^{\ell} \sum_{n=1}^{n_k} y_{k,n} \right) \right\}, \quad (1.72)$$

$$\begin{aligned} \psi_L(y) = & \left(\prod_{n=1}^{\ell} y_{1,n} \prod_{i=2}^{\ell} \prod_{n=1}^{n_i/2} y_{i,2n-1} \right)^{\langle \mu, \alpha_1^\vee \rangle} \\ & \times \prod_{k=2}^{\ell} \left(\prod_{n=2}^{\ell} y_{1,n}^2 \prod_{i=k+1}^{\ell} \prod_{n=1}^{n_i/2} y_{i,2n-1}^2 \prod_{i=2}^k \prod_{n=1}^{n_i/2} y_{i,2n-1} y_{i,2n} \right)^{\langle \mu, \alpha_k^\vee \rangle} \\ & \times \exp \left\{ - \left(\sum_{n=1}^{\ell} \frac{1}{y_{1,n}} \left(1 + \frac{y_{2,2(n-1)}}{y_{2,2(n-1)-1}} \right) \prod_{i=n+1}^{\ell} \frac{y_{2,2(i-1)}}{y_{2,2(i-1)-1}} \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{k=2}^{\ell} \sum_{n=1}^{n_k/2} \frac{1}{y_{k,2n}} \left(1 + \frac{y_{k+1,2(n-1)}}{y_{k+1,2(n-1)-1}} \right) \prod_{i=n+1}^{n_k/2} \frac{y_{k+1,2(i-1)}}{y_{k+1,2(i-1)-1}} \frac{y_{k,2i-1}}{y_{k,2i}} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (1.73)$$

где $n_1 = \ell$ и $n_k = 2(\ell + 1 - k)$, $k = 2, \dots, \ell$.

Доказательство дано в п. 2.3.2 части 2.

Используя (1.12) и (1.21), мы получаем интегральное представление для $\mathfrak{so}_{2\ell+1}$ -функций Уиттекера в факторизационной параметризации.

ТЕОРЕМА 1.4. *Собственные функции (1.12) $\mathfrak{so}_{2\ell+1}$ -цепочки Тоды допускают следующее интегральное представление:*

$$\begin{aligned} \Psi_{\lambda_1, \dots, \lambda_\ell}^{B_\ell}(x_1, \dots, x_\ell) = & e^{i\lambda_1 x_1 + \dots + i\lambda_\ell x_\ell} \int_C \prod_{i=1}^{\ell} \prod_{k=1}^{n_i} \frac{dy_{i,k}}{y_{i,k}} \left(\prod_{n=1}^{\ell} y_{1,n} \prod_{i=2}^{\ell} \prod_{n=1}^{n_i/2} y_{i,2n-1} \right)^{2i\lambda_1} \\ & \times \prod_{k=2}^{\ell} \left(\prod_{n=2}^{\ell} y_{1,n}^2 \prod_{i=k+1}^{\ell} \prod_{n=1}^{n_i/2} y_{i,2n-1}^2 \prod_{i=2}^k \prod_{n=1}^{n_i/2} y_{i,2n-1} y_{i,2n} \right)^{i(\lambda_k - \lambda_{k-1})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \exp \left\{ - \left(\sum_{n=1}^{\ell} \frac{1}{y_{1,n}} \left(1 + \frac{y_{2,2(n-1)}}{y_{2,2(n-1)-1}} \right) \prod_{i=n+1}^{\ell} \frac{y_{2,2(i-1)}}{y_{2,2(i-1)-1}} \right. \right. \\
 & + \sum_{k=2}^{\ell} \sum_{n=1}^{n_k/2} \frac{1}{y_{k,2n}} \left(1 + \frac{y_{k+1,2(n-1)}}{y_{k+1,2(n-1)-1}} \right) \prod_{i=n+1}^{n_k/2} \frac{y_{k+1,2(i-1)}}{y_{k+1,2(i-1)-1}} \frac{y_{k,2i-1}}{y_{k,2i}} \\
 & \left. \left. + e^{x_1} \sum_{n=1}^{\ell} y_{1,n} + \sum_{k=2}^{\ell} e^{x_k - x_{k-1}} \sum_{n=1}^{n_k} y_{k,n} \right) \right\}, \quad (1.74)
 \end{aligned}$$

где $n_1 = \ell$, $n_k = 2(\ell + 1 - k)$, $k = 2, \dots, \ell$, и $C \subset N_+$ – некомпактное подмногообразие половинной размерности, для которого подынтегральное выражение экспоненциально убывает на границе и на бесконечности. В частности, в качестве C можно взять малую деформацию подмножества $\mathbb{R}_+^{\ell^2}$ в $\mathbb{C}^{\ell^2}$, обеспечивающую сходимость интеграла.

Доказательство приведено в п. 2.3.2 части 2.

ПРИМЕР 1.2. Пусть $\ell = 2$. В этом случае общая формула (1.74) приобретает вид

$$\begin{aligned}
 \Psi_{\lambda_1, \lambda_2}^{B_2}(x_1, x_2) &= e^{i\lambda_1 x_1 + i\lambda_2 x_2} \int_C \prod_{i,k=1}^2 \frac{dy_{i,k}}{y_{i,k}} (y_{1,1} y_{2,1} y_{1,2})^{2i\lambda_1} (y_{2,1} y_{1,2}^2 y_{2,2})^{i\lambda_2 - i\lambda_1} \\
 &\times \exp \left\{ - \left\{ \frac{1}{y_{1,2}} + \frac{y_{2,2}}{y_{2,1}} \left(\frac{1}{y_{1,1}} + \frac{1}{y_{1,2}} \right) \right\} - \frac{1}{y_{2,2}} \right. \\
 &\left. - e^{x_1} (y_{1,1} + y_{1,2}) - e^{x_2 - x_1} (y_{2,1} + y_{2,2}) \right\}, \quad (1.75)
 \end{aligned}$$

где в качестве C можно выбрать малую деформацию $\mathbb{R}_+^4$ в $\mathbb{C}^4$, обеспечивающую сходимость интеграла.

1.3.2. $\mathfrak{so}_{2\ell+1}$ -функция Уиттекера: модифицированная факторизационная параметризация. В этом пункте мы определяем модифицированную факторизационную параметризацию на открытом подмножестве $N_+^{(0)} \subset \mathrm{SO}(2\ell + 1)$. Мы используем эту параметризацию для построения интегральных представлений $\mathfrak{so}_{2\ell+1}$ -функций Уиттекера. В отличие от описанных выше интегральных представлений эти представления имеют простую рекурсивную структуру относительно ранга ℓ и могут быть описаны в сугубо комбинаторных терминах с использованием подходящих графов. Тем самым, эти представления можно рассматривать как обобщение интегрального представления Гивенталья на случай алгебры Ли $\mathfrak{so}_{2\ell+1}$.

Имеется реализация тавтологического представления $\pi: \mathfrak{so}_{2\ell+1} \rightarrow \mathrm{End}(\mathbb{C}_{2\ell+1})$, для которого образующие Шевалле, отвечающие борелевской (соответственно картановской) подалгебре $\mathfrak{so}_{2\ell+1}$, переходят в верхнетреугольные (соответственно диагональные) матрицы. Это определяет вложение $\mathfrak{so}_{2\ell+1} \subset \mathfrak{gl}_{2\ell+1}$, для которого борелевская (соответственно картановская) подалгебра отображается в борелевскую (соответственно картановскую) подалгебру (см., например, [17]).

Для того чтобы определить соответствующее вложение групп, рассмотрим инволюцию на $\mathrm{GL}(2\ell + 1)$:

$$g \longmapsto g^* := \dot{W}_0^{-1}(g^{-1})^t \dot{W}_0, \quad (1.76)$$

где a^t индуцировано стандартным транспонированием матрицы a и $\dot{W}_0$ – подъёмом элемента максимальной длины W_0 группы Вейля $S_{2\ell+1}$ алгебры $\mathfrak{gl}_{2\ell+1}$. В матричной форме это может быть записано как

$$\pi(\dot{W}_0) = SJ,$$

где $S = \mathrm{diag}(1, -1, \dots, 1, -1, 1)$ и $J = \|J_{i,j}\| = \|\delta_{i+j, 2\ell+2}\|$. Ортогональная группа $G = \mathrm{SO}(2\ell + 1)$ может быть определена как подгруппа в $\mathrm{GL}(2\ell + 1)$:

$$\mathrm{SO}(2\ell + 1) = \{g \in \mathrm{GL}(2\ell + 1) : g^* = g\}.$$

Пусть $\epsilon_{i,j}$ – элементарные $(2\ell + 1) \times (2\ell + 1)$ -матрицы с единицей на месте (i, j) и нулями на прочих местах. Рассмотрим матрицы

$$\begin{aligned} U_n = & \sum_{i=1}^{\ell-n} (\epsilon_{i,i} + \epsilon_{2\ell+2-i, 2\ell+2-i}) + \sum_{i=1}^n \epsilon_{\ell-n+i, \ell-n+i} + e^{-z_{n,1}} \epsilon_{\ell+1, \ell+1} \\ & + e^{z_{n,1}} \epsilon_{\ell+2, \ell+2} + \sum_{i=1}^{n-1} e^{-z_{n,i+1}} \epsilon_{\ell+1+i, \ell+1+i}, \end{aligned} \quad (1.77)$$

$$\tilde{U}_n = U_n + \sum_{i=1}^{n-1} (1 + \delta_{i,1}) e^{-x_{n-1,i}} \epsilon_{\ell+1+i, \ell+2+i} \quad (1.78)$$

и

$$\begin{aligned} V_n = & \sum_{i=1}^{\ell-n} (\epsilon_{i,i} + \epsilon_{2\ell+2-i, 2\ell+2-i}) + \sum_{i=1}^n e^{x_{n,i}} \epsilon_{\ell-1+i, \ell-1+i} + e^{-x_{n,1}} \epsilon_{\ell+1, \ell+1} \\ & + \sum_{i=1}^n \epsilon_{\ell+i+1, \ell+i+1}, \end{aligned} \quad (1.79)$$

$$\tilde{V}_n = V_n + 2e^{-z_{n,1}} \epsilon_{\ell, \ell+1} + \sum_{i=1}^{n-1} e^{z_{n,i+1}} \epsilon_{\ell-i, \ell+1-i} \quad (1.80)$$

при $n = 2, \dots, \ell$,

$$Z_k = \sum_{i=1}^{\ell-1} (\epsilon_{i,i} + \epsilon_{2\ell+2-i, 2\ell+2-i}) + \epsilon_{\ell+1, \ell+1} + e^{-z_{n,1}} \epsilon_{\ell, \ell} + e^{z_{n,1}} \epsilon_{\ell+2, \ell+2}, \quad (1.81)$$

$$R_k = \sum_{i=1}^{2\ell+1} \epsilon_{i,i} + 2e^{2x_{n,1}} \epsilon_{\ell, \ell+2} \quad (1.82)$$

при $k = 1, \dots, \ell$ и

$$U_1 = \sum_{i=1}^{\ell-1} \epsilon_{i,i} + e^{-z_{1,1}} \epsilon_{\ell, \ell} + e^{z_{1,1}} \epsilon_{\ell+1, \ell+1} + \sum_{i=\ell+2}^{2\ell+1} \epsilon_{i,i}, \quad (1.83)$$

$$\tilde{U}_1 = \sum_{i=1}^{\ell-1} \epsilon_{i,i} + e^{-z_{1,1}} \epsilon_{\ell, \ell} + e^{z_{1,1}} \epsilon_{\ell+1, \ell+1} + \sum_{i=\ell+2}^{2\ell+1} \epsilon_{i,i} + 2e^{x_{1,1}} \epsilon_{\ell, \ell+1}, \quad (1.84)$$

$$V_1 = \sum_{i=1}^{\ell} \epsilon_{i,i} + e^{-z_{1,1}} \epsilon_{\ell+1,\ell+1} + e^{z_{1,1}} \epsilon_{\ell+2,\ell+2} + \sum_{i=\ell+3}^{2\ell+1} \epsilon_{i,i}, \quad (1.85)$$

$$\tilde{V}_1 = U_1^* = \sum_{i=1}^{\ell} \epsilon_{i,i} + e^{-z_{1,1}} \epsilon_{\ell+1,\ell+1} + e^{z_{1,1}} \epsilon_{\ell+2,\ell+2} + \sum_{i=\ell+3}^{2\ell+1} \epsilon_{i,i} + 2e^{x_{1,1}} \epsilon_{\ell+1,\ell+2}, \quad (1.86)$$

где $x_{\ell,k} = 0$ при $k = 1, \dots, \ell$. Заметим, что $\tilde{V}_i, \tilde{U}_i$ можно рассматривать как внедиагональные деформации V_i, U_i . Сейчас мы готовы определить модифицированное факторизационное представление на $N_+ \subset \mathrm{SO}(2\ell + 1)$.

ТЕОРЕМА 1.5. (i) *Образ типичного унитарного элемента $v^{B_\ell} \in N_+$ при тавтологическом представлении $\pi: \mathfrak{so}_{2\ell+1} \rightarrow \mathrm{End}(\mathbb{C}^{2\ell+1})$ можно записать в виде*

$$\pi(v^{B_\ell}) = \mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2 \cdots \mathfrak{X}_\ell, \quad \mathfrak{X}_n = \pi(\mathfrak{X}_{B_{n-1}}^{B_n}), \quad n = 1, \dots, \ell, \quad (1.87)$$

где

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_1 &= \tilde{U}_1 U_1^{-1} Z_1 R_1 Z_1^{-1} \tilde{V}_1 V_1^{-1}, \\ \mathfrak{X}_n &= \tilde{U}_n U_n^{-1} Z_n R_{n-1} Z_n^{-1} [\tilde{U}_n U_n^{-1}]^* \cdot [\tilde{V}_n V_n^{-1}]^* Z_n R_n Z_n^{-1} \tilde{V}_n V_n^{-1}, \quad n = 2, \dots, \ell, \end{aligned} \quad (1.88)$$

и $x_{\ell,k} = 0$ при $k = 1, \dots, \ell$.

(ii) *Формулы (1.87), (1.88) определяют параметризацию множества полнотью неотрицательных унитарных элементов $N_+^{(0)} \subset N_+$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v^{B_\ell}(y)$ – параметризация на открытом подмножестве в N_+ , соответствующая (1.67), (1.68), и пусть $\tilde{X}_k(y) = e^{y\epsilon_{\ell+1-k,\ell+2-k}}$, $k = 2, \dots, \ell$, – унитарные элементы в $\mathrm{GL}(2\ell + 1)$, отвечающие простым корням $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$. Действие инволюции $*$ определяется как $\tilde{X}_i(y)^* = \tilde{X}_{\ell+1-i}(y)$. Вложим элементарный унитарный элемент $X_i(y)$ группы $\mathrm{SO}(2\ell + 1)$ в $\mathrm{GL}(2\ell + 1)$ следующим образом:

$$X_1(y) = e^{2y(\epsilon_{\ell,\ell+1} + \epsilon_{\ell+1,\ell+2})}, \quad X_k(y) = \tilde{X}_i(y)^* \tilde{X}_i(y), \quad k = 2, \dots, \ell.$$

Тем самым мы отображаем произвольный регулярный унитарный элемент v^{B_ℓ} в унитарную подгруппу в $\mathrm{GL}(2\ell + 1)$. Сделаем следующую замену переменных:

$$\begin{aligned} y_{1,1} &= e^{x_{1,1} - z_{1,1}}, \\ y_{1,k} &= e^{x_{k-1,1} - z_{k,1}} + e^{x_{k,1} - z_{k,1}}, \quad k = 2, \dots, \ell, \\ y_{k,2r-1} &= e^{z_{k+r-1,k} - x_{k+r-2,k-1}}, \quad r = 1, \dots, \ell + 1 - k, \\ y_{k,2r} &= e^{z_{k+r-1,k} - x_{k+r-1,k-1}}, \end{aligned} \quad (1.89)$$

где предполагаются выполненными условия $x_{\ell,k} = 0$, $k = 1, \dots, \ell$. Используя элементарные операции, несложно проверить, что после замены переменных (1.89) образ $\pi(v^{B_\ell})$ элемента v^{B_ℓ} , определенный посредством (1.67), (1.68), преобразуется в (1.87), (1.88), и это приводит к параметризации на $N_+^{(0)} \subset N_+$. Теорема 1.5 доказана.

Модифицированная факторизационная параметризация унипотентной подгруппы $N_+ \subset \mathrm{SO}(2\ell+1)$ определяет специальную реализацию представления π_μ основной серии алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{so}_{2\ell+1})$ дифференциальными операторами. Ее можно получить, применяя замену переменных (1.89) к представлению из предложения 1.4. Мы будем называть эту реализацию представлением Гаусса–Гивенталя.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.5. *Следующие дифференциальные операторы определяют представление π_μ алгебры Ли $\mathfrak{so}_{2\ell+1}$ в пространстве V_μ в терминах модифицированной факторизационной параметризации:*

$$F_1 = -e^{z_1} \frac{\partial}{\partial z_{1,1}} - 2 \sum_{n=2}^{\ell} e^{z_{n,1}} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z_{n,1}} + \frac{e^{x_{n,1}}}{e^{x_{n-1,1}} + e^{x_{n,1}}} \frac{\partial}{\partial z_{n,2}} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\partial}{\partial z_{k,1}} + \frac{\partial}{\partial z_{k,2}} + \frac{\partial}{\partial x_{k,1}} \right) \right\}, \quad (1.90)$$

$$F_2 = \sum_{n=1}^{2\ell-3} e^{x_{\beta(n)+1,2} - z_{\alpha(n)+2,2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial z_{1,1}} + \frac{\partial}{\partial x_{1,1}} + \sum_{k=1}^{\beta(n)} \left(\frac{\partial}{\partial z_{k+1,1}} + \frac{\partial}{\partial z_{k+1,2}} - \frac{\partial}{\partial z_{k+1,3}} \right) + \sum_{k=1}^{\alpha(n)+1} \left(\frac{\partial}{\partial x_{k,1}} - \frac{\partial}{\partial x_{k,2}} \right) + (-1)^n \frac{e^{x_{\beta(n)+1,1}}}{e^{x_{\alpha(n)+1,1}} + e^{x_{\alpha(n)+2,1}}} \frac{\partial}{\partial z_{\alpha(n)+2,1}} \right\}, \quad (1.91)$$

$$F_i = \sum_{n=1}^{2(\ell-i)+1} e^{x_{\beta(n)+i-1,i} - z_{\alpha(n)+i,i}} \left\{ \frac{\partial}{\partial z_{i-1,i-1}} + \frac{\partial}{\partial x_{i-1,i-1}} + \sum_{k=1}^{\alpha(n)} \left(\frac{\partial}{\partial x_{i+k-1,i-1}} - \frac{\partial}{\partial x_{i+k-1,i}} \right) + \sum_{k=1}^{\beta(n)} \left(\frac{\partial}{\partial z_{i+k-1,i}} - \frac{\partial}{\partial z_{i+k-1,i+1}} \right) \right\}, \quad i = 3, \dots, \ell, \quad (1.92)$$

$$H_k = \langle \mu, \alpha_k^\vee \rangle + \sum_{n=1}^{\ell} (-1)^{\delta_{n,1}} a_{k,n} \sum_{i=n}^{\ell} \frac{\partial}{\partial z_{i,n}}, \quad k = 1, \dots, \ell, \quad (1.93)$$

$$E_1 = - \sum_{n=1}^{2\ell-1} e^{x_{\beta(n),1} - z_{\alpha(n)+1,1}} \left\{ 2\mu_1 + 2 \sum_{k=1}^{\alpha(n)} \frac{\partial}{\partial x_{k,1}} + (-1)^n \frac{\partial}{\partial z_{\alpha(n)+1,1}} \right\}, \quad (1.94)$$

$$E_2 = \sum_{n=1}^{2(\ell-1)} e^{z_{\beta(n)+1,2} - x_{\alpha(n)+1,1}} \left\{ \mu_1 - \mu_2 + \sum_{k=1}^{\beta(n)} \left(\frac{\partial}{\partial x_{k,1}} - \frac{\partial}{\partial x_{k,2}} \right) - \sum_{k=1}^{\alpha(n)} \frac{\partial}{\partial z_{k+1,2}} \right\}, \quad (1.95)$$

$$E_i = \sum_{n=1}^{2(\ell+1-i)} e^{z_{\beta(n)+i-1,i} - x_{\alpha(n)+i-1,i-1}} \left\{ \mu_{i-1} - \mu_i + \sum_{k=0}^{\alpha(n)} \left(\frac{\partial}{\partial z_{k+i-1,i-1}} - \frac{\partial}{\partial z_{k+i-1,i}} \right) + \sum_{k=0}^{\beta(n)-1} \left(\frac{\partial}{\partial x_{k+i-1,i-1}} - \frac{\partial}{\partial x_{k+i-1,i}} \right) \right\}, \quad i = 3, \dots, \ell. \quad (1.96)$$

Здесь $E_i = \pi_\lambda(e_i)$, $F_i = \pi_\lambda(f_i)$, $H_i = \pi_\lambda(h_i)$, $x_{\ell,k} = 0$, $k = 1, \dots, \ell$, и дифференцирования по $x_{i,k}$, $z_{i,k}$, $i < k$, и по $x_{\ell,n}$, $n = 1, \dots, \ell$, мы опускаем. Также мы используем обозначения $\alpha(n) := [n/2]$, $\beta(n) := [(n+1)/2]$.

Сейчас мы явно выпишем матричный элемент (1.12) в представлении Гаусса–Гивенталья. Векторы Уиттекера ψ_R и ψ_L в этом представлении удовлетворяют системам дифференциальных уравнений (1.7) и (1.8):

$$F_i \psi_R(x) = -\psi_R(x), \quad E_i \psi_L(x) = -\psi_L(x), \quad i = 1, \dots, \ell.$$

Их решения имеют следующий вид.

ЛЕММА 1.6. *Функции*

$$\begin{aligned} \psi_L(x, z) = & e^{2\mu_1 x_{1,1}} \prod_{n=2}^{\ell} (e^{x_{n,1}} + e^{x_{n-1,1}})^{2\mu_n} \\ & \times \prod_{n=1}^{\ell} \exp \left\{ -\mu_n \left(\sum_{i=1}^n x_{n,i} + 2z_{n,1} - 2 \sum_{i=2}^n z_{n,i} + \sum_{i=1}^{n-1} x_{n-1,i} \right) \right\} \\ & \times \exp \left\{ - \left(\sum_{k=1}^{\ell} e^{z_{k,1}} + \sum_{k=2}^{\ell} e^{x_{k,k} - z_{k,k}} + \sum_{k=2}^{\ell} \sum_{n=k+1}^{\ell} (e^{x_{n-1,k} - z_{n,k}} + e^{x_{n,k} - z_{n,k}}) \right) \right\}, \end{aligned} \quad (1.97)$$

$$\begin{aligned} \psi_R(x, z) = & \exp \left\{ - \left(e^{x_{1,1} - z_{1,1}} + \sum_{n=2}^{\ell} (e^{x_{n-1,1} - z_{n,1}} + e^{x_{n,1} - z_{n,1}}) \right) \right. \\ & \left. + \sum_{k=2}^{\ell} \sum_{n=k}^{\ell} (e^{z_{n,k} - x_{n-1,k-1}} + e^{z_{n,k} - x_{n,k-1}}) \right\} \end{aligned} \quad (1.98)$$

являются решениями линейных дифференциальных уравнений (1.7), (1.8). Здесь $x_{\ell,k} = 0$ при $k = 1, \dots, \ell$ и $\mu_k = i\lambda_k - \rho_k$, где $\rho_k = (2k-1)/2$.

Мы готовы предъявить интегральное представление для спаривания (1.12) в терминах модифицированных параметров факторизации. Для того чтобы получить явное выражение для подынтегральной функции, используется тот же тип разложения элемента максимального тора, что и в случае $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$:

$$e^{-H_x} = \pi_\lambda \left(\exp \left(- \sum_{i=1}^{\ell} \langle \omega_i, x \rangle h_i \right) \right) = e^{H_L} e^{H_R},$$

где

$$\begin{aligned} -H_x = & H_L + H_R = - \sum_{i=1}^{\ell} \langle \omega_i, x \rangle \langle \mu, \alpha_i^\vee \rangle \\ & + x_{\ell,1} \sum_{n=1}^{\ell} \frac{\partial}{\partial z_{n,1}} + \sum_{k=1}^{\ell-1} (x_{\ell,i} - x_{\ell,i+1}) \sum_{n=k}^{\ell} \frac{\partial}{\partial z_{n,k}} \end{aligned} \quad (1.99)$$

и

$$H_L = \sum_{k=1}^{\ell-1} \sum_{n=1}^k x_{\ell,n} \frac{\partial}{\partial x_{k,n}} + \sum_{k=2}^{\ell} \sum_{n=2}^k x_{\ell,n} \frac{\partial}{\partial z_{k,n}}, \quad (1.100)$$

$$H_R = -H_x - H_L. \quad (1.101)$$

Напомним, что дифференциальный оператор H_L действует на левый вектор, а H_R действует на правый вектор в (1.12). Учитывая лемму 1.6, мы получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1.6. *Собственные функции $\mathfrak{so}_{2\ell+1}$ -цепочки Тоды (1.12) допускают интегральное представление:*

$$\Psi_{\lambda_1, \dots, \lambda_\ell}^{B_\ell}(x_{\ell,1}, \dots, x_{\ell,\ell}) = \int_C \prod_{k=1}^{\ell-1} d\underline{x}_k \prod_{k=1}^{\ell} d\underline{z}_k e^{\mathcal{F}^{B_\ell}}, \quad (1.102)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{B_\ell} = & -\imath \lambda_1 (-x_{1,1} + 2z_{1,1}) \\ & - \imath \sum_{n=2}^{\ell} \lambda_n \left(\sum_{i=1}^n x_{n,i} + 2z_{n,1} - 2 \sum_{i=2}^n z_{n,i} + \sum_{i=1}^{n-1} x_{n-1,i} - 2 \ln(e^{x_{n,1}} + e^{x_{n-1,1}}) \right) \\ & - \left\{ \sum_{n=1}^{\ell} e^{z_{n,1}} + \sum_{k=2}^{\ell} \sum_{n=k+1}^{\ell} (e^{x_{n-1,k} - z_{n,k}} + e^{x_{n,k} - z_{n,k}}) \right. \\ & \left. + \sum_{n=k}^{\ell} (e^{z_{n,k} - x_{n-1,k-1}} + e^{z_{n,k} - x_{n,k-1}}) + \sum_{n=1}^{\ell} e^{x_{n,n} - z_{n,n}} \right\} \end{aligned}$$

и $x_i := x_{\ell,i}$, $i = 1, \dots, \ell$. Здесь $C \subset \mathbb{N}_+$ – некомпактное подмногообразие половинной размерности, на котором подынтегральное выражение экспоненциально убывает на границе и на бесконечности. В частности, область интегрирования можно положить равной малой деформации подпространства $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{C}^m$, $m = l(w_0)$, обеспечивающей сходимость интеграла.

Заметим, что интеграл (1.102) можно получить непосредственно из (1.74), используя следующую замену переменных:

$$\begin{aligned} y_{1,1} &= e^{-x_{\ell,1}} e^{x_{1,1} - z_{1,1}}, \\ y_{1,k} &= e^{-x_{\ell,1}} (e^{x_{k-1,1} - z_{k,1}} + e^{x_{k,1} - z_{k,1}}), \quad k = 2, \dots, \ell, \\ y_{k,2r-1} &= e^{-x_{\ell,k-1} - x_{\ell,k}} e^{z_{k+r-1,k} - x_{k+r-2,k-1}}, \quad r = 1, \dots, \ell + 1 - k, \\ y_{k,2r} &= e^{-x_{\ell,k-1} - x_{\ell,k}} e^{z_{k+r-1,k} - x_{k+r-1,k-1}}. \end{aligned} \quad (1.103)$$

ПРИМЕР 1.3. При $\ell = 2$ общая формула (1.102) принимает вид

$$\begin{aligned} \Psi_{\lambda_1, \lambda_2}^{B_2}(x_{2,1}, x_{2,2}) &= \int_C dz_{1,1} dx_{1,1} dz_{2,1} dz_{2,2} \\ &\times e^{-\imath \lambda_1 (-x_{1,1} + 2z_{1,1}) - \imath \lambda_2 (2z_{2,1} - 2z_{2,2} + x_{1,1} + x_{2,1} + x_{2,2})} (e^{x_{2,1}} + e^{x_{1,1}})^{2\imath \lambda_2} \\ &\times \exp \left\{ - (e^{z_{1,1}} + e^{z_{2,1}} + e^{x_{2,2} - z_{2,2}} + e^{x_{1,1} - z_{1,1}} + e^{x_{1,1} - z_{2,1}} \right. \\ &\left. + e^{x_{2,1} - z_{2,1}} + e^{z_{2,2} - x_{1,1}} + e^{z_{2,2} - x_{2,1}}) \right\}. \end{aligned} \quad (1.104)$$

Имеется простое комбинаторное описание потенциала $\mathcal{F}^{B_\ell}$ на нулевом уровне спектра $\{\lambda_i = 0\}$. А именно, он может быть представлен как сумма по всем стрелкам на следующей диаграмме:

Здесь мы используем те же правила сопоставления переменных стрелкам, что и на диаграмме для типа A_ℓ . Также сопоставим стрелкам $\circ \rightarrow x$ функции $e^x/2$.

Заметим, что диаграмма для типа B_ℓ может быть получена из диаграммы (1.51) для типа $A_{2\ell}$ факторизацией. А именно, рассмотрим инволюцию

$$*: X \mapsto -\dot{W}_0^{-1} X^t \dot{W}_0, \quad (1.105)$$

где W_0 – элемент максимальной длины в группе Вейля $S_{2\ell+1}$ системы корней $A_{2\ell}$ и X^t обозначает стандартное транспонирование. Соответствующее действие на модифицированных параметрах факторизации задано как

$$*: x_{k,i} \longleftrightarrow -x_{k,k+1-i}. \quad (1.106)$$

Это определяет факторизацию $A_{2\ell}$ -диаграммы, которая приводит к диаграмме типа B_ℓ .

Можно получить аналог соотношений (1.52) следующим образом. Свяжем переменные $a_{k,i}$, $b_{k,i}$, $c_{k,i}$, $d_{k,i}$ со стрелками диаграммы Гивенталья:

$$\begin{aligned} a_{k,1} &= b_{k,1} = \frac{1}{2} e^{z_{k,1}}, & k &= 1, \dots, \ell; \\ a_{k,i} &= e^{z_{k,i} - x_{k-1,i-1}}, & b_{k,i} &= e^{z_{k,i} - x_{k,i-1}}, & 1 < i \leq k \leq \ell; \\ c_{k,a} &= e^{x_{k,a} - z_{k,a}}, & 1 \leq a \leq k \leq \ell; \\ d_{m,j} &= e^{x_{m,j} - z_{m+1,j}}, & 1 \leq j \leq m < \ell. \end{aligned} \quad (1.107)$$

Тогда имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} a_{k,1} &= b_{k,1}, & 1 \leq k \leq \ell, \\ d_{k,i} a_{k+1,i+1} &= c_{k+1,i} b_{k+1,i+1}, & 1 \leq i \leq k < \ell - 1, \\ b_{k,i} c_{k,i} &= a_{k+1,i} d_{k,i}, & 1 \leq i \leq k < \ell - 1, \\ b_{\ell,1} c_{\ell,1} &= e^{x_{\ell,1}}, & b_{\ell,i} c_{\ell,i} &= e^{x_{\ell,i} - x_{\ell,i-1}}, & i &= 2, \dots, \ell. \end{aligned} \quad (1.108)$$

Эти равенства можно рассматривать как соотношения между элементарными путями на диаграмме Гивенталья. Используя соотношения для более общих путей, которые вытекают из (1.108), можно определить торическое вырождение многообразий флагов для $\mathfrak{so}_{2\ell+1}$, которое обобщает результаты работы [5]. Заметим, что приведенная выше диаграмма совпадает с диаграммой Гельфанда–Цейтлина для алгебры Ли $\mathfrak{so}_{2\ell+1}$.

1.3.3. Рекурсия для $\mathfrak{so}_{2\ell+1}$ -функций Уиттекера и $\mathcal{Q}$ -оператор для $B_\ell^{(1)}$ -цепочки Тоды. Интегральное представление (1.102) из теоремы 1.6 для $\mathfrak{so}_{2\ell+1}$ -функций Уиттекера обладает замечательной рекурсивной структурой относительно ранга ℓ . Нам будет удобно использовать следующее обозначение: $\underline{a}_n = (a_{n,1}, \dots, a_{n,n})$ при $n = 1, \dots, \ell$. Введем интегральные операторы $Q_{B_{n-1}}^{B_n}$, $n = 2, \dots, \ell$, с ядрами $Q_{B_{n-1}}^{B_n}(\underline{x}_n, \underline{x}_{n-1}; \lambda_n)$, определяемые следующим образом:

$$Q_{B_{n-1}}^{B_n}(\underline{x}_n, \underline{x}_{n-1}; \lambda_n) = \int d\underline{z}_n Q_{BC_n}^{B_n}(\underline{x}_n, \underline{z}_n) Q_{B_{n-1}}^{BC_n}(\underline{z}_n, \underline{x}_{n-1}) (e^{x_{n,1}} + e^{x_{n-1,1}})^{2i\lambda_n} \times \exp \left\{ -i\lambda_n \left(\sum_{i=1}^n x_{n,i} + 2z_{n,1} - 2 \sum_{i=2}^n z_{n,i} + \sum_{i=1}^{n-1} x_{n-1,i} \right) \right\}, \quad (1.109)$$

где

$$Q_{BC_n}^{B_n}(\underline{x}_n, \underline{z}_n) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} e^{z_{n,1}} - \sum_{i=1}^{n-1} (e^{x_{n,i} - z_{n,i}} + e^{z_{n,i+1} - x_{n,i}}) - e^{x_{n,n} - z_{n,n}} \right\}, \quad (1.110)$$

$$Q_{B_{n-1}}^{BC_n}(\underline{z}_n, \underline{x}_{n-1}) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} e^{z_{n,1}} - \sum_{i=1}^{n-1} (e^{x_{n-1,i} - z_{n,i}} + e^{z_{n,i+1} - x_{n-1,i}}) \right\}. \quad (1.111)$$

При $n = 1$ положим

$$Q_{B_0}^{B_1}(x_{1,1}; \lambda_1) = \Psi_{\lambda_1}^{B_1}(x_{1,1}) = \int dz_{1,1} e^{i\lambda_1(x_{1,1} - 2z_{1,1})} \exp \{ -(e^{z_{1,1}} + e^{x_{1,1} - z_{1,1}}) \}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Сделаем следующую замену переменных $\underline{z}_n$ под знаком интеграла в (1.109):

$$\begin{aligned} z_{n,1} &\longmapsto -z_{n,1} + \ln(e^{x_{n-1,1}} + e^{x_{n,1}}), \\ z_{n,k} &\longmapsto -z_{n,k} + x_{n-1,k-1} + x_{n,k-1} \\ &\quad + \ln(e^{x_{n-1,k}} + e^{x_{n,k}}) - \ln(e^{x_{n-1,k-1}} + e^{x_{n,k-1}}) \quad \text{при } k = 2, \dots, n-1, \\ z_{n,n} &\longmapsto -z_{n,n} + x_{n-1,n-1} + x_{n,n-1} + x_{n,n} - \ln(e^{x_{n-1,n-1}} + e^{x_{n,n-1}}). \end{aligned}$$

Это даст более простое интегральное представление оператора рекурсии

$$Q_{B_{n-1}}^{B_n}(\underline{x}_n, \underline{x}_{n-1}; \lambda_n) = \int d\underline{z}_n Q_{BC_n}^{B_n}(\underline{x}_n, \underline{z}_n) Q_{B_{n-1}}^{BC_n}(\underline{z}_n, \underline{x}_{n-1}) \times \exp \left\{ i\lambda_n \left(\sum_{i=1}^n x_{n,i} + 2z_{n,1} - 2 \sum_{i=2}^n z_{n,i} + \sum_{i=1}^{n-1} x_{n-1,i} \right) \right\} \quad (1.112)$$

и $\mathfrak{so}_{2\ell+1}$ -волновой функции Тоды.

Используя интегральные операторы $Q_{B_{n-1}}^{B_n}$, можно переписать интегральное представление (1.102) в рекурсивной форме.

ТЕОРЕМА 1.7. *Собственная функция B_ℓ -цепочки Тоды может быть записана в виде*

$$\Psi_{\lambda_1, \dots, \lambda_\ell}^{B_\ell}(x_1, \dots, x_\ell) = \int_C \prod_{k=1}^{\ell-1} d\underline{x}_k \prod_{k=1}^{\ell} Q_{B_{k-1}}^{B_k}(\underline{x}_k, \underline{x}_{k-1}; \lambda_k),$$

или, эквивалентно,

$$\Psi_{\lambda_1, \dots, \lambda_\ell}^{B_\ell}(x_1, \dots, x_\ell) = \int_{\mathcal{C}_\ell} d\underline{x}_{\ell-1} Q_{B_{\ell-1}}^{B_\ell}(\underline{x}_\ell, \underline{x}_{\ell-1}; \lambda_\ell) \Psi_{\lambda_1, \dots, \lambda_{\ell-1}}^{B_{\ell-1}}(\underline{x}_{\ell-1}), \quad (1.113)$$

где $x_i := x_{\ell,i}$, $i = 1, \dots, \ell$, и $C \subset N_+$ – некомпактное подмногообразие половинной размерности, для которого подынтегральная функция экспоненциально убывает на возможных границах и на бесконечности.

Отметим, что, в отличие от интегральных представлений в случае $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$, ядра операторов $Q_{B_{n-1}}^{B_n}$, $n = 1, \dots, \ell$, имеют сложный вид. Рассматривая функции Уиттекера на нулевом уровне спектра $\{\lambda_i = 0\}$, мы приходим к новым интересным структурам. Как следует из (1.109), ядро оператора $Q_{B_{n-1}}^{B_n}$ задается сверткой двух ядер $Q_{BC_n}^{B_n}(\underline{x}_n, \underline{z}_n)$ и $Q_{B_{n-1}}^{BC_n}(\underline{z}_n, \underline{x}_{n-1})$. Соответствующие интегральные операторы $Q_{BC_n}^{B_n}$, $Q_{B_{n-1}}^{BC_n}$ можно рассматривать как элементарные сплетения, связывающие цепочки Тоды для систем корней B_n , BC_n и BC_n , B_{n-1} , при этом BC_ℓ -цепочка Тоды¹ определяется в терминах неприведенной системы корней BC_ℓ стандартным образом. Напомним конструкцию неприведенной системы корней BC_ℓ . Система корней типа BC_ℓ может быть реализована в ортонормированном базисе $\{\epsilon_i\}$ пространства $\mathbb{R}^\ell$ как

$$\alpha_0 = 2\epsilon_1, \quad \alpha_1 = \epsilon_1, \quad \alpha_{i+1} = \epsilon_{i+1} - \epsilon_i, \quad 1 \leq i \leq \ell - 1, \quad (1.114)$$

и соответствующая диаграмма Дынкина имеет вид

$$\begin{array}{c} \alpha_0 \\ \parallel \\ \parallel \\ \parallel \\ \parallel \\ \parallel \\ \downarrow \\ \alpha_1 \end{array} \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} \alpha_2 \text{ --- } \dots \text{ --- } \alpha_{n-1} \text{ --- } \alpha_n \quad (1.115)$$

где первая слева вершина отвечает приведенному корню $\alpha_1 = \epsilon_1$ и неприведенному корню $\alpha_0 = 2\epsilon_1$. Например, квадратичный гамильтонов оператор BC_ℓ -цепочки Тоды имеет вид

$$\mathcal{H}_2^{BC_\ell}(\underline{x}^{(\ell)}) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\ell} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{1}{4} \left(e^{x_1} + \frac{1}{2} e^{2x_1} \right) + \sum_{i=1}^{\ell-1} e^{x_{i+1} - x_i}. \quad (1.116)$$

¹ BC_ℓ -цепочку Тоды можно рассматривать как наиболее общую форму C_ℓ -цепочки Тоды (см., например, [32; замечание на с. 61]). Далее мы используем термин “ BC_ℓ -цепочка Тоды”, для того чтобы отличать ее от более стандартной C_ℓ -цепочки Тоды, которая рассматривается ниже.

Интегральные операторы $Q_{BC_n}^{B_n}$ и $Q_{B_{n-1}}^{BC_n}$ сплетают гамильтоновы операторы цепочек Тоды для систем корней разных типов. Тем самым, для квадратичных гамильтонианов несложно непосредственно проверить следующие соотношения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.6. 1. *Операторы $Q_{BC_n}^{B_n}$ и $Q_{B_{n-1}}^{BC_n}$, определяемые ядрами (1.110), (1.111), сплетают квадратичные гамильтонианы B - и BC -цепочек Тоды:*

$$\mathcal{H}_2^{BC_n}(z_n)Q_{B_{n-1}}^{BC_n}(z_n, x_{n-1}) = Q_{B_{n-1}}^{BC_n}(z_n, x_{n-1})\mathcal{H}_2^{B_{n-1}}(x_{n-1}), \quad (1.117)$$

$$\mathcal{H}_2^{B_n}(x_n)Q_{BC_n}^{B_n}(x_n, z_n) = Q_{BC_n}^{B_n}(x_n, z_n)\mathcal{H}_2^{BC_n}(z_n). \quad (1.118)$$

2. *Интегральный оператор $Q_{B_{n-1}}^{B_n}$ при $\lambda_n = 0$ сплетает гамильтонианы $\mathcal{H}_2^{B_n}$ и $\mathcal{H}_2^{B_{n-1}}$:*

$$\mathcal{H}_2^{B_n}(x_n)Q_{B_{n-1}}^{B_n}(x_n, x_{n-1}; \lambda_n = 0) = Q_{B_{n-1}}^{B_n}(x_n, x_{n-1}; \lambda_n = 0)\mathcal{H}_2^{B_{n-1}}(x_{n-1}). \quad (1.119)$$

Ядро $Q_{B_{n-1}}^{B_n}(x_n, x_{n-1}; \lambda_n = 0)$ можно задать следующей поддиаграммой диаграммы Гивенталья для $\mathfrak{so}_{2\ell+1}$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \circ & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 \circ & \longrightarrow & z_{n,1} & \longrightarrow & x_{n,1} & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & x_{n-1,1} & \longrightarrow & z_{n,2} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & \cdots & & \\
 & & & & & \longrightarrow & x_{n,n-1} \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & x_{n-1,n-1} & \longrightarrow & z_{n,n} \longrightarrow x_{n,n}
 \end{array} \quad (1.120)$$

Здесь верхний и нижний спускающиеся пути на ориентированной диаграмме отвечают ядрам элементарных сплетений $Q_{BC_n}^{B_n}$ и $Q_{B_{n-1}}^{BC_n}$ соответственно. Свертка ядер $Q_{BC_n}^{B_n}$ и $Q_{B_{n-1}}^{BC_n}$ в (1.109) при $\lambda_n = 0$ отвечает интегрированию по переменным $z_{n,i}$, соответствующим внутренним вершинам поддиаграммы (1.120).

Подобно случаю $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$, операторы рекурсии $Q_{B_{n-1}}^{B_n}$ можно рассматривать как специальные вырождения $\mathcal{Q}$ -операторов Бакстера для аффинных $B_\ell^{(1)}$ -цепочек Тоды. Ниже мы приводим интегральные представления для этих $\mathcal{Q}$ -операторов. Подчеркнем, что ранее $\mathcal{Q}$ -операторы были известны только для случая $\widehat{\mathfrak{gl}}_{\ell+1}$. Мы не будем здесь приводить полный список свойств, характеризующих определяемые $\mathcal{Q}$ -операторы, и ограничимся рассмотрением коммутационных соотношений для квадратичных гамильтонианов аффинных цепочек Тоды. Подробности будут опубликованы в другом месте.

Начнем с описания $B_\ell^{(1)}$ -цепочки Тоды. Множество простых корней аффинной системы корней $B_\ell^{(1)}$ можно записать в следующем виде:

$$\alpha_1 = \epsilon_1, \quad \alpha_{i+1} = \epsilon_{i+1} - \epsilon_i, \quad 1 \leq i \leq \ell - 1, \quad \alpha_{\ell+1} = -\epsilon_\ell - \epsilon_{\ell-1}. \quad (1.121)$$

Соответствующая диаграмма Дынкина имеет вид

Эти корневые данные определяют аффинную $B_\ell^{(1)}$ -цепочку Тоды с квадратичным гамильтонианом

$$\mathcal{H}_2^{B_\ell^{(1)}} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\ell+1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{1}{2} e^{x_1} + \sum_{i=1}^{\ell-1} e^{x_{i+1} - x_i} + g e^{-x_\ell - x_{\ell-1}}. \quad (1.122)$$

Здесь g – произвольная константа связи.

Определим $\mathcal{Q}$ -оператор Бакстера для $B_\ell^{(1)}$ -цепочки Тоды как интегральный оператор с ядром

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}^{B_\ell^{(1)}}(\underline{x}^{(\ell)}, \underline{y}^{(\ell)}; \lambda) &= \int d\underline{z}^{(\ell)} (e^{x_1} + e^{y_1})^{2\iota\lambda} (e^{-x_\ell} + e^{-y_\ell})^{-2\iota\lambda} \\ &\times \exp \left\{ -\iota\lambda \left(\sum_{i=1}^{\ell} x_i + 2z_1 - 2 \sum_{i=2}^{\ell} z_i + \sum_{i=1}^{\ell} y_i \right) \right\} \\ &\times Q_{BC_\ell^{(1)}}^{B_\ell^{(1)}}(\underline{x}^{(\ell)}, \underline{z}^{(\ell)}) Q_{B_\ell^{(1)}}^{BC_\ell^{(1)}}(\underline{z}^{(\ell)}, \underline{y}^{(\ell)}), \end{aligned} \quad (1.123)$$

где

$$\begin{aligned} Q_{B_\ell^{(1)}}^{BC_\ell^{(1)}}(\underline{z}^{(\ell)}, \underline{y}^{(\ell)}) &= \exp \left\{ - \left(\frac{1}{2} e^{z_1} + \sum_{i=1}^{\ell-1} (e^{y_i - z_i} + e^{z_{i+1} - y_i}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + e^{y_\ell - z_\ell} + g e^{-y_\ell - z_\ell} \right) \right\} \end{aligned} \quad (1.124)$$

и

$$Q_{BC_n^{(1)}}^{B_n^{(1)}}(\underline{x}^{(\ell)}, \underline{z}^{(\ell)}) = Q_{B_n^{(1)}}^{BC_n^{(1)}}(\underline{z}^{(\ell)}, \underline{x}^{(\ell)}). \quad (1.125)$$

Здесь $\underline{x}^{(\ell)} = (x_1, \dots, x_\ell)$, $\underline{z}^{(\ell)} = (z_1, \dots, z_\ell)$ и $\underline{y}^{(\ell)} = (y_1, \dots, y_\ell)$.

Следующее предложение можно доказать непосредственной проверкой.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.7. $\mathcal{Q}$ -оператор (1.123) коммутирует с квадратичным гамильтонианом $B_\ell^{(1)}$ -цепочки Тоды, т. е. ядро сплетает гамильтонианы $\mathcal{H}_2^{B_\ell^{(1)}}$:

$$\mathcal{H}_2^{B_\ell^{(1)}}(\underline{x}^{(\ell)}) \mathcal{Q}^{B_\ell^{(1)}}(\underline{x}^{(\ell)}, \underline{y}^{(\ell)}; \lambda) = \mathcal{Q}^{B_\ell^{(1)}}(\underline{x}^{(\ell)}, \underline{y}^{(\ell)}; \lambda) \mathcal{H}_2^{B_\ell^{(1)}}(\underline{y}^{(\ell)}). \quad (1.126)$$

Покажем, что оператор рекурсии $Q_{B_{\ell-1} \oplus B_1}^{B_\ell}$ можно рассматривать как вырождение $\mathcal{Q}$ -операторов Бакстера для $B_\ell^{(1)}$. Произведем небольшую модификацию оператора рекурсии $Q_{B_{\ell-1} \oplus B_1}^{B_\ell}$ с ядром:

$$Q_{B_{\ell-1} \oplus B_1}^{B_\ell}(\underline{x}^{(\ell)}, \underline{y}^{(\ell)}; \lambda) := e^{\imath \lambda y_\ell} Q_{B_{\ell-1}}^{B_\ell}(\underline{x}^{(\ell)}, \underline{y}^{(\ell-1)}; \lambda), \quad (1.127)$$

где $\underline{y}^{(\ell-1)} = (y_1, \dots, y_{\ell-1})$. Оператор (1.127) сплетает гамильтонианы $\mathfrak{so}_{2\ell+1}$ -и $\mathfrak{so}_{2\ell-1} \oplus \mathfrak{so}_2$ -цепочек Тоды. Тем самым, для квадратичных гамильтонианов имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_2^{B_\ell}(\underline{x}^{(\ell)}) Q_{B_{\ell-1} \oplus B_1}^{B_\ell}(\underline{x}^{(\ell)}, \underline{y}^{(\ell)}; \lambda) &= Q_{B_{\ell-1} \oplus B_1}^{B_\ell}(\underline{x}^{(\ell)}, \underline{y}^{(\ell)}; \lambda) \\ &\quad \times (\mathcal{H}_2^{B_{\ell-1}}(\underline{y}^{(\ell-1)}) + \mathcal{H}_2^{B_1}(y_\ell)), \end{aligned}$$

где $\mathcal{H}_2^{B_1}(y_\ell) = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y_\ell^2}$. Ясно, что проекция указанного выше соотношения на подпространство функций $F(\underline{y}^{(\ell)}) = \exp(\imath \lambda y_\ell) f(\underline{y}^{(\ell-1)})$ определяет исходный оператор рекурсии, который удовлетворяет соотношению

$$\mathcal{H}_2^{B_\ell}(\underline{x}^{(\ell)}) Q_{B_{\ell-1}}^{B_\ell}(\underline{x}^{(\ell)}, \underline{y}^{(\ell)}; \lambda) = Q_{B_{\ell-1}}^{B_\ell}(\underline{x}^{(\ell)}, \underline{y}^{(\ell-1)}; \lambda) \left(\mathcal{H}_2^{B_{\ell-1}}(\underline{y}^{(\ell-1)}) + \frac{1}{2} \lambda^2 \right). \quad (1.128)$$

Рассмотрим однопараметрическое семейство ядер

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}^{B_\ell^{(1)}}(\underline{x}^{(\ell)}, \underline{y}^{(\ell)}; \lambda; \varepsilon) &= \varepsilon^{\imath \lambda} e^{\imath \lambda y_\ell} \int d\underline{z}^{(\ell)} (e^{x_1} + e^{y_1})^{2\imath \lambda} (\varepsilon e^{y_\ell - x_\ell} + 1)^{-2\imath \lambda} \\ &\quad \times \exp \left\{ -\imath \lambda \left(\sum_{i=1}^{\ell} x_i + 2z_1 - 2 \sum_{i=2}^{\ell} z_i + \sum_{i=1}^{\ell-1} y_i \right) \right\} Q_{BC_\ell^{(1)}}^{B_\ell^{(1)}}(x_i, z_i) Q_{B_\ell^{(1)}}^{BC_\ell^{(1)}}(z_i, y_i; \varepsilon), \end{aligned} \quad (1.129)$$

где

$$Q_{B_\ell^{(1)}}^{BC_\ell^{(1)}}(\underline{z}_\ell, \underline{y}_\ell; \varepsilon) = \exp \left\{ - \left(\frac{1}{2} e^{z_1} + \sum_{i=1}^{\ell-1} (e^{y_i - z_i} + e^{z_{i+1} - y_i}) + \varepsilon e^{y_\ell - z_\ell} + \varepsilon^{-1} g e^{-y_\ell - z_\ell} \right) \right\}, \quad (1.130)$$

которые получены из ядра оператора $\mathcal{Q}^{B_\ell^{(1)}}$ заменой переменных $y_\ell = y_\ell + \ln \varepsilon$. Рассмотрим предельное поведение (1.129), (1.130) при $\varepsilon \rightarrow 0$, $g\varepsilon^{-1} \rightarrow 0$. Тогда имеет место следующее соотношение, связывающее $\mathcal{Q}$ -оператор для $B_\ell^{(1)}$ -цепочки Тоды и (модифицированный) оператор рекурсии для $\mathfrak{so}_{2\ell+1}$ -функции Уиттекера:

$$Q_{B_{\ell-1} \oplus B_1}^{B_\ell}(\underline{x}^{(\ell)}, \underline{y}^{(\ell)}; \lambda) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0, \\ g\varepsilon^{-1} \rightarrow 0}} \varepsilon^{-\imath \lambda} \mathcal{Q}^{B_\ell^{(1)}}(\underline{x}^{(\ell)}, \underline{y}^{(\ell)}; \lambda; \varepsilon).$$

1.4. Интегральные представления собственных функций $\mathfrak{sp}_{2\ell}$ -цепочки Тоды. В этом разделе мы получим аналог интегрального представления Гивенталья функций Уиттекера для алгебр Ли $\mathfrak{sp}_{2\ell}$. Как и в случае $\mathfrak{so}_{2\ell+1}$, мы начнем с интегрального представления $\mathfrak{sp}_{2\ell}$ -функций Уиттекера, использующего факторизационную параметризацию. Затем мы рассмотрим модификацию факторизационной параметризации, приводящую к интегральным представлениям типа Гивенталья для $\mathfrak{sp}_{2\ell}$ -функций Уиттекера.

Рассмотрим систему корней типа C_ℓ , отвечающую алгебре Ли $\mathfrak{sp}_{2\ell}$. Пусть $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_\ell\}$ – ортонормированный базис в пространстве $\mathbb{R}^\ell$. Мы используем следующую реализацию простых корней, кореньей и фундаментальных весов векторами в $\mathbb{R}^\ell$:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 2\epsilon_1, & \alpha_1^\vee &= \epsilon_1, & \omega_1 &= \epsilon_1 + \dots + \epsilon_\ell \\ \alpha_2 &= \epsilon_2 - \epsilon_1, & \alpha_2^\vee &= \epsilon_2 - \epsilon_1, & \omega_2 &= \epsilon_2 + \dots + \epsilon_\ell, \\ \dots & & \dots & & \dots & \\ \alpha_\ell &= \epsilon_\ell - \epsilon_{\ell-1}, & \alpha_\ell^\vee &= \epsilon_\ell - \epsilon_{\ell-1}, & \omega_\ell &= \epsilon_\ell. \end{aligned} \quad (1.131)$$

Матрица Картана $\|a_{ij}\| = \|\langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle\|$ становится симметрической $\|b_{ij}\| = \|d_i a_{ij}\|$ при $d_1 = 2$, $d_i = 1$, $i = 2, \dots, \ell$. Свяжем с этими корневыми данными $\mathfrak{sp}_{2\ell}$ -цепочку Тоды с квадратичным гамильтонианом

$$\mathcal{H}_2^{C_\ell} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\ell} \frac{\partial^2}{\partial z_i^2} + 2e^{2z_1} + \sum_{i=1}^{\ell-1} e^{z_{i+1} - z_i}. \quad (1.132)$$

Можно дополнить (1.132) до полного набора из ℓ попарно коммутирующих операторов $\mathcal{H}_k^{C_\ell}$ для C_ℓ -цепочки Тоды. Мы ищем интегральные представления общих собственных функций этого полного набора гамильтонианов. Задача о собственных функциях квадратичного гамильтониана может быть записана в следующем виде:

$$\mathcal{H}_2^{C_\ell} \Psi_{\lambda_1, \dots, \lambda_\ell}^{C_\ell}(z_1, \dots, z_\ell) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i^2 \Psi_{\lambda_1, \dots, \lambda_\ell}^{C_\ell}(z_1, \dots, z_\ell). \quad (1.133)$$

1.4.1. $\mathfrak{sp}_{2\ell}$ -функция Уиттекера: факторизационная параметризация. Приведенное слово, отвечающее элементу максимальной длины w_0 в группе Вейля алгебры Ли $\mathfrak{sp}_{2\ell}$, можно представить в рекурсивной форме:

$$I_\ell = (i_1, i_2, i_3, \dots, i_{m_\ell}) := (1, 212, 32123, \dots, (\ell \dots 212 \dots \ell)), \quad m_\ell = \ell^2,$$

где индексы $i_k \in \Gamma = \{1, \dots, \ell\}$ отвечают отражениям относительно простых корней α_{i_k} . Пусть $N_+ \subset G$ – максимальная унитарная подгруппа в $G = \mathrm{Sp}(2\ell)$. С приведенным словом I_ℓ связана следующая рекурсивная параметризация типичного элемента $v^{C_\ell} \in N_+$:

$$v^{C_\ell} = v^{C_{\ell-1}} \mathfrak{X}_{C_{\ell-1}}^{C_\ell}, \quad (1.134)$$

где

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_{C_{\ell-1}}^{C_\ell} &= X_\ell(y_{\ell,1}) \cdots X_k(y_{k,2(\ell+1-k)-1}) \cdots X_2(y_{2,2\ell-3}) \\ &\quad \times X_1(y_{1,\ell}) X_2(y_{2,2\ell-2}) \cdots X_k(y_{k,2(\ell+1-k)}) \cdots X_\ell(y_{\ell,2}). \end{aligned} \quad (1.135)$$

Здесь $X_i(y) = e^{y f_i}$ и $f_i \equiv f_{\alpha_i}$ — образующие, отвечающие простым корням. Подмножество $N_+^{(0)}$, допускающее представление (1.134), (1.135), открыто в N_+ . Действие алгебры Ли $\mathfrak{sp}_{2\ell}$ на N_+ , заданное в (1.10), определяет действие на пространстве функций на $N_+^{(0)}$. Следующее предложение явно описывает это действие на пространстве V_μ эквивариантных функций на $N_+^{(0)}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.8. *Следующие дифференциальные операторы определяют реализацию представления π_μ алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{sp}_{2\ell})$ на пространстве V_μ в терминах факторизационной параметризации на $N_+^{(0)}$:*

$$F_1 = \frac{\partial}{\partial y_{1,\ell}} + \sum_{n=1}^{\ell-1} \prod_{j=n}^{\ell-1} \left(\frac{y_{2,2j}}{y_{2,2j-1}} \right)^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial y_{1,n}} - \frac{\partial}{\partial y_{1,n+1}} \right\} + \sum_{n=1}^{\ell-1} \frac{y_{2,2n}}{y_{1,n+1}} \left(1 + \frac{y_{2,2n}}{y_{2,2n-1}} \right) \prod_{j=n+1}^{\ell-1} \left(\frac{y_{2,2j}}{y_{2,2j-1}} \right)^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial y_{2,2n-1}} - \frac{\partial}{\partial y_{2,2n}} \right\}, \quad (1.136)$$

$$F_k = \frac{\partial}{\partial y_{k,2(\ell+1-k)}} + \sum_{n=1}^{\ell-k} \prod_{j=n+1}^{\ell-k} \frac{y_{k+1,2j}}{y_{k+1,2j-1}} \frac{y_{k,2(j+1)-1}}{y_{k,2(j+1)}} \left\{ \frac{\partial}{\partial y_{k,2n}} - \frac{\partial}{\partial y_{k,2n+1}} \right\} + \sum_{n=1}^{\ell-k} \frac{y_{k+1,2n}}{y_{k,2(n-1)}} \prod_{j=n}^{\ell-k} \frac{y_{k+1,2j}}{y_{k+1,2j-1}} \frac{y_{k,2(j+1)-1}}{y_{k,2(j+1)}} \left\{ \frac{\partial}{\partial y_{k+1,2n-1}} - \frac{\partial}{\partial y_{k+1,2n}} \right\}$$

при $k = 2, \dots, \ell$ и

$$H_k = \langle \mu, \alpha_k^\vee \rangle + \sum_{i=1}^{\ell} a_{k,i} \sum_{j=1}^{n_i} y_{i,j} \frac{\partial}{\partial y_{i,j}}, \quad k = 1, \dots, \ell, \quad (1.137)$$

$$E_1 = \sum_{n=1}^{\ell} y_{1,n} \left\{ -\langle \mu, \alpha_1^\vee \rangle + \sum_{j=1}^{2n-3} y_{2,j} \frac{\partial}{\partial y_{2,j}} - 2 \sum_{j=1}^{n-1} y_{1,j} \frac{\partial}{\partial y_{1,j}} - y_{1,n} \frac{\partial}{\partial y_{1,n}} \right\},$$

$$E_2 = \sum_{n=1}^{2(\ell-1)} y_{2,n} \left\{ -\langle \mu, \alpha_2^\vee \rangle + 2 \sum_{j=1}^{\alpha(n)+1} y_{1,j} \frac{\partial}{\partial y_{1,j}} - 2 \sum_{j=1}^{n-1} y_{2,j} \frac{\partial}{\partial y_{2,j}} + \sum_{j=1}^{2\beta(n)-3} y_{3,j} \frac{\partial}{\partial y_{3,j}} - y_{2,n} \frac{\partial}{\partial y_{2,n}} \right\}, \quad (1.138)$$

$$E_k = \sum_{n=1}^{2(\ell+1-k)} y_{k,n} \left\{ -\langle \mu, \alpha_k^\vee \rangle + 2 \sum_{j=1}^{2\alpha(n)+1} y_{k-1,j} \frac{\partial}{\partial y_{k-1,j}} - 2 \sum_{j=1}^{n-1} y_{k,j} \frac{\partial}{\partial y_{k,j}} + \sum_{j=1}^{2\beta(n)-3} y_{k+1,j} \frac{\partial}{\partial y_{k+1,j}} - y_{k,n} \frac{\partial}{\partial y_{k,n}} \right\}, \quad k = 2, \dots, \ell, \quad (1.139)$$

где $E_i = \pi_\mu(e_i)$, $H_i = \pi_\mu(h_i)$, $F_i = \pi_\mu(f_i)$, $i = 1, \dots, \ell$, $n_1 = \ell$, $n_k = 2(\ell + 1 - k)$ при $1 < k \leq \ell$ и $\alpha(n) := [n/2]$, $\beta(n) := [(n+1)/2]$.

Доказательство дано в п. 2.4.3 части 2.

Левый и правый векторы Уиттекера определены в (1.7), (1.8) и имеют следующее выражение в факторизационной параметризации.

ЛЕММА 1.7. *Левый и правый векторы Уиттекера в факторизационной параметризации имеют вид*

$$\begin{aligned} \psi_R(y) &= \exp \left\{ - \left(\sum_{n=1}^{\ell} y_{1,n} + \sum_{k=2}^{\ell} \sum_{n=1}^{n_k} y_{k,n} \right) \right\}, \\ \psi_L(y) &= \prod_{i=1}^{\ell} \left(\prod_{n=1}^{\ell} y_{1,n} \prod_{k=2}^i \prod_{n=1}^{2(\ell+1-k)} y_{k,n} \prod_{k=i+1}^{\ell} \prod_{n=1}^{\ell+1-k} y_{k,2n-1}^2 \right)^{\langle \mu, \alpha_i^{\vee} \rangle} \\ &\quad \times \exp \left\{ - \left(\sum_{n=1}^{\ell} \frac{1}{y_{1,n}} \left(1 + \frac{y_{2,2(n-1)}}{y_{2,2(n-1)-1}} \right)^2 \prod_{i=n+1}^{\ell} \left(\frac{y_{2,2(i-1)}}{y_{2,2(i-1)-1}} \right)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{k=2}^{\ell} \sum_{n=1}^{n_k/2} \frac{1}{y_{k,2n}} \left(1 + \frac{y_{k+1,2(n-1)}}{y_{k+1,2(n-1)-1}} \right) \prod_{i=n+1}^{n_k/2} \frac{y_{k+1,2(i-1)}}{y_{k+1,2(i-1)-1}} \frac{y_{k,2i-1}}{y_{k,2i}} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (1.140)$$

где $n_1 = \ell$ и $n_k = 2(\ell + 1 - k)$ при $k = 2, \dots, \ell$.

Доказательство дано в п. 2.3.3 части 2.

Используя выражения (1.140) для левого и правого векторов, мы получаем интегральное представление для $\mathfrak{sp}_{2\ell}$ -функции Уиттекера в терминах факторизационной параметризации.

ТЕОРЕМА 1.8. *Собственные функции $\mathfrak{sp}_{2\ell}$ -цепочки Тоды допускают интегральное представление:*

$$\begin{aligned} \Psi_{\lambda_1, \dots, \lambda_{\ell}}^{C_{\ell}}(z_1, \dots, z_{\ell}) &= e^{i\lambda_1 z_1 + \dots + i\lambda_{\ell} z_{\ell}} \int_C \prod_{i=1}^{\ell} \prod_{k=1}^{n_i} \frac{dy_{i,k}}{y_{i,k}} \left(\prod_{n=1}^{\ell} y_{1,n} \prod_{k=2}^{\ell} \prod_{n=1}^{n_k/2} y_{k,2n-1}^2 \right)^{i\lambda_1} \\ &\quad \times \prod_{i=2}^{\ell} \left(\prod_{n=1}^{\ell} y_{1,n} \prod_{k=2}^i \prod_{n=1}^{n_k} y_{k,n} \prod_{k=i+1}^{\ell} \prod_{n=1}^{n_k/2} y_{k,2n-1}^2 \right)^{i(\lambda_i - \lambda_{i-1})} \\ &\quad \times \exp \left\{ - \left(\sum_{n=1}^{\ell} \frac{1}{y_{1,n}} \left(1 + \frac{y_{2,2(n-1)}}{y_{2,2(n-1)-1}} \right)^2 \prod_{i=n+1}^{\ell} \left(\frac{y_{2,2(i-1)}}{y_{2,2(i-1)-1}} \right)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{k=2}^{\ell} \sum_{n=1}^{n_k/2} \frac{1}{y_{k,2n}} \left(1 + \frac{y_{k+1,2(n-1)}}{y_{k+1,2(n-1)-1}} \right) \prod_{i=n+1}^{n_k/2} \frac{y_{k+1,2(i-1)}}{y_{k+1,2(i-1)-1}} \frac{y_{k,2i-1}}{y_{k,2i}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + e^{2z_1} \sum_{n=1}^{\ell} y_{1,n} + \sum_{k=2}^{\ell} e^{z_k - z_{k-1}} \sum_{n=1}^{n_k} y_{k,n} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (1.141)$$

где $n_1 = \ell$ и $n_k = 2(\ell + 1 - k)$ при $k = 2, \dots, \ell$. Область интегрирования $C \subset N_+$ является некомпактным подмногообразием половинной размерности, для которого подынтегральная функция экспоненциально убывает на границе и на бесконечности. В частности, в качестве C можно взять малую деформацию подмножества $\mathbb{R}_+^{\ell^2}$ в $\mathbb{C}^{\ell^2}$, обеспечивающую сходимость интеграла.

Доказательство дано в п. 2.3.3 части 2.

ПРИМЕР 1.4. При $\ell = 2$ общая формула (1.141) принимает вид

$$\begin{aligned} \Psi_{\lambda_1, \lambda_2}^{C_2}(z_1, z_2) &= e^{\imath \lambda_1 z_1 + \imath \lambda_2 z_2} \int_C \prod_{i,k=1}^2 \frac{dy_{i,k}}{y_{i,k}} (y_{1,1} y_{2,1}^2 y_{1,2})^{\imath \lambda_1} (y_{2,1} y_{1,2} y_{2,2})^{\imath \lambda_2 - \imath \lambda_1} \\ &\times \exp \left\{ - \left(\frac{1}{y_{1,1}} \left(\frac{y_{2,2}}{y_{2,1}} \right)^2 + \frac{1}{y_{1,2}} \left(\frac{y_{2,2}}{y_{2,1}} + 1 \right)^2 + \frac{1}{y_{2,2}} \right. \right. \\ &\left. \left. + e^{2z_1} (y_{1,1} + y_{1,2}) + e^{z_2 - z_1} (y_{2,1} + y_{2,2}) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (1.142)$$

1.4.2. $\mathfrak{sp}_{2\ell}$ -функция Уиттекера: модифицированная факторизационная параметризация. В этом пункте мы определяем модифицированную факторизационную параметризацию на открытом подмножестве в $N_+ \subset \mathrm{Sp}(2\ell)$. Мы используем эту параметризацию для построения интегральных представлений $\mathfrak{sp}_{2\ell}$ -функций Уиттекера. По аналогии с рассмотренными выше интегральными представлениями $\mathfrak{so}_{2\ell+1}$ -функций Уиттекера эти представления имеют простую рекурсивную структуру относительно ранга ℓ . Они могут быть описаны в сугубо комбинаторных терминах с использованием подходящих графов. Эти представления можно рассматривать как обобщение интегральных представлений Гивенталья на случай $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2\ell}$.

Мы следуем тому же подходу, который был использован в описании модифицированного факторизационного представления в случае $\mathfrak{so}_{2\ell+1}$. Имеется реализация тавтологического представления $\pi: \mathfrak{sp}_{2\ell} \rightarrow \mathrm{End}(\mathbb{C}^{2\ell})$, для которого образующие Шевалле, отвечающие борелевской (соответственно картановской) подалгебре в $\mathfrak{sp}_{2\ell}$, переходят в верхнетреугольные (соответственно диагональные) матрицы. Это определяет вложение $\mathfrak{sp}_{2\ell} \subset \mathfrak{gl}_{2\ell}$, при котором борелевская (соответственно картановская) подалгебра отображается в борелевскую (соответственно картановскую) подалгебру (см., например, [17]). Для того чтобы определить соответствующее вложение групп, рассмотрим следующую инволюцию на $\mathrm{GL}(2\ell)$:

$$g \longmapsto g^* := \dot{W}_0^{-1} (g^{-1})^t \dot{W}_0, \quad (1.143)$$

где $a \rightarrow a^t$ индуцировано стандартным транспонированием матриц и $\dot{W}_0$ – это подъем элемента максимальной длины группы Вейля $S_{2\ell}$ для $\mathfrak{gl}_{2\ell}$. В матричной форме это может быть записано как

$$\pi(\dot{W}_0) = SJ,$$

где $S = \mathrm{diag}(1, -1, \dots, 1, -1)$ и $J = \|J_{i,j}\| = \|\delta_{i+j, 2\ell+1}\|$. Тогда симплектическая группа $G = \mathrm{Sp}(2\ell)$ отождествляется со следующей подгруппой в $\mathrm{GL}(2\ell)$ (см., например, [17]):

$$\mathrm{Sp}(2\ell) = \{g \in \mathrm{GL}(2\ell) : g^* = g\}.$$

Пусть $\epsilon_{i,j}$ – элементарная $(2\ell \times 2\ell)$ -матрица с единицей на месте (i, j) и нулями на прочих местах. Рассмотрим следующие $(2\ell \times 2\ell)$ -матрицы:

$$U_n = \sum_{i=1}^{\ell} \epsilon_{i,i} + \sum_{i=1}^n e^{-x_{n,i}} \epsilon_{\ell+i, \ell+i} + \sum_{i=n+1}^{\ell} \epsilon_{\ell+i, \ell+i}, \quad (1.144)$$

$$\tilde{U}_n = U_n + e^{z_{n,1}} \epsilon_{\ell, \ell+1} + \sum_{i=1}^{n-1} e^{-z_{n-1,i}} \epsilon_{\ell+i, \ell+1+i}, \quad (1.145)$$

$$\tilde{U}'_n = U_n + \sum_{i=1}^{n-1} e^{-z_{n-1,i}} \epsilon_{\ell+i, \ell+1+i}, \quad (1.146)$$

$$V_n = \sum_{i=1}^{\ell-n} \epsilon_{i,i} + e^{-z_{n,1}} \epsilon_{\ell+1, \ell+1} + \sum_{i=1}^n e^{z_{n,i}} \epsilon_{\ell+1-i, \ell+1-i}, \quad (1.147)$$

$$\tilde{V}_n = V_n + e^{x_{n,1}} \epsilon_{\ell, \ell+1} + \sum_{i=1}^n e^{x_{n,i}} \epsilon_{\ell+1-i, \ell+2-i}, \quad (1.148)$$

$$\tilde{V}'_n = V_n + \sum_{i=1}^n e^{x_{n,i}} \epsilon_{\ell+1-i, \ell+2-i}. \quad (1.149)$$

Модифицированная факторизационная параметризация может быть определена следующим образом.

ТЕОРЕМА 1.9. (i) *Образ типичного элемента $v^{C_\ell} \in N_+^{(0)}$ при тавтологическом представлении $\pi: \mathfrak{sp}_{2\ell} \rightarrow \text{End}(\mathbb{C}^{2\ell})$ может быть представлен в виде*

$$\pi(v^{C_\ell}) = \mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2 \cdots \mathfrak{X}_\ell, \quad \mathfrak{X}_n = \pi(\mathfrak{X}_{C_{n-1}^n}), \quad n = 1, \dots, \ell, \quad (1.150)$$

где

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_1 &= 1 + e^{x_{1,1}+z_{1,1}} \epsilon_{-1, \ell}, \\ \mathfrak{X}_n &= [\tilde{U}'_n U_n^{-1}]^* \tilde{U}_n U_n^{-1} \cdot \tilde{V}_n V_n^{-1} [\tilde{V}'_n V_n^{-1}]^*, \quad n = 2, \dots, \ell, \end{aligned} \quad (1.151)$$

и $z_{\ell,k} = 0$, $k = 1, \dots, \ell$.

(ii) *Формулы (1.150), (1.151) определяют параметризацию множества полнотью неотрицательных унитарных элементов $N_+^{(0)} \subset N_+$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v^{C_\ell}(y)$ – параметризация на открытом подмножестве в N_+ из (1.134), (1.135). Рассмотрим унитарные элементы $\tilde{X}_k(y) = e^{y \epsilon_{\ell+1-k, \ell+2-k}}$, $k = 1, \dots, \ell$, в $\text{GL}(2\ell)$ и действие инволюции $*$, заданное правилом:

$$\tilde{X}_1(y)^* = \tilde{X}_1(y), \quad \tilde{X}_i(y)^* = \tilde{X}_{\ell+i}(y), \quad i = 2, \dots, \ell.$$

Вложим элементарные унитарные подгруппы $X_i(y)$ из $\text{Sp}(2\ell)$ в $\text{GL}(2\ell)$ следующим образом:

$$X_1(y) = \tilde{X}_1(y), \quad X_i(y) = \tilde{X}_i(y)^* \tilde{X}_i(y), \quad i = 2, \dots, \ell.$$

Тем самым, произвольный регулярный унитарный элемент v^{C_ℓ} вложен в унитарную подгруппу группы $\text{GL}(2\ell)$. Произведем следующую замену переменных:

$$\begin{aligned} y_{1,1} &= e^{x_{1,1}+z_{1,1}}, \\ y_{1,k} &= e^{z_{k-1,1}+x_{k,1}} + e^{z_{k,1}+x_{k,1}}, \quad k = 2, \dots, \ell, \\ y_{k,2r-1} &= e^{x_{k+r-1,k} - z_{k+r-2,k-1}}, \quad r = 1, \dots, \ell+1-k, \\ y_{k,2r} &= e^{x_{k+r-1,k} - z_{k+r-1,k-1}}. \end{aligned} \quad (1.152)$$

Здесь $z_{\ell,k} = 0$ при $k = 1, \dots, \ell$.

Несложно проверить, что после замены переменных (1.152) образ $\pi(v^{C_\ell})$ элемента v^{C_ℓ} , определенный в (1.134), (1.135), преобразуется в (1.150), (1.151). Учитывая, что замена переменных обратима (1.152), мы получаем параметризацию на $N_+^{(0)} \subset N_+$. Теорема 1.9 доказана.

Модифицированная факторизационная параметризация на унитарной группе N_+ определяет специальную реализацию представления основной серии алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{sp}_{2\ell})$ дифференциальными операторами. Ее можно получить, используя замену переменных (1.152) в реализации из предложения 1.8. Мы будем называть эту реализацию представления алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{sp}_{2\ell})$ представлением Гаусса–Гивенталья.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.9. *Следующие дифференциальные операторы определяют представление π_μ алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{sp}_{2\ell})$ в пространстве V_μ в терминах модифицированной факторизационной параметризации:*

$$F_1 = \sum_{n=1}^{2\ell-1} e^{z\beta(n),1-x_{\alpha(n)+1,1}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_{1,1}} + \sum_{k=2}^{\beta(n)} \left(\frac{\partial}{\partial x_{k,1}} - \frac{\partial}{\partial x_{k,2}} \right) - \sum_{k=1}^{\alpha(n)} \frac{\partial}{\partial z_{k,1}} \right\}, \quad (1.153)$$

$$\begin{aligned} F_2 = & - \sum_{n=1}^{2\ell-3} e^{z\beta(n)+1,2-x_{\alpha(n)+2,2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_{1,1}} - \frac{\partial}{\partial z_{1,1}} \right. \\ & + \sum_{k=1}^{\beta(n)} \left(\frac{\partial}{\partial x_{k+1,1}} - \frac{\partial}{\partial x_{k+2,2}} + (1-\delta_{n,1}) \frac{\partial}{\partial x_{k+1,3}} \right) \\ & \left. - \sum_{k=1}^{\alpha(n)} \left(\frac{\partial}{\partial z_{k+1,1}} - \frac{\partial}{\partial z_{k+2,2}} \right) + (-1)^n \frac{e^{z\beta(n)+1,1}}{e^{x_{\alpha(n)+1,1} + x_{\alpha(n)+2,1}}} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha(n)+2,1}} \right\}, \end{aligned} \quad (1.154)$$

$$\begin{aligned} F_k = & \sum_{2(\ell-k)+1} e^{z\beta(n)+k-1,k-x_{\alpha(n)+k,k}} \left\{ \frac{\partial}{\partial z_{k-1,k-1}} + \frac{\partial}{\partial x_{k,k}} \right. \\ & + \sum_{m=1}^{\alpha(n)} \left(\frac{\partial}{\partial z_{k-1+m,k-1}} - \frac{\partial}{\partial z_{k-1+m,k}} \right) \\ & \left. + \sum_{m=1}^{\beta(n)} \left(\frac{\partial}{\partial x_{k-1+m,k}} - \frac{\partial}{\partial x_{k-1+m,k+1}} \right) \right\}, \quad k = 3, \dots, \ell, \end{aligned} \quad (1.155)$$

$$H_k = \langle \mu, \alpha_k^\vee \rangle + \sum_{n=1}^{\ell} a_{k,n} \sum_{i=n}^{\ell} \frac{\partial}{\partial x_{i,n}}, \quad k = 1, \dots, \ell, \quad (1.156)$$

$$E_1 = - \sum_{n=1}^{2\ell-1} e^{z\beta(n),1+x_{\alpha(n)+1,1}} \left\{ \mu_1 + \sum_{k=1}^{\beta(n)} \frac{\partial}{\partial x_{k,1}} + \sum_{k=1}^{\alpha(n)} \frac{\partial}{\partial z_{k,1}} \right\}, \quad (1.157)$$

$$\begin{aligned} E_2 = & \sum_{n=1}^{2\ell-2} e^{x\beta(n)+1,2-z_{\alpha(n)+1,1}} \left\{ \mu_1 - \mu_2 + \frac{\partial}{\partial x_{1,1}} + \frac{\partial}{\partial z_{1,1}} \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^{\alpha(n)} \left(\frac{\partial}{\partial x_{k+1,1}} - \frac{\partial}{\partial x_{k+2,2}} \right) + \sum_{k=1}^{\beta(n)-1} \left(\frac{\partial}{\partial z_{k+1,1}} - \frac{\partial}{\partial z_{k+2,2}} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (1.158)$$

$$\begin{aligned}
 E_k = & \sum_{n=1}^{2(\ell+1-k)} e^{x_{\beta(n)+k-1,k} - z_{\beta(n)+k-1,k-1}} \left\{ \langle \mu, \alpha_k^\vee \rangle + \frac{\partial}{\partial x_{k-1,k-1}} + \frac{\partial}{\partial z_{k-1,k-1}} \right. \\
 & + \sum_{m=1}^{\alpha(n)} \left(\frac{\partial}{\partial x_{k-1+m,k-1}} - \frac{\partial}{\partial x_{k-1+m,k}} \right) \\
 & \left. + \sum_{m=2}^{\beta(n)} \left(\frac{\partial}{\partial z_{k-2+m,k-1}} - \frac{\partial}{\partial z_{k-2+m,k}} \right) \right\}, \quad k = 3, \dots, \ell. \quad (1.159)
 \end{aligned}$$

Здесь $z_{\ell,i} = 0$, $i = 1, \dots, \ell$, и дифференцирования над $x_{i,k}$, $z_{i,k}$, $i < k$, опущены. Мы используем обозначения $E_i = \pi_\mu(e_i)$, $F_i = \pi_\mu(f_i)$, $H_i = \pi_\mu(h_i)$, $i = 1, \dots, \ell$, и $\alpha(n) := [n/2]$, $\beta(n) := [(n+1)/2]$.

Сейчас мы получим явное выражение матричного элемента (1.12), использующее определенное выше представление Гаусса–Гивенталья. Векторы Уиттекера ψ_R и ψ_L в этом представлении удовлетворяют системе дифференциальных уравнений (1.7) и (1.8). Найдем общий вид их решений. Используя явную замену переменных (1.152), мы получаем выражения для векторов Уиттекера в модифицированной факторизационной параметризации.

ЛЕММА 1.8. *Имеют место следующие выражения для левого и правого векторов Уиттекера:*

$$\begin{aligned}
 \psi_R = \exp \left\{ -e^{x_{1,1}+z_{1,1}} - \sum_{n=2}^{\ell} (e^{z_{n-1,1}+x_{n,1}} + e^{z_{n,1}+x_{n-1,1}}) \right. \\
 \left. - \sum_{k=2}^{\ell} \sum_{n=k}^{\ell} (e^{x_{n,k}-z_{n-1,k-1}} + e^{x_{n,k}-z_{n,k-1}}) \right\}, \quad (1.160)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \psi_L = e^{\mu_1 z_{1,1}} \prod_{n=2}^{\ell} (e^{z_{n,1}} + e^{z_{n-1,1}})^{\mu_n} \\
 \times \prod_{n=1}^{\ell} \exp \left\{ -\mu_n \left(\sum_{i=1}^n z_{n,i} - x_{n,1} - 2 \sum_{i=2}^n x_{n,i} + \sum_{i=1}^{n-1} z_{n-1,i} \right) \right\} \\
 \times \exp \left\{ - \sum_{k=1}^{\ell} \left(e^{z_{k,k}-x_{k,k}} + \sum_{n=k+1}^{\ell} e^{z_{n-1,k}-x_{n,k}} + e^{z_{n,k}-x_{n,k}} \right) \right\}, \quad (1.161)
 \end{aligned}$$

где $z_{\ell,k} = 0$ и $\mu_k = \imath \lambda_k - \rho_k$, $\rho_k = k$ при $k = 1, \dots, \ell$.

Мы готовы указать интегральное представление для спаривания (1.12) в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2\ell}$. Чтобы получить явное выражение для подынтегральной функции, мы используем разложение элемента максимального тора, как и для алгебр $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$ и $\mathfrak{so}_{2\ell+1}$, рассмотренных в предыдущих разделах:

$$e^{-H_z} = \pi_\lambda \left(\exp \left(- \sum_{i=1}^{\ell} \langle \omega_i, z \rangle h_i \right) \right) = e^{H_L} e^{H_R},$$

где

$$-H_z = H_L + H_R = -\langle \mu, z_\ell \rangle - 2z_{\ell,1} \sum_{n=1}^{\ell} \frac{\partial}{\partial x_{n,1}} + \sum_{k=1}^{\ell-1} (z_{\ell,i} - z_{\ell,i+1}) \sum_{n=k}^{\ell} \frac{\partial}{\partial x_{n,k}} \quad (1.162)$$

и

$$H_L = \sum_{k=1}^{\ell} z_{\ell,k} \left(\sum_{n=k}^{\ell-1} \frac{\partial}{\partial z_{n,k}} + \sum_{n=k}^{\ell} \frac{\partial}{\partial x_{n,k}} \right), \quad (1.163)$$

$$H_R = -\langle \mu, z_\ell \rangle - \sum_{k=1}^{\ell-1} z_{\ell,k} \left(\sum_{n=k}^{\ell} \frac{\partial}{\partial x_{n,k}} - \sum_{n=k}^{\ell-1} \frac{\partial}{\partial z_{n,k}} - \sum_{n=k+1}^{\ell} \frac{\partial}{\partial x_{n,k+1}} \right). \quad (1.164)$$

Мы считаем, что H_L действует на левом векторе и H_R действует на правом векторе в (1.12). С учетом леммы 1.8 мы приходим к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 1.10. *Собственные функции $\mathfrak{sp}_{2\ell}$ -цепочки Тоды (1.12) допускают интегральное представление*

$$\Psi_{\lambda_1, \dots, \lambda_\ell}^{C_\ell}(z_1, \dots, z_\ell) = \int_C \prod_{k=1}^{\ell-1} dz_k \prod_{k=1}^{\ell} dx_k e^{\mathcal{F}^{C_\ell}}, \quad (1.165)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{C_\ell} = & i\lambda_1 z_{1,1} - \sum_{n=2}^{\ell} i\lambda_n \left(\sum_{i=1}^n z_{n,i} - x_{n,1} - 2 \sum_{i=2}^n x_{n,i} \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^{n-1} z_{n-1,i} - \ln(e^{z_{n,1}} + e^{z_{n-1,1}}) \right) \\ & - \left\{ \sum_{k=1}^{\ell} \left(e^{z_{k,k} - x_{k,k}} + \sum_{n=k+1}^{\ell} e^{z_{n-1,k} - x_{n,k}} + e^{z_{n,k} - x_{n,k}} \right) + e^{x_{1,1} + z_{1,1}} \right. \\ & \left. + \sum_{n=2}^{\ell} (e^{z_{n-1,1} + x_{n,1}} + e^{z_{n,1} + x_{n,1}}) + \sum_{k=2}^{\ell} \sum_{n=k}^{\ell} (e^{x_{n,k} - z_{n-1,k-1}} + e^{x_{n,k} - z_{n,k-1}}) \right\} \end{aligned} \quad (1.166)$$

и мы полагаем $z_i := z_{\ell,i}$, $1 \leq i \leq \ell$. Здесь $C \subset N_+$ – некомпактное подмногообразие половинной размерности, для которого подынтегральные выражения экспоненциально убывают на границе и на бесконечности. В частности, в качестве области интегрирования можно взять малую деформацию подпространства $\mathbb{R}^{\ell^2} \subset \mathbb{C}^{\ell^2}$, обеспечивающую сходимость интеграла.

Заметим, что интеграл (1.165), (1.166) можно получить из (1.141) следующей подстановкой:

$$\begin{aligned} y_{1,1} &= e^{-2z_{\ell,1}} e^{x_{1,1} + z_{1,1}}, \\ y_{1,k} &= e^{-2z_{\ell,1}} (e^{z_{k-1,1} + x_{k,1}} + e^{z_{k,1} + x_{k,1}}), & k = 2, \dots, \ell, \\ y_{k,2r-1} &= e^{-2z_{\ell,k-1} - z_{\ell,k}} e^{x_{k+r-1,k} - z_{k+r-2,k-1}}, & r = 1, \dots, \ell + 1 - k, \\ y_{k,2r} &= e^{-2z_{\ell,k-1} - z_{\ell,k}} e^{x_{k+r-1,k} - z_{k+r-1,k-1}}. \end{aligned} \quad (1.167)$$

ПРИМЕР 1.5. При $\ell = 2$ общая формула (1.165) принимает вид

$$\begin{aligned} \Psi_{\lambda_1, \lambda_2}^{C_2}(z_1, z_2) = & \int_C dx_{1,1} dx_{2,1} dx_{2,2} dz_{1,1} (e^{z_{1,1}} + e^{z_{2,1}})^{i\lambda_2} \\ & \times \exp \{ i\lambda_1 x_{1,1} - i\lambda_2 (z_{2,1} + z_{2,2} - (x_{2,1} + 2x_{2,2}) + z_{1,1}) \\ & - (e^{z_{1,1}-x_{1,1}} + e^{x_{1,1}+z_{1,1}} + e^{z_{1,1}-x_{2,1}} + e^{z_{1,1}+x_{2,1}} + e^{z_{2,2}-x_{2,2}} \\ & + e^{z_{2,1}-x_{2,1}} + e^{z_{1,1}+x_{2,1}} + e^{x_{2,2}-z_{1,1}} + e^{x_{2,2}-z_{2,1}}) \}, \end{aligned} \quad (1.168)$$

где $z_1 = z_{2,1}$, $z_2 = z_{2,2}$.

Имеется простое комбинаторное описание потенциала $\mathcal{F}^{C_\ell}$ на нулевом уровне спектра $\{\lambda_i = 0\}$. А именно, он может быть представлен как сумма по всем стрелкам на следующей диаграмме:

Мы используем то же правило сопоставления переменных стрелкам диаграммы, что и для случая A_ℓ . В дополнение мы сопоставляем символу $z \xrightarrow{\times} x$ экспоненту e^{z+x} .

Заметим, что диаграмма C_ℓ может быть получена факторизацией диаграммы для $A_{2\ell-1}$. Рассмотрим инволюцию

$$*: X \longmapsto -\dot{W}_0^{-1} X^t \dot{W}_0, \quad (1.169)$$

где $\dot{W}_0$ – подъем элемента максимальной длины группы Вейля $S_{2\ell}$ и X^t – стандартное транспонирование. Соответствующее действие на модифицированных параметрах факторизации имеет вид

$$*: x_{k,i} \longmapsto -x_{k,k+1-i}. \quad (1.170)$$

Это определяет факторизацию $A_{2\ell-1}$ -диаграммы, которая приводит к диаграмме для C_ℓ .

Несложно выписать C_ℓ -аналог соотношений (1.52). Рассмотрим переменные

$$\begin{aligned} a_{n,1} &= e^{x_{n,1}+z_{n-1,1}}, & a_{n,i} &= e^{x_{n,i}-z_{n-1,i-1}}, & 2 \leq i \leq n \leq \ell; \\ b_{k,1} &= e^{x_{k,1}+z_{k,1}}, & k &= 1, \dots, \ell; & b_{n,i} &= e^{z_{n,i}-x_{n,i-1}}, & 2 \leq i \leq n \leq \ell; \\ c_{k,i} &= e^{z_{k,i}-x_{k,i}}, & 1 \leq i \leq k \leq \ell; \\ d_{m,j} &= e^{z_{m,j}-x_{m+1,j}}, & 1 \leq j \leq m < \ell. \end{aligned} \quad (1.171)$$

Тогда имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} c_{k,i}b_{k,i} &= d_{k,i}a_{k+1,i}, & a_{k,i}d_{k-1,i-1} &= b_{k,i}c_{k,i-1}, & 1 \leq i \leq k < \ell; \\ b_{\ell,1}c_{\ell,1} &= e^{2z_{\ell,1}}, & c_{\ell,i}b_{\ell,i} &= e^{z_{\ell,i}-z_{\ell,i-1}}, & i = 2, \dots, \ell. \end{aligned} \quad (1.172)$$

Эти равенства можно рассматривать как соотношения между элементарными путями на диаграмме Гивенталья. Используя соотношения для более общих путей, которые следуют из (1.172), мы можем определить торическое вырождение C_ℓ -многообразий флагов, что обобщает результаты работ [5], [19]. Заметим, что указанная диаграмма совпадает с диаграммой Гельфанда–Цейтлина для алгебры Ли $\mathfrak{sp}_{2\ell}$.

1.4.3. *Рекурсия для $\mathfrak{sp}_{2\ell}$ -функций Уиттекера и $\mathcal{Q}$ -оператор для $A_{2\ell-1}^{(2)}$ -цепочки Тоды.* Интегральное представление (1.165), (1.166) для $\mathfrak{sp}_{2\ell}$ -функций Уиттекера обладает рекурсивной структурой относительно ранга ℓ . При $n = 2, \dots, \ell$ определим интегральные операторы $Q_{C_{n-1}}^{C_n}$ с интегральными ядрами

$$\begin{aligned} Q_{C_{n-1}}^{C_n}(z_n, z_{n-1}; \lambda_n) &= \int d\underline{x}_n Q_{D_n}^{C_n}(z_n, \underline{x}_n) Q_{C_{n-1}}^{D_n}(\underline{x}_n, z_{n-1}) (e^{z_{n,1}} + e^{z_{n-1,1}})^{i\lambda_n} \\ &\times \exp \left\{ -i\lambda_n \left(\sum_{i=1}^n z_{n,i} - x_{n,1} - 2 \sum_{i=2}^n x_{n,i} + \sum_{i=1}^{n-1} z_{n-1,i} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (1.173)$$

где

$$Q_{C_{n-1}}^{D_n}(\underline{x}_n, z_{n-1}) = \exp \left\{ -e^{x_{n,1}+z_{n-1,1}} - \sum_{i=1}^{n-1} (e^{z_{n-1,i}-x_{n,i}} + e^{x_{n,i+1}-z_{n-1,i}}) \right\}, \quad (1.174)$$

$$Q_{D_n}^{C_n}(z_n, \underline{x}_n) = \exp \left\{ -e^{x_{n,1}+z_{n,1}} - \sum_{i=1}^{n-1} (e^{z_{n,i}-x_{n,i}} + e^{x_{n,i+1}-z_{n,i}}) - e^{z_{n,n}-x_{n,n}} \right\}. \quad (1.175)$$

При $n = 1$ положим

$$Q_{C_0}^{C_1} = \int dx_{1,1} e^{i\lambda_1 x_{1,1}} \exp \{ -(e^{x_{1,1}+z_{1,1}} + e^{z_{1,1}-x_{1,1}}) \}.$$

Используя операторы $Q_{C_{n-1}}^{C_n}$, интегральное представление для $\mathfrak{sp}_{2\ell}$ -функции Уиттекера можно записать в рекурсивной форме.

ТЕОРЕМА 1.11. *Интегральные представления для собственных функций $\mathfrak{sp}_{2\ell}$ -цепочки Тоды (1.165) имеют вид*

$$\Psi_{\lambda_1, \dots, \lambda_\ell}^{C_\ell}(z_1, \dots, z_\ell) = \int_C \prod_{k=1}^{\ell-1} dz_k \prod_{n=1}^{\ell} Q_{C_{n-1}}^{C_n}(z_n, z_n; \lambda_n), \quad (1.176)$$

или, эквивалентно,

$$\Psi_{\lambda_1, \dots, \lambda_\ell}^{C_\ell}(\tilde{z}_\ell) = \int_{\mathcal{C}_\ell} d\tilde{z}_{\ell-1} Q_{C_{\ell-1}}^{C_\ell}(\tilde{z}_\ell, \tilde{z}_{\ell-1}; \lambda_\ell) \Psi_{\lambda_1, \dots, \lambda_{\ell-1}}^{C_{\ell-1}}(\tilde{z}_{\ell-1}). \quad (1.177)$$

Здесь $z_i := z_{\ell,i}$, $i = 1, \dots, \ell$, и $C \subset N_+$ – некомпактное подмногообразие положительной размерности, для которого подынтегральное выражение экспоненциально убывает на границе и на бесконечности.

Эта рекурсивная форма интегрального представления аналогична случаю $\mathfrak{so}_{2\ell+1}$. Но в отличие от $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$ -случая (1.54), ее рекурсивное ядро $Q_{C_{n-1}}^{C_n}$ задано нетривиальным интегралом. Подобно $\mathfrak{so}_{2\ell+1}$ -функции Уиттекера, при рассмотрении функции Уиттекера на нулевом уровне спектра $\{\lambda_i = 0\}$ возникает новая структура. Как следует из (1.173), ядра $Q_{C_{n-1}}^{C_n}$ при $\lambda_n = 0$ задаются свертками ядер $Q_{D_n}^{C_n}(z_n, \underline{x}_n)$ и $Q_{C_{n-1}}^{D_n}(\underline{x}_n, z_{n-1})$. Соответствующие интегральные операторы $Q_{D_n}^{C_n}$, $Q_{C_{n-1}}^{D_n}$ можно рассматривать как элементарные сплетающие операторы, связывающие гамильтонианы цепочек Тоды для систем корней типов C_n , D_n и D_n , C_{n-1} соответственно. Например, легко проверяются сплетающие соотношения для квадратичных гамильтонианов. В самом деле, D_ℓ -цепочка Тоды имеет следующие квадратичные гамильтонианы (более подробное обсуждение можно найти в п. 2.4.3):

$$\mathcal{H}_2^{D_\ell}(\underline{x}^{(\ell)}) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\ell} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + e^{x_1+x_2} + \sum_{i=1}^{\ell-1} e^{x_{i+1}-x_i}. \quad (1.178)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.10. *Интегральные операторы $Q_{C_{n-1}}^{C_n}$, $Q_{D_n}^{C_n}$ и $Q_{C_{n-1}}^{D_n}$ удовлетворяют следующим соотношениям.*

1. *Операторы $Q_{D_n}^{C_n}$ и $Q_{C_{n-1}}^{D_n}$ сплетают квадратичные гамильтонианы C - и D -цепочек Тоды:*

$$\mathcal{H}_2^{D_n}(\underline{x}_n) Q_{C_{n-1}}^{D_n}(\underline{x}_n, z_{n-1}) = Q_{C_{n-1}}^{D_n}(\underline{x}_n, z_{n-1}) \mathcal{H}_2^{C_{n-1}}(\underline{x}_{n-1}), \quad (1.179)$$

$$\mathcal{H}_2^{C_n}(z_n) Q_{D_n}^{C_n}(z_n, \underline{x}_n) = Q_{D_n}^{C_n}(z_n, \underline{x}_n) \mathcal{H}_2^{D_n}(\underline{x}_n). \quad (1.180)$$

2. *Оператор $Q_{C_{n-1}}^{C_n}$ при $\lambda_n = 0$ сплетает гамильтонианы $\mathcal{H}_2^{C_n}$ и $\mathcal{H}_2^{C_{n-1}}$:*

$$\mathcal{H}_2^{C_n}(z_n) Q_{C_{n-1}}^{C_n}(z_n, z_{n-1}) = Q_{C_{n-1}}^{C_n}(z_n, z_{n-1}) \mathcal{H}_2^{C_{n-1}}(z_{n-1}). \quad (1.181)$$

Интегральное ядро оператора $Q_{C_{n-1}}^{C_n}$ может быть задано следующей диаграммой:

Здесь верхняя (нижняя) граница ориентированной диаграммы отвечает ядрам элементарных сплетающих операторов $Q_{D_n}^{C_n}$ ($Q_{C_{n-1}}^{D_n}$) и свертка двух ядер определяется интегрированием по переменным $x_{n,1}, \dots, x_{n,n}$ на диагонали диаграммы.

Подобно случаям $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$ и $\mathfrak{sp}_{2\ell}$, операторы рекурсии $Q_{C_{n-1}}^{C_n}$ можно рассматривать как вырождения $\mathcal{Q}$ -операторов Бакстера для скрученной аффинной $A_{2\ell-1}^{(2)}$ -цепочки Тоды, которая определяется ниже. Подчеркнем, что до настоящего момента $\mathcal{Q}$ -операторы для $A_{2\ell-1}^{(2)}$ не были известны. Мы не будем выписывать здесь полный набор характеристических свойств введенных $\mathcal{Q}$ -операторов и ограничимся рассмотрением коммутационных соотношений для гамильтонианов квадратичных аффинных цепочек Тоды. Подробное обсуждение этого вопроса будет дано в другом месте.

Начнем с описания $A_{2\ell-1}^{(2)}$ -цепочек Тоды. Множество простых корней аффинной системы корней $A_{2\ell-1}^{(2)}$ можно записать в ортонормированном базисе $\{\epsilon_i, i = 1, \dots, \ell\}$ пространства $\mathbb{R}^\ell$ следующим образом:

$$\alpha_1 = 2\epsilon_1, \quad \alpha_{i+1} = \epsilon_{i+1} - \epsilon_i, \quad 1 \leq i \leq \ell - 1, \quad \alpha_{\ell+1} = -\epsilon_\ell - \epsilon_{\ell-1}. \quad (1.182)$$

Соответствующая диаграмма Дынкина имеет вид

Эти корневые данные позволяют определить аффинную $A_{2\ell-1}^{(2)}$ -цепочку Тоды с квадратичным гамильтонианом

$$\mathcal{H}_2^{A_{2\ell-1}^{(2)}}(\underline{z}^{(\ell)}) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\ell} \frac{\partial^2}{\partial z_i^2} + 2e^{2z_1} + \sum_{i=1}^{\ell-1} e^{z_{i+1}-z_i} + g e^{-z_{\ell-1}-z_\ell}, \quad (1.183)$$

где g – произвольный параметр.

Определим $\mathcal{Q}$ -оператор Бакстера $A_{2\ell-1}^{(2)}$ -цепочки Тоды как интегральный оператор с интегральным ядром

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{A_{2\ell-1}^{(2)}}^{A_{2\ell-1}^{(2)}}(\underline{z}^{(\ell)}, \underline{y}^{(\ell)}; \lambda) &= \int d\underline{x}^{(\ell)} Q_{A_{2\ell-1}^{(2)}}^{A_{2\ell-1}^{(2)}}(\underline{z}^{(\ell)}, \underline{x}^{(\ell)}) Q_{A_{2\ell-1}^{(2)}}^{A_{2\ell-1}^{(2)}}(\underline{x}^{(\ell)}, \underline{y}^{(\ell)}) \\ &\times \exp \left\{ -i\lambda \left(\sum_{i=1}^{\ell} z_i - x_1 - 2 \sum_{i=2}^{\ell} x_i + \sum_{i=1}^{\ell} y_i \right) \right\} (e^{z_1} + e^{y_1})^{i\lambda} (e^{-z_\ell} + e^{-y_\ell})^{-2i\lambda}, \end{aligned} \quad (1.184)$$

где

$$Q_{A_{2\ell-1}^{(2)}}^{A_{2\ell-1}^{(2)}}(\underline{z}^{(\ell)}, \underline{x}^{(\ell)}) = \exp \left\{ -e^{z_1+x_1} - \sum_{i=1}^{\ell-1} (e^{z_i-x_i} + e^{x_{i+1}-z_i}) - e^{z_\ell-x_\ell} - g e^{-z_\ell-x_\ell} \right\}, \quad (1.185)$$

$$Q_{A_{2\ell-1}^{(2)}}^{A_{2\ell-1}^{(2)}}(\underline{x}^{(\ell)}, \underline{y}^{(\ell)}) = \exp \left\{ -e^{y_1+x_1} - \sum_{i=1}^{\ell-1} (e^{y_i-x_i} + e^{x_{i+1}-y_i}) - e^{y_\ell-x_\ell} - g e^{-y_\ell-x_\ell} \right\}. \quad (1.186)$$

Здесь мы используем обозначения $\underline{z}^{(\ell)} = (z_1, \dots, z_\ell)$, $\underline{y}^{(\ell)} = (y_1, \dots, y_\ell)$.

Следующее утверждение может быть проверено непосредственно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.11. *$\mathcal{Q}$ -оператор (1.184) коммутирует с квадратичным гамильтонианом $A_{2\ell-1}^{(2)}$ -цепочки. Тогда:*

$$\mathcal{H}^{A_{2\ell-1}^{(2)}}(\underline{z}^{(\ell)}) Q_{A_{2\ell-1}^{(2)}}^{A_{2\ell-1}^{(2)}}(\underline{z}^{(\ell)}, \underline{y}^{(\ell)}) = Q_{A_{2\ell-1}^{(2)}}^{A_{2\ell-1}^{(2)}}(\underline{z}^{(\ell)}, \underline{y}^{(\ell)}) \mathcal{H}^{A_{2\ell-1}^{(2)}}(\underline{y}^{(\ell)}). \quad (1.187)$$

Покажем, что оператор рекурсии $Q_{C_{\ell-1}}^{C_\ell}$ может быть получен вырождением $\mathcal{Q}$ -оператора Бакстера для $A_{2\ell-1}^{(2)}$. Рассмотрим несколько модифицированный оператор рекурсии $Q_{C_{\ell-1} \oplus C_1}^{C_\ell}$ с ядром

$$Q_{C_{\ell-1} \oplus C_1}^{C_\ell}(\underline{z}^{(\ell)}, \underline{y}^{(\ell)}; \lambda) := e^{i\lambda y_\ell} Q_{C_{\ell-1}}^{C_\ell}(\underline{z}^{(\ell)}, \underline{y}^{(\ell-1)}; \lambda),$$

где $\underline{y}^{(\ell-1)} = (y_1, \dots, y_{\ell-1})$. Так определенный оператор сплетает гамильтонианы $\mathfrak{sp}_{2\ell}$ - и $\mathfrak{sp}_{2\ell-2} \oplus \mathfrak{sp}_2$ -цепочек. Тогда. Тем самым, для квадратичных гамильтонианов мы имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_2^{C_\ell}(\underline{z}^{(\ell)}) Q_{C_{\ell-1} \oplus C_1}^{C_\ell}(\underline{z}^{(\ell)}, \underline{y}^{(\ell)}; \lambda) &= Q_{C_{\ell-1} \oplus C_1}^{C_\ell}(\underline{z}^{(\ell)}, \underline{y}^{(\ell)}; \lambda) \\ &\quad \times (\mathcal{H}_2^{C_\ell}(\underline{y}^{(\ell-1)}) + \mathcal{H}_2^{C_1}(y_\ell)), \end{aligned}$$

где $\mathcal{H}_2^{C_1}(y_\ell) = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y_\ell^2}$. Очевидно, что проекция указанного выше уравнения на подпространство функций $F(\underline{y}^{(\ell)}) = \exp(i\lambda y_\ell) f(\underline{y}^{(\ell-1)})$ приводит к исходному оператору рекурсии, удовлетворяющему условиям

$$\mathcal{H}_2^{C_\ell}(\underline{z}^{(\ell)}) Q_{C_{\ell-1}}^{C_\ell}(\underline{z}^{(\ell)}, \underline{y}^{(\ell-1)}; \lambda) = Q_{C_{\ell-1}}^{C_\ell}(\underline{z}^{(\ell)}, \underline{y}^{(\ell-1)}; \lambda) \left(\mathcal{H}_2^{C_\ell}(\underline{y}^{(\ell-1)}) + \frac{1}{2} \lambda^2 \right). \quad (1.188)$$

Рассмотрим однопараметрическое семейство ядер:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{A_{2\ell-1}^{(2)}}^{A_{2\ell-1}^{(2)}}(\underline{z}^{(\ell)}, \underline{y}^{(\ell)}; \lambda; \varepsilon) &= \varepsilon^{i\lambda} e^{i\lambda y_\ell} \int d\underline{x}^{(\ell+1)} Q_{A_{2\ell-1}^{(2)}}^{A_{2\ell-1}^{(2)}}(\underline{z}^{(\ell)}, \underline{x}^{(\ell+1)}) Q_{A_{2\ell-1}^{(2)}}^{A_{2\ell-1}^{(2)}}(\underline{x}^{(\ell+1)}, \underline{y}^{(\ell)}; \varepsilon) \\ &\quad \times \exp \left\{ -i\lambda \left(\sum_{i=1}^{\ell} z_i - x_1 - 2 \sum_{i=2}^{\ell} x_i + \sum_{i=1}^{\ell-1} y_i \right) \right\} (e^{z_1} + e^{y_1})^{i\lambda} (\varepsilon e^{y_\ell - z_\ell} + 1)^{-2i\lambda}, \end{aligned} \quad (1.189)$$

где

$$\begin{aligned} Q_{A_{2\ell-1}^{(2)}}^{A_{2\ell-1}^{(2)}}(\underline{x}^{(\ell+1)}, \underline{y}^{(\ell)}; \varepsilon) &= \exp \left\{ -e^{y_1+x_1} - \sum_{i=1}^{\ell-1} (e^{y_i-x_i} + e^{x_{i+1}-y_i}) \right. \\ &\quad \left. - \varepsilon e^{y_\ell-x_\ell} - \varepsilon^{-1} g e^{-y_\ell-x_\ell} \right\}, \end{aligned} \quad (1.190)$$

получено сдвигом переменной $y_\ell = y_\ell + \ln \varepsilon$ в (1.184)–(1.186). Тогда выполнено следующее соотношение между $\mathcal{Q}$ -оператором для $A_{2\ell-1}^{(2)}$ -цепочки Тоды и оператором рекурсии для $\mathfrak{sp}_{2\ell}$ -функции Уиттекера:

$$Q_{C_{\ell-1} \oplus C_1}^{C_\ell}(z^{(\ell)}, \underline{y}^{(\ell)}; \lambda) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0, \\ \varepsilon^{-1}g \rightarrow 0}} \varepsilon^{-i\lambda} \mathcal{Q}^{A_{2\ell-1}^{(2)}}(z^{(\ell)}, \underline{y}^{(\ell)}; \lambda; \varepsilon). \quad (1.191)$$

1.5. Интегральные представления собственных функций $\mathfrak{so}_{2\ell}$ -цепочки Тоды. В этом разделе мы получим аналог интегрального представления Гивенталья функций Уиттекера для алгебр Ли $\mathfrak{so}_{2\ell}$. Как и в рассмотренных выше случаях, мы начнем с интегрального представления $\mathfrak{so}_{2\ell}$ -функций Уиттекера, использующего факторизационную параметризацию. Затем мы определяем модификацию факторизационной параметризации, которая приводит к интегральным представлениям типа Гивенталья для $\mathfrak{so}_{2\ell}$ -функций Уиттекера.

Рассмотрим систему корней D_ℓ , которая отвечает алгебре Ли $\mathfrak{so}_{2\ell}$. Пусть $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_\ell\}$ – ортонормированный базис в $\mathbb{R}^\ell$. Мы реализуем простые корни и фундаментальные веса для системы корней D_ℓ как следующие векторы в $\mathbb{R}^\ell$:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \epsilon_2 - \epsilon_1, & \omega_1 &= \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 + \dots + \epsilon_\ell), \\ \alpha_2 &= \epsilon_2 + \epsilon_1, & \omega_2 &= \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \dots + \epsilon_\ell), \\ \alpha_3 &= \epsilon_3 - \epsilon_2, & \omega_3 &= \epsilon_3 + \dots + \epsilon_\ell, \\ \dots & & \dots & \\ \alpha_n &= \epsilon_\ell - \epsilon_{\ell-1}, & \omega_\ell &= \epsilon_\ell. \end{aligned} \quad (1.192)$$

Кокорни $\alpha_i^\vee$ можно отождествить с соответствующими корнями α_i , используя стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^\ell$. Свяжем с этими корневыми данными $\mathfrak{so}_{2\ell}$ -цепочку Тоды с квадратичным гамильтонианом

$$\mathcal{H}_2^{D_\ell} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\ell} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + e^{x_1+x_2} + \sum_{i=1}^{\ell-1} e^{x_{i+1}-x_i}. \quad (1.193)$$

Можно дополнить (1.193) до полного набора из ℓ попарно коммутирующих функционально независимых гамильтонианов $\mathcal{H}_k^{D_\ell}$ для $\mathfrak{so}_{2\ell}$ -цепочки Тоды. Мы хотим получить интегральные представления для общих собственных функций этого полного набора гамильтонианов. Соответствующая задача о собственной функции для квадратичного гамильтониана может быть записана в виде:

$$\mathcal{H}_2^{D_\ell} \Psi_{\lambda_1, \dots, \lambda_\ell}^{D_\ell}(x_1, \dots, x_\ell) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i^2 \Psi_{\lambda_1, \dots, \lambda_\ell}^{D_\ell}(x_1, \dots, x_\ell). \quad (1.194)$$

1.5.1. $\mathfrak{so}_{2\ell}$ -функция Уиттекера: факторизационная параметризация. Приведенное слово, отвечающее элементу максимальной длины w_0 в группе Вейля системы корней алгебры Ли $\mathfrak{so}_{2\ell}$, можно представить в следующей рекурсивной форме:

$$I_\ell = (i_1, i_2, \dots, i_{m_\ell}) := (12, 3123, \dots, (\ell \dots 3123 \dots \ell)), \quad m_\ell = \ell(\ell-1),$$

где индексы $i_k \in \Gamma = \{1, \dots, \ell\}$ соответствуют отражениям относительно простых корней α_{i_k} . Пусть $N_+ \subset G$ – максимальная унипотентная подгруппа в $G = \mathrm{SO}(2\ell)$. Свяжем с приведенным словом I_ℓ следующую рекурсивную параметризацию типичного элемента $v^{D_\ell} \in N_+$:

$$v^{D_\ell} = v^{D_{\ell-1}} \mathfrak{X}_{D_{\ell-1}}^{D_\ell}, \quad (1.195)$$

где

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_{D_{\ell-1}}^{D_\ell} = & X_\ell(y_{\ell,1}) \cdots X_k(y_{k,2(\ell+1-k)-1}) \cdots X_3(y_{3,2\ell-5}) X_1(y_{1,\ell-1}) \cdots \\ & \times X_2(y_{2,\ell-1}) X_3(y_{3,2\ell-4}) \cdots X_k(y_{k,2(\ell+1-k)}) \cdots X_\ell(y_{\ell,2}). \end{aligned} \quad (1.196)$$

Здесь $X_i(y) = e^{y f_i}$ и $f_i \equiv f_{\alpha_i}$ – образующие, отвечающие простым корням. Подмножество $N_+^{(0)}$ элементов, допускающих параметризацию (1.195), (1.196), открыто в N_+ . Действие алгебры Ли $\mathfrak{so}_{2\ell}$ на N_+ (1.10) определяет действие на пространстве функций на $N_+^{(0)}$. Явное описание действия на пространстве V_μ эквивариантных функций на $N_+^{(0)}$ приведено ниже.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.12. *Следующие дифференциальные операторы определяют реализацию представления основной серии π_μ алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{so}_{2\ell})$ в пространстве V_μ в терминах факторизационной параметризации на $N_+^{(0)}$:*

$$\begin{aligned} F_i = & \frac{\partial}{\partial y_{i,\ell-1}} + \sum_{n=1}^{\alpha(\ell)-1} \prod_{k=2n-1}^{\ell-2} \frac{y_{3,2k}}{y_{3,2k-1}} \prod_{j=n}^{\alpha(\ell)-1} \frac{y_{i,2j+\varpi(\ell)}}{y_{i,2j+1+\varpi(\ell)}} \frac{y_{i^*,2j+1+\varpi(\ell)}}{y_{i^*,2j+\varpi(\ell)}} \\ & \times \left\{ \frac{\partial}{\partial y_{i,2n+1+\varpi(\ell)}} - \frac{\partial}{\partial y_{i,2n+\varpi(\ell)}} \right\} + \sum_{n=1}^{\beta(\ell)-1} \prod_{k=2n-\varpi(\ell)}^{\ell-2} \frac{y_{3,2k}}{y_{3,2k-1}} \frac{y_{i^*,\ell-1}}{y_{i,\ell-1}} \\ & \times \prod_{j=n+1}^{\beta(\ell)-1} \frac{y_{i,2j-\varpi(\ell)}}{y_{i,2j-1-\varpi(\ell)}} \frac{y_{i^*,2j-1-\varpi(\ell)}}{y_{i^*,2j-\varpi(\ell)}} \left\{ \frac{\partial}{\partial y_{i^*,2n-\varpi(\ell)}} - \frac{\partial}{\partial y_{i,2n+1-\varpi(\ell)}} \right\} \\ & + \sum_{n=1}^{\ell-2} \frac{y_{3,2(\ell-2)}}{i, \ell-1} \prod_{k=n}^{\ell-3} \frac{y_{3,2k}}{y_{3,2k+1}} \prod_{j=\alpha(n+\varpi(\ell))}^{\alpha(\ell)-1} \frac{y_{i^*,2j+1+\varpi(\ell)}}{y_{i^*,2j+\varpi(\ell)}} \\ & \times \prod_{m=\beta(n+\varpi(\ell))}^{\beta(\ell)-2} \frac{y_{i,2m+2-\varpi(\ell)}}{y_{i,2m+1-\varpi(\ell)}} \left\{ \frac{\partial}{\partial y_{3,2n-1}} - \frac{\partial}{\partial y_{3,2n}} \right\} \end{aligned} \quad (1.197)$$

при $i = 1, 2$ $u * : 1 \leftrightarrow 2$,

$$\begin{aligned} F_k = & \frac{\partial}{\partial y_{k,2(\ell+1-k)}} \\ & + (1 - \delta_{k,\ell}) \sum_{n=1}^{\ell-k} \left\{ \prod_{j=n}^{\ell-k} \frac{y_{k+1,2j}}{y_{k+1,2j-1}} \frac{y_{k,2j+1}}{y_{k,2j+2}} \left(\frac{\partial}{\partial y_{k,2n}} - \frac{\partial}{\partial y_{k,2n+1}} \right) \right. \\ & \left. + \frac{y_{k+1,2(\ell-k)}}{y_{k,2(\ell+1-k)}} \prod_{j=n}^{\ell-1-k} \frac{y_{k+1,2j}}{y_{k+1,2j+1}} \frac{y_{k,2j+3}}{y_{k,2j+2}} \left(\frac{\partial}{\partial y_{k+1,2n-1}} - \frac{\partial}{\partial k+1, 2n} \right) \right\} \end{aligned} \quad (1.198)$$

при $k = 3, \dots, \ell$,

$$H_k = \langle \mu, \alpha_k^\vee \rangle + \sum_{i=1}^{\ell} a_{k,i} \sum_{j=1}^{n_i} y_{i,j} \frac{\partial}{\partial y_{i,j}} \quad (1.199)$$

при $k = 1, \dots, \ell$,

$$E_i = \sum_{n=1}^{\ell-1} y_{i,n} \left\{ -\langle \mu, \alpha_i^\vee \rangle - 2 \sum_{k=1}^{n-1} y_{i,k} \frac{\partial}{\partial y_{i,k}} + \sum_{k=1}^{2n-3} y_{3,k} \frac{\partial}{\partial y_{3,k}} - y_{i,n} \frac{\partial}{\partial y_{i,n}} \right\} \quad (1.200)$$

при $i = 1, 2$,

$$E_3 = \sum_{n=1}^{2(\ell-2)} y_{3,n} \left\{ \mu_2 - \mu_3 + \sum_{k=1}^{\alpha(n)+1} \left(y_{1,k} \frac{\partial}{\partial y_{1,k}} + y_{2,k} \frac{\partial}{\partial y_{2,k}} \right) + \sum_{k=1}^{2\beta(n)-3} y_{4,k} \frac{\partial}{\partial y_{4,k}} - 2 \sum_{k=1}^{n-1} y_{3,k} \frac{\partial}{\partial y_{3,k}} - y_{3,n} \frac{\partial}{\partial y_{3,n}} \right\}, \quad (1.201)$$

$$E_k^{(\ell)} = \sum_{n=1}^{2(\ell+1-k)} y_{k,n} \left\{ \mu_{k-1} - \mu_k + \sum_{j=1}^{2\alpha(n)+2} y_{k-1,j} \frac{\partial}{\partial y_{k-1,j}} + \sum_{j=1}^{2\beta(n)-3} y_{k+1,j} \frac{\partial}{\partial y_{k+1,j}} - 2 \sum_{j=1}^{n-1} y_{k,j} \frac{\partial}{\partial y_{k,j}} - y_{k,n} \frac{\partial}{\partial y_{k,n}} \right\}, \quad k = 4, \dots, \ell, \quad (1.202)$$

где $\alpha(n) := [n/2]$, $\beta(n) := [(n+1)/2]$ и $\varpi(n) = (1 - (-1)^n)/2$.

Доказательство приведено в п. 2.4.4 части 2.

Левый и правый векторы Уиттекера, определенные в (1.7) и (1.8), могут быть найдены в факторизационной параметризации явно.

ЛЕММА 1.9. *Имеют место следующие выражения для левого и правого векторов Уиттекера:*

$$\psi_R(y) = \exp \left\{ - \left(\sum_{n=1}^{\ell-1} y_{1,n} + \sum_{n=1}^{\ell-1} y_{2,n} + \sum_{k=3}^{\ell} \sum_{n=1}^{2(\ell+1-k)} y_{k,n} \right) \right\}, \quad (1.203)$$

$$\begin{aligned} \psi_L(y) = & \left(\prod_{k=1}^{\ell-1} y_{1,k}^{\varpi(k)} y_{2,k}^{1-\varpi(k)} \prod_{n=3}^{\ell} \prod_{i=3}^n y_{i,2(n+1-i)-1} \right)^{\langle \mu, \alpha_1^\vee \rangle} \\ & \times \left(\prod_{k=1}^{\ell-1} y_{1,k}^{1-\varpi(k)} y_{2,k}^{\varpi(k)} \prod_{n=3}^{\ell} \prod_{i=3}^n y_{i,2(n+1-i)-1} \right)^{\langle \mu, \alpha_2^\vee \rangle} \\ & \times \prod_{k=3}^{\ell} \left(\prod_{i=1}^k \prod_{n=1}^{n_i} y_{i,n} \prod_{i=k+1}^{\ell} \prod_{n=1}^{n_i/2} y_{i,2n-1}^2 \right)^{\langle \mu, \alpha_k^\vee \rangle} \\ & \times \exp \left\{ - \left(\sum_{n=1}^{\ell-1} \left[\frac{1}{y_{1,\ell-1}} \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{y_{1,\ell-k}}{y_{1,\ell-k-1}} \right)^{1-\varpi(k)} \left(\frac{y_{2,\ell-k}}{y_{2,\ell-k-1}} \right)^{\varpi(k)} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \frac{1}{y_{2,\ell-1}} \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{y_{1,\ell-k}}{y_{1,\ell-k-1}} \right)^{\varpi(k)} \left(\frac{y_{2,\ell-k}}{y_{2,\ell-k-1}} \right)^{1-\varpi(k)} \right] \left(1 + \frac{y_{3,2(\ell-n-1)}}{y_{3,2(\ell-n-1)-1}} \right) \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \prod_{k=1}^{n-1} \frac{y_{3,2(\ell-k-1)}}{y_{3,2(\ell-k-1)-1}} + \sum_{k=3}^{\ell} \frac{1}{y_{k,2(\ell+1-k)}} \sum_{n=k}^{\ell} \left(1 + \frac{y_{k+1,2(\ell-n)}}{y_{k+1,2(\ell-n)-1}} \right)^{1-\delta_{n,\ell}} \\
 & \times \prod_{j=k}^{n-1} \frac{y_{k,2(\ell-j)-1}}{y_{k,2(\ell-j)}} \frac{y_{k+1,2(\ell-j)}}{y_{k+1,2(\ell-j)-1}} \Bigg\}, \tag{1.204}
 \end{aligned}$$

где $\varpi(n) = (1 - (-1)^n)/2$ – четность числа n .

Доказательство приведено в п. 2.3.4 части 2.

Используя (1.17) и (1.18), несложно получить интегральные представления для $\mathfrak{so}_{2\ell}$ -функции Уиттекера в факторизационной параметризации.

ТЕОРЕМА 1.12. *Собственные функции $\mathfrak{so}_{2\ell}$ -цепочки Тоды допускают следующее интегральное представление:*

$$\begin{aligned}
 \Psi_{\lambda_1, \dots, \lambda_\ell}^{D_\ell}(x_1, \dots, x_\ell) &= e^{i\lambda_1 x_1 + \dots + i\lambda_\ell x_\ell} \int_C \prod_{i=1}^{\ell} \prod_{k=1}^{n_i} \frac{dy_{i,k}}{y_{i,k}} \\
 & \times \prod_{k=1}^{\ell-1} \left(\frac{y_{1,k}}{y_{2,k}} \right)^{i\lambda_1 (-1)^k} \left(\prod_{n=3}^{\ell} \prod_{i=3}^n y_{i,2(n+1-i)-1} \right)^{2i\lambda_2} \\
 & \times \prod_{k=3}^{\ell} \left(\prod_{i=1}^k \prod_{n=1}^{n_i} y_{i,n} \prod_{i=k+1}^{\ell} \prod_{n=1}^{n_i/2} y_{i,2n-1}^2 \right)^{i(\lambda_k - \lambda_{k-1})} \\
 & \times \exp \left\{ - \left(\sum_{n=1}^{\ell-1} \left[\frac{1}{y_{1,\ell-1}} \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{y_{1,\ell-k}}{y_{1,\ell-k-1}} \right)^{1-\varpi(k)} \left(\frac{y_{2,\ell-k}}{y_{2,\ell-k-1}} \right)^{\varpi(k)} \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + \frac{1}{y_{2,\ell-1}} \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{y_{1,\ell-k}}{y_{1,\ell-k-1}} \right)^{\varpi(k)} \left(\frac{y_{2,\ell-k}}{y_{2,\ell-k-1}} \right)^{1-\varpi(k)} \right] \left(1 + \frac{y_{3,2(\ell-n-1)}}{y_{3,2(\ell-n-1)-1}} \right) \right. \right. \\
 & \times \prod_{k=1}^{n-1} \frac{y_{3,2(\ell-k-1)}}{y_{3,2(\ell-k-1)-1}} + \sum_{k=3}^{\ell} \frac{1}{y_{k,2(\ell+1-k)}} \sum_{n=k}^{\ell} \left(1 + \frac{y_{k+1,2(\ell-n)}}{y_{k+1,2(\ell-n)-1}} \right)^{1-\delta_{n,\ell}} \\
 & \times \prod_{j=k}^{n-1} \frac{y_{k,2(\ell-j)-1}}{y_{k,2(\ell-j)}} \frac{y_{k+1,2(\ell-j)}}{y_{k+1,2(\ell-j)-1}} + e^{x_2 - x_1} \sum_{n=1}^{\ell-1} y_{1,n} + e^{x_1 + x_2} \sum_{n=1}^{\ell-1} y_{2,n} \\
 & \left. \left. + \sum_{k=3}^{\ell} e^{x_k - x_{k-1}} \sum_{n=1}^{2(\ell+1-k)} y_{k,n} \right) \right\}. \tag{1.205}
 \end{aligned}$$

Здесь $\varpi(k) = (1 - (-1)^k)/2$, $n_1 = n_2 = \ell - 1$, $n_k = 2(\ell + 1 - k)$, $k > 2$, и $t = l(w_0)$. Область интегрирования $C \subset N_+$ – это некомпактное подмногообразие половинной размерности, для которого подынтегральное выражение экспоненциально убывает на границе и на бесконечности. В частности, в качестве C можно взять малую деформацию подмножества $\mathbb{R}_+^{\ell(\ell-1)}$ в $\mathbb{C}^{\ell(\ell-1)}$, обеспечивающую сходимость интеграла.

Доказательство приведено в п. 2.3.4 части 2.

ПРИМЕР 1.6. При $\ell = 3$ общая формула (1.205) принимает вид

$$\begin{aligned} \Psi_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3}^{D_3}(x_1, x_2, x_3) &= e^{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3} \int_C \prod_{i=1}^3 \prod_{k=1}^2 \frac{dy_{i,k}}{y_{i,k}} \\ &\times (y_{1,1} y_{3,1} y_{2,2})^{i(\lambda_2 - \lambda_1)} (y_{2,1} y_{3,1} y_{1,2})^{i(\lambda_2 + \lambda_1)} (y_{3,1} y_{1,2} y_{2,2} y_{3,2})^{i(\lambda_3 - \lambda_2)} \\ &\times \exp \left\{ \frac{1}{y_{1,2}} \left(1 + \frac{y_{3,2}}{y_{3,1}} \right) + \frac{1}{y_{1,2}} \frac{y_{2,2}}{y_{2,1}} \frac{y_{3,2}}{y_{3,1}} + \frac{1}{y_{2,2}} \left(1 + \frac{y_{3,2}}{y_{3,1}} \right) + \frac{1}{y_{2,2}} \frac{y_{1,2}}{y_{1,1}} \frac{y_{3,2}}{y_{3,1}} \right. \\ &\left. + \frac{1}{y_{3,2}} + e^{x_2 - x_1} (y_{1,1} + y_{1,2}) + e^{x_2 + x_1} (y_{2,1} + y_{2,2}) + e^{x_3 - x_2} (y_{3,1} + y_{3,2}) \right\}. \end{aligned} \quad (1.206)$$

1.5.2. $\mathfrak{so}_{2\ell}$ -функция Уиттекера: модифицированная факторизационная параметризация. В этом пункте мы вводим модифицированную факторизационную параметризацию на открытом подмножестве $N_+^{(0)}$ максимальной унипотентной подгруппы $N_+ \subset \mathrm{SO}(2\ell)$. Эта параметризация используется для построения интегральных представлений для $\mathfrak{so}_{2\ell}$ -функций Уиттекера. Подобно другим сериям классических алгебр Ли, эти интегральные представления для $\mathfrak{so}_{2\ell}$ -функций Уиттекера имеют простую рекурсивную структуру относительно ранга ℓ и могут быть описаны в сугубо комбинаторных терминах с использованием подходящих графов. Эти представления можно рассматривать как обобщение интегральных представлений Гивенталья на случай $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2\ell}$.

Мы следуем тому же подходу, который был использован в описании модифицированной факторизационной параметризации для других классических групп. Имеется реализация тавтологического представления $\pi: \mathfrak{so}_{2\ell} \rightarrow \mathrm{End}(\mathbb{C}^{2\ell})$, для которой образующие Вейля, отвечающие борелевской (соответственно картановской) подалгебре в $\mathfrak{so}_{2\ell}$, переходят в верхнетреугольные (соответственно диагональные) матрицы. Это определяет вложение $\mathfrak{so}_{2\ell} \subset \mathfrak{gl}_{2\ell}$, при котором борелевская (соответственно картановская) подалгебра отображается в борелевскую (соответственно картановскую) подалгебру (см., например, [17]). Чтобы определить соответствующее вложение групп, рассмотрим следующую инволюцию на $\mathrm{GL}(2\ell)$:

$$g \longmapsto g^* := \dot{W}_0^{-1} (g^{-1})^t \dot{W}_0, \quad (1.207)$$

где a^t индуцировано стандартным транспонированием матрицы a и $\dot{W}_0$ – подъем элемента максимальной длины в группе Вейля $S_{2\ell}$ алгебры $\mathfrak{gl}_{2\ell}$. В матричной форме это можно записать как

$$\pi(\dot{W}_0) = S J,$$

где $S = \mathrm{diag}(1, -1, \dots, 1, -1)$ и $J = \|J_{i,j}\| = \|\delta_{i+j, 2\ell+1}\|$. Тогда ортогональная группа $G = \mathrm{SO}(2\ell)$ отождествляется с подгруппой в $\mathrm{GL}(2\ell)$ (см., например, [17]):

$$\mathrm{SO}(2\ell) = \{g \in \mathrm{GL}(2\ell): g^* = g\}.$$

Пусть $\epsilon_{i,j}$ – элементарные $(2\ell \times 2\ell)$ -матрицы с единицей на месте (i, j) и нулями на прочих местах. Рассмотрим следующие матрицы:

$$U_2 = \sum_{i=1}^{\ell} \epsilon_{i,i} + e^{-x_{1,1}} \epsilon_{\ell+1,\ell+1} + e^{x_{1,1}} \epsilon_{\ell+2,\ell+2} + \sum_{i=\ell+3}^{2\ell} \epsilon_{i,i}, \quad (1.208)$$

$$\tilde{U}_2 = U_2 + e^{z_{1,1}} (2\epsilon_{\ell,\ell+1} + \epsilon_{\ell+1,\ell+2});$$

$$U_n = \sum_{i=1}^{\ell} \epsilon_{i,i} + e^{-x_{n-1,1}} \epsilon_{\ell+1,\ell+1} + \sum_{k=1}^{n-1} e^{x_{n-1,k}} \epsilon_{\ell+1+k,\ell+1+k} + \sum_{i=\ell+1+n}^{2\ell} \epsilon_{i,i},$$

$$\tilde{U}_n = U_n + 2e^{z_{n-1,1}} \epsilon_{\ell,\ell+1} + \sum_{k=1}^{n-1} e^{z_{n-1,k}} \epsilon_{\ell+k,\ell+1+k}, \quad (1.209)$$

$$\tilde{U}'_n = U_n + 2e^{z_{n-1,1}} \epsilon_{\ell,\ell+1} + e^{z_{n-1,1}} \epsilon_{\ell+1,\ell+2},$$

$$\tilde{U}''_n = U_n + \sum_{k=2}^{n-1} e^{z_{n-1,k}} \epsilon_{\ell+k,\ell+1+k}$$

при $n = 3, \dots, \ell$ и

$$V_2 = \sum_{i=1}^{\ell-1} (\epsilon_{i,i} + \epsilon_{\ell+1+i,\ell+1+i}) + e^{-x_{1,1}} \epsilon_{\ell,\ell} + e^{x_{1,1}} \epsilon_{\ell+1,\ell+1}, \quad (1.210)$$

$$\tilde{V}_2 = V_2 + e^{z_{n-1,1}} (2\epsilon_{\ell-1,\ell} + \epsilon_{\ell,\ell+1}),$$

$$V_n = \sum_{i=1}^{\ell-n} \epsilon_{i,i} + e^{-x_{n,1}} \epsilon_{\ell,\ell} + e^{x_{n,1}} \epsilon_{\ell+1,\ell+1}$$

$$+ \sum_{k=2}^n e^{x_{n,k}} \epsilon_{\ell+1-k,\ell+1-k} + \sum_{i=\ell+2}^{2\ell} \epsilon_{i,i},$$

$$\tilde{V}_n = V_n + e^{z_{n-1,1}} \epsilon_{\ell,\ell+1} + \sum_{k=1}^{n-1} (1 + \delta_{k,1}) e^{z_{n-1,k}} \epsilon_{\ell-k,\ell+1-k}, \quad (1.211)$$

$$\tilde{V}'_n = V_n + e^{z_{n-1,1}} (2\epsilon_{\ell-1,\ell} + \epsilon_{\ell,\ell+1}),$$

$$\tilde{V}''_n = V_n + \sum_{k=2}^{n-1} e^{z_{n-1,k}} \epsilon_{\ell-k,\ell+1-k}$$

при $n = 3, \dots, \ell$. Матрицы $U_n, \tilde{U}_n$ и $V_n, \tilde{V}_n$ удовлетворяют соотношениям

$$\tilde{U}_n = \tilde{U}''_n U_n^{-1} \tilde{U}'_n, \quad \tilde{V}_n = \tilde{V}'_n V_n^{-1} \tilde{V}''_n, \quad n = 3, \dots, \ell. \quad (1.212)$$

ТЕОРЕМА 1.13. i) *Образ типичного элемента $v^{D_\ell} \in N_+^{(0)}$ в тавтологическом представлении $\pi: \mathfrak{so}_{2\ell} \rightarrow \text{End}(\mathbb{C}^{2\ell})$ можно представить в виде*

$$\pi(v^{D_\ell}) = \mathfrak{X}_2 \mathfrak{X}_3 \cdots \mathfrak{X}_\ell, \quad \mathfrak{X}_n = \pi(\mathfrak{X}_{D_{n-1}}^n), \quad (1.213)$$

зде

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_2 &= R_{\ell+1}[\tilde{U}_2 U_2^{-1}]^* R_{\ell+1} R_{\ell-1} \tilde{U}_2 U_2^{-1} R_{\ell-1} R_{\ell} R_{\ell-1} \\ &\quad \times [\tilde{V}_2 V_2^{-1}]^* R_{\ell-1} R_{\ell+1} \tilde{V}_2 V_2^{-1} R_{\ell+1} R_{\ell}, \end{aligned} \quad (1.214)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_n &= [\tilde{U}_n'' U_n^{-1}]^* R_{\ell-1} \tilde{U}_n U_n^{-1} R_{\ell-1} R_{\ell+1} [\tilde{U}_n' U_n^{-1}]^* R_{\ell+1} S_{\ell} R_{\ell-1} \\ &\quad \times [\tilde{V}_n' V_n^{-1}]^* R_{\ell-1} R_{\ell+1} \tilde{V}_n V_n^{-1} R_{\ell+1} R_{\ell} \tilde{V}_n'' V_n^{-1} \end{aligned} \quad (1.215)$$

при $n = 3, \dots, \ell$ и $x_{\ell,i} = 0$, $i = 1, \dots, \ell$, а элементы R_i определяются следующим образом:

$$R_i = \sum_{k=1}^{i-1} \epsilon_{k,k} + \epsilon_{i,i+1} + \epsilon_{i+1,i} + \sum_{k=i+2}^{2\ell} \epsilon_{k,k}. \quad (1.216)$$

ii) Формулы (1.213)–(1.216) определяют параметризацию множества полнотью неотрицательных унипотентных элементов $N_+^{(0)} \subset N_+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v^{D_{\ell}}(y)$ – параметризация на N_+ , заданная в (1.195), (1.196). Положим

$$\begin{aligned} \tilde{X}_1(y) &= e^{y\epsilon_{\ell-1,\ell}}, & \tilde{X}_2(y) &= e^{2y\epsilon_{\ell,\ell+2}}, \\ \tilde{X}_k(y) &= e^{y\epsilon_{\ell+1-k,\ell+2-k}}, & k &= 3, \dots, \ell. \end{aligned}$$

Тогда действие инволюции $*$ имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{X}_1(y)^* &= e^{y\epsilon_{\ell+1,\ell+2}}, & \tilde{X}_2(y)^* &= e^{2y\epsilon_{\ell-1,\ell+1}}, \\ \tilde{X}_k(y)^* &= \tilde{X}_{\ell-1+k}(y), & k &= 3, \dots, \ell. \end{aligned}$$

Вложим элементарные унипотентные подгруппы $X_i(y)$ группы $\mathrm{SO}(2\ell)$ в $\mathrm{GL}(2\ell)$ следующим образом:

$$X_i(y) = \tilde{X}_i(y)^* \tilde{X}_i(y), \quad i = 1, \dots, \ell.$$

Это отображает произвольные регулярные унипотентные элемент $v^{D_{\ell}}$ в унипотентную подгруппу группы $\mathrm{GL}(2\ell)$. Произведем замену переменных:

$$\begin{aligned} y_{1,n} &= e^{z_{n,1-x_{n,1}}} + e^{z_{n,1-x_{n+1,1}}}, & n &= 1, \dots, \ell-1, \\ y_{2,n} &= e^{z_{n,1+x_{n,1}}} + e^{z_{n,1+x_{n+1,1}}}, & n &= 1, \dots, \ell-1, \\ y_{k,2r-1} &= e^{z_{k+r-2,k-1-x_{k+r-2,k-1}}}, & k &= 3, \dots, \ell, \\ y_{k,2r} &= e^{z_{k+r-2,k-1-x_{k+r-1,k-1}}}, & r &= 1, \dots, \ell+1-k. \end{aligned} \quad (1.217)$$

Здесь $x_{\ell,k} = 0$ при $k = 1, \dots, \ell$. Несложно проверить, что после замены (1.217) образ $\pi(v^{D_{\ell}})$ элемента $v^{D_{\ell}}$, определенный в (1.195), (1.196), преобразуется в (1.213)–(1.215). Учитывая, что замена переменных (1.217) обратима, мы получаем параметризацию на $N_+^{(0)} \subset N_+$. Теорема 1.13 доказана.

Модифицированная факторизационная параметризация на унитарной группе N_+ определяет специальную реализацию представления основной серии алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{so}_{2\ell})$ дифференциальными операторами. Она может быть получена с использованием замены переменных (1.217) в реализации из предложения 1.12.

Мы называем представлением Гаусса–Гивенталия эту реализацию представления алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{so}_{2\ell})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.13. *Следующие дифференциальные операторы определяют представление π_μ алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{so}_{2\ell})$ в пространстве V_μ в терминах модифицированной факторизационной параметризации на $N_+^{(0)}$:*

$$F_i = \sum_{n=1}^{\ell-1} e^{x_{\gamma_i(n),1} - z_{n,1}} \left[\frac{e^{x_{\gamma_i(n),1} + x_{n+1,1}} - e^{x_{\gamma_i^*(n),1}} + e^{x_{n,2}}}{(e^{x_{n,1}} + e^{x_{n+1,1}})^2} \frac{\partial}{\partial z_{n,1}} + (\delta_{n,1} - 1) \frac{\partial}{\partial z_{n,2}} \right. \\ \left. + \frac{(1 - \delta_{n,1})e^{x_{n,2}} + e^{x_{n+1,2}}}{e^{x_{n,1}} + e^{x_{n+1,1}}} \sum_{k=1}^n \left\{ (-1)^{\ell+i^*-k} \frac{\partial}{\partial x_{k,1}} - \delta_{k,n} \frac{\partial}{\partial x_{k,2}} \right. \right. \\ \left. \left. + (-1)^{\ell+i-k} \frac{e^{x_{k,1}} - e^{x_{k+1,1}}}{e^{x_{k,1}} + e^{x_{k+1,1}}} \frac{\partial}{\partial z_{k,1}} \right\} \right], \quad i = 1, 2, \quad (1.218)$$

где $\ast: 1 \leftrightarrow 2$, $\varpi(n) = (1 - (-1)^n)/2$ – четность числа n и $\gamma_i(n) = 2[(n + \varpi(\ell + 1 - i))/2] + \varpi(\ell - i)$,

$$F_k = \sum_{n=1}^{2(\ell-k)+1} e^{z_{\beta(n)+k-1,k} - z_{\alpha(n)+k-1,k-1}} \left[\frac{\partial}{\partial x_{\alpha(n)+k-1,k-1}} + (\delta_{n,1} - 1) \frac{\partial}{\partial x_{\alpha(n)+k-1,k}} \right. \\ \left. + \varpi(n) \left\{ \frac{\partial}{\partial z_{\alpha(n)+k-1,k-1}} + (\delta_{n,1} - 1) \frac{\partial}{\partial z_{\alpha(n)+k-1,k}} \right\} \right] \quad (1.219)$$

при $k = 3, \dots, \ell$ и

$$H_i = \langle \mu, \alpha_i^\vee \rangle + 2 \left\{ \sum_{n=1}^{\ell-1} \frac{\varpi(n + i^*)e^{x_{n,1}} + \varpi(n + i)e^{x_{n+1,1}}}{e^{x_{n,1}} + e^{x_{n+1,1}}} \right. \\ \left. + (-1)^i \left(\frac{\partial}{\partial x_{1,1}} + \frac{\partial}{\partial x_{\ell-1,1}} \right) \right\} - \sum_{n=2}^{\ell-1} \frac{\partial}{\partial z_{n,2}} \quad (1.220)$$

при $i = 1, 2$ и $\varpi(k) = (1 - (-1)^k)/2$,

$$H_k = \langle \mu, \alpha_k^\vee \rangle + \sum_{i=2}^{\ell} a_{k,i} \sum_{j=i}^{\ell} \frac{\partial}{\partial z_{j-1,i-1}}, \quad k = 3, \dots, \ell, \quad (1.221)$$

$$E_i = \sum_{n=1}^{2\ell-2} e^{z_{\beta(n),1} + (-1)^i x_{\alpha(n)+1,1}} \left[\langle \mu, \alpha_i^\vee \rangle + (-1)^{i+1} \right. \\ \left. \times \sum_{k=1}^{\beta(n)} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_{k,1}} + (1 - \delta_{k,1}) \delta_{k,\beta(n)} \frac{\partial}{\partial x_{k,2}} \right\} \right]$$

$$- \sum_{k=1}^{\alpha(n)} \left\{ \frac{\partial}{\partial z_{k,1}} + \delta_{k,1} (1 - \delta_{k,\alpha(n)}) \frac{\partial}{\partial z_{k,2}} \right\} \quad (1.222)$$

при $i = 1, 2$ и

$$\begin{aligned} E_k = & \sum_{n=1}^{2(\ell+1-k)} e^{z_{\beta(n)+k-2,k-2} - x_{\alpha(n)+k-1,k-1}} \left[\langle \mu, \alpha_k^\vee \rangle + \frac{\partial}{\partial z_{k-2,k-2}} \right. \\ & + \frac{\partial}{\partial x_{\beta(n)+k-2,k-1}} + (\delta_{\beta(n),1} - 1) \frac{\partial}{\partial x_{\beta(n)+k-2,k}} \\ & + \sum_{m=1}^{\alpha(n)} \left\{ \frac{\partial}{\partial z_{k-2+m,k-2}} - 2 \frac{\partial}{\partial z_{k-2+m,k-1}} + (1 - \delta_{m,1}) \frac{\partial}{\partial z_{k-2+m,k}} \right\} \\ & \left. + (1 - \varpi(n)) \left\{ \frac{\partial}{\partial z_{\alpha(n)+k-2,k-1}} + (\delta_{n,2} - 1) \frac{\partial}{\partial z_{\alpha(n)+k-2,k}} \right\} \right], \quad (1.223) \end{aligned}$$

где $3 \leq k \leq \ell$ и $x_{\ell,k} = 0$.

Мы собираемся явно выписать матричный элемент (1.12) при $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2\ell}$, используя определенное выше представление Гаусса–Гивенталья. Векторы Уиттекера ψ_R и ψ_L в этом представлении должны удовлетворять системе дифференциальных уравнений (1.7) и (1.8). Ее решения имеют следующий вид.

ЛЕММА 1.10. *Имеют место следующие выражения для левого и правого векторов Уиттекера:*

$$\begin{aligned} \psi_R = \exp \left\{ - \sum_{n=1}^{\ell-1} (e^{z_{n,1} - x_{n,1}} + e^{z_{n,1} - x_{n+1,1}} + e^{z_{n,1} + x_{n,1}} + e^{z_{n,1} + x_{n+1,1}}) \right. \\ \left. - \sum_{k=3}^{\ell} \sum_{n=1}^{\ell+1-k} (e^{z_{k+n-2,k-1} - x_{k+n-2,k-1}} + e^{z_{k+n-2,k-1} - x_{k+n-1,k-1}}) \right\}, \quad (1.224) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_L = e^{2\mu_1 x_{1,1}} \prod_{n=2}^{\ell} (e^{x_{n,1}} + e^{x_{n-1,1}})^{2\mu_n} \\ \times \prod_{n=1}^{\ell} \exp \left\{ -\mu_n \left(\sum_{i=1}^n x_{n,i} - 2 \sum_{i=1}^{n-1} z_{n-1,i} + \sum_{i=1}^{n-1} x_{n-1,i} \right) \right\} \\ \times \exp \left\{ - \sum_{k=1}^{\ell-1} \left(e^{x_{k+1,k+1} - z_{k,k}} + \sum_{i=k+1}^{\ell-1} (e^{x_{i,k+1} - z_{i,k}} + e^{x_{i+1,k+1} - z_{i,k}}) \right) \right\}, \quad (1.225) \end{aligned}$$

где $x_{\ell,k} = 0$, $k = 1, \dots, \ell$, $\mu_n = i\lambda_n - \rho_n$, $\rho_1 = 0$ и $\rho_n = n - 1$ при $1 < n \leq \ell$ ($\sum_i^j = 0$ при $j < i$).

Теперь мы готовы указать интегральное представление спаривания (1.12) при $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2\ell}$. Чтобы получить явное выражение для подынтегральной функции, мы используем тот же тип разложения элемента максимального тора, что

и для других классических групп в предыдущих разделах:

$$e^{-H_x} = \pi_\lambda \left(\exp \left(- \sum_{i=1}^{\ell} \langle \omega_i, x \rangle h_i \right) \right) = e^{H_L} e^{H_R},$$

где

$$\begin{aligned} -H_x = H_L + H_R = & \sum_{i=1}^{\ell} \mu_i x_{\ell,i} + \sum_{k=3}^{\ell} (x_{\ell,k} - x_{\ell,k-1}) \sum_{i=k-1}^{\ell-1} \frac{\partial}{\partial z_{i,k-1}} + x_{\ell,2} \sum_{i=1}^{\ell-1} \frac{\partial}{\partial z_{i,1}} \\ & + x_{\ell,1} \left(\frac{\partial}{\partial x_{\ell-1,1}} + \frac{\partial}{\partial x_{1,1}} - \sum_{k=1}^{\ell-1} (-1)^k \frac{e^{x_{k+1,1}} - e^{x_{k,1}}}{e^{x_{k,1}} + e^{x_{k+1,1}}} \frac{\partial}{\partial z_{k,1}} \right) \end{aligned} \quad (1.226)$$

и

$$H_L = \sum_{k=1}^{\ell} x_{\ell,k} \left(\sum_{i=k}^{\ell-1} \frac{\partial}{\partial x_{i,k}} + \sum_{i=k-1}^{\ell-1} \frac{\partial}{\partial z_{i,k-1}} \right), \quad (1.227)$$

$$H_R = -H_x - H_L. \quad (1.228)$$

Мы считаем, что H_L действует на левый вектор и H_R действует на правый вектор в (1.12). Принимая во внимание предложение 1.10, мы приходим к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 1.14. *Собственные функции $\mathfrak{so}_{2\ell}$ -цепочки Тоды (1.12) допускают следующее интегральное представление:*

$$\Psi_{\lambda_1, \dots, \lambda_\ell}^{D_\ell}(x_{\ell,1}, \dots, x_{\ell,\ell}) = \int_C \prod_{k=1}^{\ell-1} d\mathbf{x}_k d\mathbf{z}_k e^{\mathcal{F}^{D_\ell}}, \quad (1.229)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{D_\ell} = & i\lambda_1 x_{1,1} - \sum_{n=2}^{\ell} i\lambda_n \left(\sum_{i=1}^n x_{n,i} - 2 \sum_{i=1}^{n-1} z_{n-1,i} + \sum_{i=1}^{n-1} x_{n-1,i} - 2 \ln(e^{x_{n,1}} + e^{x_{n-1,1}}) \right) \\ & - \sum_{k=1}^{\ell-1} \left(e^{x_{k+1,k+1} - z_{k,k}} + \sum_{i=k+1}^{\ell-1} (e^{x_{i,k+1} - z_{i,k}} + e^{x_{i+1,k+1} - z_{i,k}}) \right) \\ & - \sum_{n=1}^{\ell-1} (e^{z_{n,1} - x_{n,1}} + e^{z_{n,1} - x_{n+1,1}} + e^{z_{n,1} + x_{n,1}} + e^{z_{n,1} + x_{n+1,1}}) \\ & - \sum_{k=3}^{\ell} \sum_{n=1}^{\ell+1-k} (e^{z_{k+n-2,k-1} - x_{k+n-2,k-1}} + e^{z_{k+n-2,k-1} - x_{k+n-1,k-1}}), \end{aligned}$$

и $x_i := x_{\ell,i}$, $1 \leq i \leq \ell$, а $C \subset N_+$ — некомпактное подмногообразие половинной размерности, для которого подынтегральная функция экспоненциально убывает на границе и на бесконечности. В частности, в качестве C можно взять малую деформацию подпространства $\mathbb{R}^{\ell(\ell-1)} \subset \mathbb{C}^{\ell(\ell-1)}$, обеспечивающую сходимость интеграла.

Заметим, что интеграл (1.229) можно получить непосредственно из (1.205), используя замену переменных:

$$\begin{aligned} y_{1,n} &= e^{x_{\ell,1}-x_{\ell,2}} (e^{z_{n,1}-x_{n,1}} + e^{z_{n,1}-x_{n+1,1}}), & n &= 1, \dots, \ell-1, \\ y_{2,n} &= e^{-x_{\ell,1}-x_{\ell,2}} e^{z_{n,1}+x_{n,1}} + e^{z_{n,1}+x_{n+1,1}}, & n &= 1, \dots, \ell-1, \\ y_{k,2r-1} &= e^{x_{\ell,k-1}-x_{\ell,k}} e^{z_{k+r-2,k-1}-x_{k+r-2,k-1}}, & k &= 3, \dots, \ell, \\ y_{k,2r} &= e^{x_{\ell,k-1}-x_{\ell,k}} e^{z_{k+r-2,k-1}-x_{k+r-1,k-1}}, & r &= 1, \dots, \ell+1-k. \end{aligned} \quad (1.230)$$

ПРИМЕР 1.7. При $\ell = 2$ общая формула (1.229) принимает вид

$$\begin{aligned} \Psi_{\lambda_1, \lambda_2}^{D_2}(x_{2,1}, x_{2,2}) &= \int_C dx_{1,1} dz_{1,1} (e^{x_{1,1}} + e^{x_{2,1}})^{2i\lambda_2} \\ &\times \exp\{i\lambda_1 x_{1,1} - i\lambda_2(x_{2,1} + x_{2,2} - 2z_{1,1} + x_{1,1}) \\ &- (e^{z_{1,1}-x_{1,1}} + e^{z_{1,1}+x_{1,1}} + e^{z_{1,1}-x_{2,1}} + e^{z_{1,1}+x_{2,1}} + e^{x_{2,2}-z_{1,1}})\}. \end{aligned} \quad (1.231)$$

Рассмотрим преобразование переменных интегрирования

$$z_{1,1} \mapsto -z_{1,1} + x_{2,2} - \ln(e^{x_{1,1}} + e^{x_{2,1}}), \quad x_{1,1} \mapsto x_{1,1} - z_{1,1} - x_{2,1}, \quad (1.232)$$

которое влечет

$$\begin{aligned} \Psi_{\lambda_1, \lambda_2}^{D_2}(x_{2,1}, x_{2,2}) &= e^{-i\lambda_1 x_{2,1} + i\lambda_2 x_{2,2}} \int_C dz_{1,1} dx_{1,1} \exp\{i(\lambda_1 - \lambda_2)x_{1,1} \\ &- i(\lambda_1 + \lambda_2)z_{1,1} - (e^{z_{1,1}+x_{2,1}} + e^{x_{2,2}-z_{1,1}}) - (e^{x_{2,2}-x_{1,1}} + e^{x_{1,1}-x_{2,1}})\}. \end{aligned}$$

Теперь сделаем следующую замену переменных интегрирования:

$$z_{1,1} \mapsto z_{1,1} + \frac{x_{2,2} - x_{2,1}}{2}, \quad x_{1,1} \mapsto x_{1,1} + \frac{x_{2,1} + x_{2,2}}{2},$$

и получим

$$\Psi_{\lambda_1, \lambda_2}^{D_2}(x_{2,1}, x_{2,2}) = K_{i(\lambda_1 - \lambda_2)}(2e^{\frac{x_{2,2} - x_{2,1}}{2}}) K_{-i(\lambda_1 + \lambda_2)}(2e^{\frac{x_{2,1} + x_{2,2}}{2}}), \quad (1.233)$$

где с учетом (1.50)

$$K_{i\gamma}(2e^y) = \int_{\mathbb{R}} dt e^{i\gamma t - e^y(e^t + e^{-t})} = \Psi_{\gamma}^{\mathfrak{sl}_2}(y).$$

Отождествление функций Уиттекера (1.233) обеспечивается изоморфизмом алгебр Ли $\mathfrak{so}_4 \simeq \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$.

Имеется простое комбинаторное описание потенциала $\mathcal{F}^{D_\ell}$ на нулевом уровне спектра $\{\lambda_i = 0\}$. А именно, его можно представить в виде суммы по всем

стрелкам следующей диаграммы:

Мы используем то же правило сопоставления переменных стрелкам диаграммы, что и для случая A_ℓ . В дополнение мы сопоставляем символу $z \times x$ экспоненту e^{z+x} .

Заметим, что диаграмма для D_ℓ может быть получена посредством факторизации из диаграммы $A_{2\ell-1}$. Рассмотрим инволюцию

$$*: X \longmapsto -\dot{W}_0^{-1} X^t \dot{W}_0, \quad (1.234)$$

где $\dot{W}_0$ – подъем элемента максимальной длины группы Вейля $S_{2\ell}$ и X^t обозначает стандартное транспонирование. Соответствующее действие на модифицированных параметрах факторизации имеет вид

$$*: x_{k,i} \longleftrightarrow -x_{k,k+1-i}. \quad (1.235)$$

Это определяет факторизацию $A_{2\ell-1}$ -диаграммы, которая приводит к диаграмме для D_ℓ . Заметим, что диаграмму для D_ℓ также можно получить, стирая последний ряд вершин и стрелок на правом склоне диаграммы для C_ℓ .

Имеется следующий аналог соотношений (1.52). Введем переменные $a_{i,k}$, $b_{i,k}$, $c_{i,k}$, $d_{i,k}$, связанные со стрелками диаграммы:

$$\begin{aligned}
 a_{n,1} &= e^{x_{n,1}+z_{n-1,1}}, & a_{n,i} &= e^{x_{n,i}-z_{n-1,i-1}}, & 2 \leq i \leq n \leq \ell; \\
 b_{k,1} &= e^{x_{k,1}+z_{k,1}}, & k &= 1, \dots, \ell-1; \\
 b_{n,i} &= e^{z_{n,i}-x_{n,i-1}}, & 2 \leq i \leq n < \ell; \\
 c_{m,j} &= e^{z_{m,j}-x_{m,j}}, & d_{m,j} &= e^{z_{m,j}-x_{m+1,j}}, & 1 \leq j \leq m < \ell.
 \end{aligned} \quad (1.236)$$

Тогда выполнены соотношения

$$\begin{aligned}
 b_{k,i} c_{k,i} &= a_{k+1,i} d_{k,i}, & a_{k+1,i+1} d_{k,i} &= b_{k+1,i+1} c_{k+1,i}, & 1 \leq i \leq k < \ell, \\
 a_{\ell,1} a_{\ell,2} &= e^{x_{\ell,1}+x_{\ell,2}}, & a_{\ell,i} d_{\ell-1,i-1} &= e^{x_{\ell,i}-x_{\ell,i-1}}, & i = 2, \dots, \ell.
 \end{aligned} \quad (1.237)$$

1.5.3. Рекурсия для $\mathfrak{so}_{2\ell}$ -функций Уиттекера и $\mathcal{Q}$ -оператор для $D_\ell^{(1)}$ -цепочки Тоды. Интегральное представление (1.229) для $\mathfrak{so}_{2\ell}$ -функций Уиттекера имеет рекурсивную структуру относительно ранга ℓ . Для всех $n = 2, \dots, \ell$ рассмотрим интегральные операторы $Q_{D_{n-1}}^{D_n}$ с ядрами $Q_{D_{n-1}}^{D_n}(\underline{x}_n, \underline{x}_{n-1}; \lambda_n)$, которые определяются следующим образом:

$$Q_{D_{n-1}}^{D_n}(\underline{x}_n, \underline{x}_{n-1}; \lambda_n) = \int d\underline{z}_n Q_{C_{n-1}}^{D_n}(\underline{x}_n, \underline{z}_{n-1}) Q_{D_{n-1}}^{C_{n-1}}(\underline{z}_{n-1}, \underline{x}_{n-1}) \\ \times \exp \left\{ -i\lambda_n \left(\sum_{i=1}^n x_{n,i} - 2 \sum_{i=1}^{n-1} z_{n-1,i} + \sum_{i=1}^{n-1} x_{n-1,i} \right) \right\} (e^{x_{n-1,1}} + e^{x_{n,1}})^{2i\lambda_n},$$

где

$$Q_{C_{n-1}}^{D_n}(\underline{x}_n, \underline{z}_{n-1}) = \exp \left\{ - \left(e^{x_{n,1}+z_{n-1,1}} + \sum_{i=1}^{n-1} (e^{z_{n-1,i}-x_{n,i}} + e^{x_{n,i+1}-z_{n-1,i}}) \right) \right\}, \quad (1.238)$$

$$Q_{D_{n-1}}^{C_{n-1}}(\underline{z}_{n-1}, \underline{x}_{n-1}) = \exp \left\{ - \left(e^{x_{n-1,1}+z_{n-1,1}} + \sum_{i=1}^{n-2} (e^{z_{n-1,i}-x_{n-1,i}} + e^{x_{n-1,i+1}-z_{n-1,i}}) + e^{z_{n-1,n-1}-x_{n-1,n-1}} \right) \right\},$$

и при $n = 1$ мы полагаем

$$Q_{D_0}^{D_1}(x_{1,1}; \lambda_1) = e^{i\lambda_1 x_{1,1}}.$$

С использованием $Q_{D_{n-1}}^{D_n}$, $n = 1, \dots, \ell$, интегральное представление (1.229) можно записать в рекурсивной форме.

ТЕОРЕМА 1.15. Собственные функции $\mathfrak{so}_{2\ell}$ -цепочки Тоды можно записать в следующей рекурсивной форме:

$$\Psi_{\lambda_1, \dots, \lambda_\ell}^{D_\ell}(x_1, \dots, x_\ell) = \int_C \prod_{k=1}^{\ell-1} d\underline{x}_k \prod_{k=1}^{\ell} Q_{D_{k-1}}^{D_k}(\underline{x}_k, \underline{x}_{k-1}; \lambda_k), \quad (1.239)$$

или, эквивалентно,

$$\Psi_{\lambda_1, \dots, \lambda_\ell}^{D_\ell}(\underline{x}_\ell) = \int_{\mathcal{C}_\ell} d\underline{x}_{\ell-1} Q_{D_{\ell-1}}^{D_\ell}(\underline{x}_\ell, \underline{x}_{\ell-1}; \lambda_\ell) \Psi_{\lambda_1, \dots, \lambda_{\ell-1}}^{D_{\ell-1}}(\underline{x}_{\ell-1}),$$

где $x_n := x_{\ell,n}$, $1 \leq n \leq \ell$. Здесь $C \subset N_+$ – некомпактное подмногообразие половинной размерности, для которого подынтегральная функция экспоненциально убывает на границе и на бесконечности.

Как и для других классических групп, отличных от $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$, специализация на нулевом уровне спектра $\{\lambda_n = 0\}$ обнаруживает более тонкую рекурсивную структуру. В этом случае ядро оператора $Q_{D_{n-1}}^{D_n}$ редуцируется к свертке двух ядер $Q_{C_{n-1}}^{D_n}(\underline{x}_n, \underline{z}_{n-1})$ и $Q_{D_{n-1}}^{C_{n-1}}(\underline{z}_{n-1}, \underline{x}_{n-1})$. Соответствующие интегральные операторы $Q_{C_{n-1}}^{D_n}$, $Q_{D_{n-1}}^{C_{n-1}}$ можно рассматривать как элементарные сплетающие операторы, связывающие гамильтонианы цепочек Тоды для систем корней D_n , C_{n-1} и C_{n-1} , D_{n-1} . Тем самым, несложно непосредственно проверить следующие соотношения для квадратичных гамильтонианов.

ЛЕММА 1.11. Операторы $Q_{D_{n-1}}^{D_n}$, $Q_{C_{n-1}}^{D_n}$ и $Q_{D_{n-1}}^{C_{n-1}}$ удовлетворяют следующему сплетающему соотношениям с квадратичными гамильтонианами Тоды.

1. Операторы $Q_{C_{n-1}}^{D_n}$ и $Q_{D_{n-1}}^{C_{n-1}}$ сплетают квадратичные гамильтонианы C - и D -цепочек Тоды:

$$\mathcal{H}_2^{D_n}(\underline{x}_n) Q_{C_{n-1}}^{D_n}(\underline{x}_n, \underline{z}_{n-1}) = Q_{C_{n-1}}^{D_n}(\underline{x}_n, \underline{z}_{n-1}) \mathcal{H}_2^{C_{n-1}}(\underline{x}_{n-1}), \quad (1.240)$$

$$\mathcal{H}_2^{C_n}(\underline{z}_n) Q_{D_n}^{C_n}(\underline{z}_n, \underline{x}_n) = Q_{D_n}^{C_n}(\underline{z}_n, \underline{x}_n) \mathcal{H}_2^{D_n}(\underline{x}_n). \quad (1.241)$$

2. Оператор $Q_{D_{n-1}}^{D_n}$ при $\lambda_n = 0$ сплетает гамильтонианы $\mathcal{H}_2^{D_n}$ и $\mathcal{H}_2^{D_{n-1}}$:

$$\mathcal{H}_2^{D_n}(\underline{x}_n) Q_{D_{n-1}}^{D_n}(\underline{x}_n, \underline{x}_{n-1}; \lambda_n = 0) = Q_{D_{n-1}}^{D_n}(\underline{x}_n, \underline{x}_{n-1}; \lambda_n = 0) \mathcal{H}_2^{D_{n-1}}(\underline{x}_{n-1}), \quad (1.242)$$

где

$$\mathcal{H}_2^{C_n} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial z_i^2} + 2e^{2z_1} + \sum_{i=1}^{n-2} e^{z_{i+1}-z_i}, \quad (1.243)$$

$$\mathcal{H}_2^{D_n} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + e^{x_1+x_2} + \sum_{i=1}^{n-1} e^{x_{i+1}-x_i}. \quad (1.244)$$

Интегральное ядро оператора $Q_{D_{n-1}}^{D_n}(\underline{x}_n, \underline{x}_{n-1})$ при $\lambda_n = 0$ задается следующей диаграммой:

$$\begin{array}{ccccccc} & z_{n-1,1} & \text{---} \times \text{---} & x_{n,1} & & & \\ & \downarrow & & \downarrow & & & \\ x_{n-1,1} & \longrightarrow & z_{n-1,1} & \longrightarrow & x_{n,2} & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & x_{n-1,2} & \longrightarrow & z_{n-1,2} & \longrightarrow & \ddots \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \longrightarrow & x_{n,n-1} \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & x_{n-1,n-1} & \longrightarrow & z_{n-1,n-1} \longrightarrow x_{n,n} \end{array} \quad (1.245)$$

Здесь нижние и верхние спускающиеся пути ориентированной диаграммы отвечают ядрам элементарных сплетений $Q_{C_{n-1}}^{D_n}$ и $Q_{D_{n-1}}^{C_n}$ соответственно. Свертка ядер $Q_{C_n}^{D_n}$ и $Q_{D_{n-1}}^{C_{n-1}}$ соответствует интегрированию по переменным $z_{n-1,i}$ на внутренних вершинах поддиаграммы (1.245).

По аналогии с классическими алгебрами Ли других серий, операторы рекурсии $Q_{D_{n-1}}^{D_n}$ можно рассматривать как вырождения $\mathcal{Q}$ -операторов Бакстера для аффинных $D_\ell^{(1)}$ -цепочек Тоды. Напомним корневые данные для $D_\ell^{(1)}$. Простые корни для аффинной системы корней $D_\ell^{(1)}$ можно задать как векторы в $\mathbb{R}^\ell$ следующим образом:

$$\alpha_1 = \epsilon_1 + \epsilon_2, \quad \alpha_{i+1} = \epsilon_{i+1} - \epsilon_i, \quad 1 \leq i \leq \ell - 1, \quad \alpha_{\ell+1} = -\epsilon_\ell - \epsilon_{\ell-1}.$$

Диаграмма Дынкина здесь имеет вид

Соответствующий квадратичный гамильтониан $D_\ell^{(1)}$ -цепочки Тоды определяется как

$$\mathcal{H}_2^{D_\ell^{(1)}} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\ell} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + e^{x_1+x_2} + \sum_{i=1}^{\ell-2} e^{x_{i+1}-x_i} + ge^{x_\ell-x_{\ell-1}} + ge^{-x_\ell-x_{\ell-1}}. \quad (1.246)$$

Определим $\mathcal{Q}$ -оператор Бакстера для $D_\ell^{(1)}$ -цепочки Тоды как интегральный оператор со следующим интегральным ядром:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}^{D_\ell^{(1)}}(\underline{x}^{(\ell)}, \underline{y}^{(\ell)}; \lambda) &= \int d\underline{z}^{(\ell-1)} Q_{C_{\ell-1}^{(1)}}^{D_\ell^{(1)}}(\underline{x}^{(\ell)}, \underline{z}^{(\ell-1)}) Q_{D_\ell^{(1)}}^{C_{\ell-1}^{(1)}}(\underline{z}^{(\ell-1)}, \underline{y}^{(\ell)}) \\ &\times \exp \left\{ -i\lambda \left(\sum_{i=1}^{\ell} x_i - 2 \sum_{i=1}^{\ell-1} z_i + \sum_{i=1}^{\ell} y_i \right) \right\} (e^{x_1} + e^{y_1})^{2i\lambda} (e^{-x_\ell} + e^{-y_\ell})^{-2i\lambda}, \end{aligned} \quad (1.247)$$

где

$$Q_{C_{\ell-1}^{(1)}}^{D_\ell^{(1)}}(\underline{x}^{(\ell)}, \underline{z}^{(\ell-1)}) = \exp \left\{ -e^{z_1+x_1} - \sum_{i=1}^{\ell-1} (e^{z_i-x_i} + e^{x_{i+1}-z_i}) - ge^{-x_\ell-z_{\ell-1}} \right\} \quad (1.248)$$

и

$$Q_{C_{\ell-1}^{(1)}}^{D_\ell^{(1)}}(x_1, \dots, x_\ell; z_1, \dots, z_\ell) = Q_{D_\ell^{(1)}}^{C_{\ell-1}^{(1)}}(z_1, \dots, z_\ell; x_1, \dots, x_\ell). \quad (1.249)$$

Здесь мы используем обозначения $\underline{x}^{(\ell)} = (x_1, \dots, x_\ell)$ и $\underline{y}^{(\ell)} = (y_1, \dots, y_\ell)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.14. $\mathcal{Q}$ -оператор (1.247) коммутирует с квадратичным гамильтонианом $D_\ell^{(1)}$ -цепочки Тоды:

$$\mathcal{H}^{D_\ell^{(1)}}(\underline{x}^{(\ell)}) \mathcal{Q}^{D_\ell^{(1)}}(\underline{x}^{(\ell)}, \underline{y}^{(\ell)}) = \mathcal{Q}^{D_\ell^{(1)}}(\underline{x}^{(\ell)}, \underline{y}^{(\ell)}) \mathcal{H}^{D_\ell^{(1)}}(\underline{y}^{(\ell)}). \quad (1.250)$$

Покажем, что оператор рекурсии $Q_{D_{\ell-1}}^{D_\ell}$ можно рассматривать как обобщение $\mathcal{Q}$ -операторов Бакстера для $D_\ell^{(1)}$. Введем слегка модифицированный оператор рекурсии с ядром $Q_{D_{\ell-1} \oplus D_1}^{D_\ell}$:

$$Q_{D_{\ell-1} \oplus D_1}^{D_\ell}(\underline{x}^{(\ell)}, \underline{y}^{(\ell)}; \lambda) = e^{i\lambda y_\ell} Q_{D_{\ell-1}}^{D_\ell}(\underline{x}^{(\ell)}, \underline{y}^{(\ell-1)}; \lambda), \quad (1.251)$$

где $\underline{y}^{(\ell-1)} = (y_1, \dots, y_{\ell-1})$. Этот оператор сплетает гамильтонианы $\mathfrak{so}_{2\ell-}$ и $\mathfrak{so}_{2\ell-2} \oplus \mathfrak{so}_{2-}$ -цепочек Тоды. Например, для квадратичных гамильтонианов получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_2^{D_\ell}(\underline{x}^{(\ell)}) Q_{D_{\ell-1} \oplus D_1}^{D_\ell}(\underline{x}^{(\ell)}, \underline{y}^{(\ell)}; \lambda) \\ = Q_{D_{\ell-1} \oplus D_1}^{D_\ell}(\underline{x}^{(\ell)}, \underline{y}^{(\ell)}; \lambda) (\mathcal{H}_2^{D_{\ell-1}}(\underline{y}^{(\ell-1)}) + \mathcal{H}_2^{D_1}(y_\ell)), \end{aligned}$$

где $\mathcal{H}_2^{D_1}(y_\ell) = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y_\ell^2}$. Очевидно, что проекция соотношения на подпространство функций $F(\underline{y}^{(\ell)}) = \exp(i\lambda y_\ell) f(\underline{y}^{(\ell-1)})$ приводит к исходному оператору рекурсии, для которого

$$\begin{aligned} & \mathcal{H}_2^{D_\ell}(\underline{x}^{(\ell)}) Q_{D_{\ell-1}}^{D_\ell}(\underline{x}^{(\ell)}, \underline{y}^{(\ell-1)}; \lambda) \\ &= Q_{D_{\ell-1}}^{D_\ell}(\underline{x}^{(\ell)}, \underline{y}^{(\ell-1)}; \lambda) \left(\mathcal{H}_2^{D_{\ell-1}}(\underline{y}^{(\ell-1)}) + \frac{1}{2} \lambda^2 \right). \end{aligned} \quad (1.252)$$

Введем однопараметрическое семейство операторов с ядрами

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_\ell^{D_\ell^{(1)}}(\underline{x}^{(\ell)}, \underline{y}^{(\ell)}; \lambda; \varepsilon) &:= \varepsilon^{i\lambda} e^{i\lambda y_\ell} \int d\underline{z}^{(\ell-1)} Q_{C_{\ell-1}^{(1)}}^{D_\ell^{(1)}}(\underline{x}^{(\ell)}, \underline{z}^{(\ell-1)}) Q_{D_\ell^{(1)}}^{C_{\ell-1}^{(1)}}(\underline{z}^{(\ell-1)}, \underline{y}^{(\ell)}; \varepsilon) \\ &\times \exp \left\{ -i\lambda \left(\sum_{i=1}^{\ell} x_i - 2 \sum_{i=1}^{\ell-1} z_i + \sum_{i=1}^{\ell-1} y_i \right) \right\} (e^{x_1} + e^{y_1})^{2i\lambda} (\varepsilon e^{-x_\ell + y_\ell} + 1)^{-2i\lambda}, \end{aligned} \quad (1.253)$$

где

$$Q_{C_{\ell-1}^{(1)}}^{D_\ell^{(1)}}(\underline{x}^{(\ell)}, \underline{z}^{(\ell-1)}) = \exp \left\{ -e^{z_1 + x_1} - \sum_{i=1}^{\ell-1} (e^{z_i - x_i} + e^{x_{i+1} - z_i}) - g e^{-x_\ell - z_{\ell-1}} \right\} \quad (1.254)$$

и

$$\begin{aligned} Q_{D_\ell^{(1)}}^{C_{\ell-1}^{(1)}}(z_1, \dots, z_{\ell-1}, y_1, \dots, y_\ell; \varepsilon) &= \exp \left\{ -e^{z_1 + y_1} - \sum_{i=1}^{\ell-2} (e^{z_i - y_i} + e^{y_{i+1} - z_i}) \right. \\ &\left. - e^{z_{\ell-1} - y_{\ell-1}} - \varepsilon e^{y_\ell - z_{\ell-1}} - \varepsilon^{-1} g e^{-x_\ell - z_{\ell-1}} \right\}. \end{aligned} \quad (1.255)$$

Эти операторы получаются сдвигом переменной $y_\ell = y_\ell + \ln \varepsilon$ в (1.247)–(1.249). Тогда имеет место следующее соотношение между $\mathcal{Q}$ -оператором для $D_\ell^{(1)}$ -цепочки Тоды и (модифицированным) оператором рекурсии для $\mathfrak{so}_{2\ell}$ -функции Уиттекера:

$$Q_{D_{\ell-1} \oplus D_1}^{D_\ell}(\underline{x}^{(\ell)}, \underline{y}^{(\ell)}; \lambda) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0, \\ \varepsilon^{-1} g \rightarrow 0}} \varepsilon^{-i\lambda} Q_{D_\ell^{(1)}}^{D_\ell}(\underline{x}^{(\ell)}, \underline{y}^{(\ell)}; \lambda; \varepsilon). \quad (1.256)$$

2. Часть 2. Доказательства

Пусть G – комплексная связная односвязная полупростая группа Ли ранга ℓ и $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ – отвечающая ей полупростая алгебра Ли с образующими Шевалле f_i, h_i, e_i . Зафиксируем борелевскую подгруппу B_+ и максимальный тор $T \subset B_+$. Эти данные определяют пару N_+, N_- противоположных унитарных подгрупп группы G , $N_+ \subset B_+$. Пусть Γ – множество вершин графа Дынкина алгебры Ли $\mathfrak{g}$, $\{\alpha_i, i \in \Gamma\}$ – множество простых корней, $\{\gamma_k, k = 1, \dots, m\}$, $m = \frac{1}{2} \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, – положительные корни и $\{\alpha_i^\vee, i \in \Gamma\}$ – множество простых корокорней. Для каждого $i \in \Gamma$ имеется групповой гомоморфизм

$$\varphi_i: \text{SL}(2) \longrightarrow G, \quad (2.1)$$

который определен следующим образом. Рассмотрим множество однопараметрических подгрупп $e^{tf_i} = X_i(t) \subset N_+$, $e^{te_i} = Y_i(t) \subset N_-$ и $e^{th_i} = \alpha_i^\vee(t) \subset T$ и положим

$$\varphi_i(e^{te}) = e^{te_i}, \quad \varphi_i(e^{tf}) = e^{tf_i}, \quad \varphi_i(e^{th}) = \alpha_i^\vee(t), \quad (2.2)$$

где e, f, h – стандартные образующие алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$. Зафиксируем подъемы $\dot{s}_i \subset G$, $\dot{s} \subset \mathrm{SL}(2)$ образующих s_i группы Вейля группы G и образующего группы Вейля группы $\mathrm{SL}(2)$:

$$\dot{s} = e^f e^{-e} e^f, \quad \dot{s}_i = e^{f_i} e^{-e_i} e^{f_i}. \quad (2.3)$$

Так определенные подъемы групповых образующих очевидным образом согласованы с гомоморфизмами (2.1), т. е. $\varphi_i(\dot{s}) = \dot{s}_i$. Имеют место следующие соотношения:

$$\dot{s}^{-1} e \dot{s} = -f, \quad \dot{s}_i^{-1} e_i \dot{s}_i = -f_i. \quad (2.4)$$

Действие $w_0(\alpha_i) = -\alpha_{i^*}$ элемента максимальной длины w_0 группы Вейля на простых корнях определяет инволюцию $i \mapsto i^*$. Соответствующее действие элемента $\dot{w}_0$ задается как

$$\dot{w}_0^{-1} e_i \dot{w}_0 = -f_{i^*}. \quad (2.5)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Для классических групп Ли имеем: $i^* = \ell + 1 - i$ для $G = \mathrm{SL}(\ell + 1)$, $i^* = i$ для $G = \mathrm{SO}(2\ell + 1)$ и для $G = \mathrm{Sp}(2\ell)$. В случае $G = \mathrm{SO}(2\ell)$ (при $\ell \geq 2$) действие инволюции $*$ имеет вид:

$$\begin{aligned} *: \quad 1 &\longmapsto \begin{cases} 1, & \ell \text{ чётно,} \\ 2, & \ell \text{ нечётно,} \end{cases} \quad 2 \longmapsto \begin{cases} 2, & \ell \text{ чётно,} \\ 1, & \ell \text{ нечётно,} \end{cases} \\ k^* &= k, \quad 2 < k \leq \ell, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где нумерация корней группы $\mathrm{SO}(2\ell)$ совпадает с (1.192).

Ниже мы рассматриваем матричные элементы конечномерных представлений V_{ω_i} алгебры Ли $\mathfrak{g}$, отвечающих фундаментальным весам ω_i , $i \in \Gamma$. Пусть $\xi_{\omega_i}^+$ и $\xi_{\omega_i}^-$ – старший и младший векторы в V_{ω_i} , определенные условием $\mathbf{n}_{\pm} \xi_i^{\pm} = 0$ и нормализованные так, что $\langle \xi_{\omega_i}^- | \xi_{\omega_i}^+ \rangle = 1$. Для подъема (2.3) элементов группы Вейля мы имеем (см., например, [24; лемма 3.8], [15; формула (2.29)])

$$\dot{w}_0^{-1} \xi_{\omega_i}^+ = \xi_{\omega_i}^-, \quad \dot{s}_i^{-1} \xi_{\omega_i}^+ = e_i \xi_{\omega_i}^+. \quad (2.7)$$

Рассмотрим следующую параметризацию типичного элемента $g \in G$:

$$g = g^{(-)} g^{(0)} g^{(+)} = \exp\left(\sum_{\alpha \in \Phi_+} u_{-\alpha} e_{\alpha}\right) \exp\left(\sum_{i=1}^{\ell} u_i h_i\right) \exp\left(\sum_{\alpha \in \Phi_+} u_{\alpha} f_{\alpha}\right). \quad (2.8)$$

Для координат u_i , соответствующих образующим Картана h_i , и для координат $u_{\pm\alpha_i}$, соответствующих образующим e_{α_i} , f_{α_i} , которые связаны с простыми

корнями, имеются простые выражения в терминах матричных элементов фундаментальных представлений V_{ω_i} :

$$\begin{aligned} u_{\alpha_i}(g) &= \frac{\langle \xi_{\omega_i}^- | \pi_i(g) \pi_i(e_i) | \xi_{\omega_i}^+ \rangle}{\langle \xi_{\omega_i}^- | \pi_i(g) | \xi_{\omega_i}^+ \rangle}, & u_{-\alpha_i}(g) &= \frac{\langle \xi_{\omega_i}^- | \pi_i(f_i) \pi_i(g) | \xi_{\omega_i}^+ \rangle}{\langle \xi_{\omega_i}^- | \pi_i(g) | \xi_{\omega_i}^+ \rangle}, \\ u_i(g) &= \langle \xi_{\omega_i}^- | \pi_i(g) | \xi_{\omega_i}^+ \rangle, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где $\pi_i \equiv \pi_{\omega_i}$ – фундаментальное представление в пространстве V_{ω_i} . Определим обобщенные подкрученные миноры как

$$\Delta_{\omega_i, \dot{w}}(g) = \langle \xi_{\omega_i}^- | \pi_{\omega_i}(g) \pi_{\omega_i}(\dot{w}) | \xi_{\omega_i}^+ \rangle, \quad g \in G. \quad (2.10)$$

Тогда координаты u_i и u_{α_i} подкрученного унипотентного элемента $v\dot{w}_0^{-1} \in G$ (где $v \in N_+$) можно выразить через подкрученные миноры (2.10) следующим образом:

$$\begin{aligned} e^{u_i(v\dot{w}_0^{-1})} &= \Delta_{\omega_i, \dot{w}_0^{-1}}(v), \\ u_{\alpha_i}(v\dot{w}_0^{-1}) &= \frac{\langle \xi_i^- | \pi_i(v\dot{w}_0^{-1}) \pi_i(e_i) | \xi_i^+ \rangle}{\langle \xi_i^- | \pi_i(v\dot{w}_0^{-1}) | \xi_i^+ \rangle} = \frac{\langle \xi_i^- | \pi_i(v) \pi_i(\dot{w}_0^{-1}) \pi_i(\dot{s}_i^{-1}) | \xi_i^+ \rangle}{\langle \xi_i^- | \pi_i(v\dot{w}_0^{-1}) | \xi_i^+ \rangle} \\ &= -\frac{\langle \xi_i^- | \pi_i(v) \pi_i(f_i^*) \pi_i(\dot{w}_0^{-1}) | \xi_i^+ \rangle}{\langle \xi_i^- | \pi_i(v\dot{w}_0^{-1}) | \xi_i^+ \rangle} = \frac{\Delta_{\omega_i, \dot{w}_0^{-1} \dot{s}_i^{-1}}(v)}{\Delta_{\omega_i, \dot{w}_0^{-1}}(v)}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

В дальнейшем мы используем следующие краткие обозначения:

$$\begin{aligned} \Delta'_i(v) &:= \langle \xi_{\omega_i}^- | \pi_i(v f_i^* \dot{w}_0^{-1}) | \xi_{\omega_i}^+ \rangle = -\Delta_{\omega_i, \dot{w}_0^{-1} \dot{s}_i^{-1}}(v), \\ \Delta_i(v) &:= \Delta_{\omega_i, \dot{w}_0^{-1}}(v). \end{aligned} \quad (2.12)$$

2.1. Мера на N_+ : доказательство леммы 1.2. В этом разделе мы получим явное выражение (1.21) для меры $d\mu_{N_+}(x)$ на унипотентной подгруппе $N_+ \subset G$ в классической группе, используя факторизационную параметризацию (1.20) на N_+ . Случай общей полупростой группы Ли следует из результатов работы [33].

Напомним, что для приведенного слова $I_\ell = (i_1, \dots, i_{m_\ell})$ элемента w_0 имеется бирациональный изоморфизм $\mathbb{C}^{m_\ell} \dashrightarrow N_+$. В частности, фиксируя унипотентный элемент $v \in N_+^{(0)}$, мы получаем факторизационное представление

$$v(t) = X_{i_1}(t_1) X_{i_2}(t_2) \cdots X_{i_{m_\ell}}(t_{m_\ell}), \quad (2.13)$$

где $X_i(t) = e^{t f_i}$. Переменные t_i называются параметрами факторизации для элемента v .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть $v(t) \in N_+^{(0)}$ – факторизационная параметризация (2.13), отвечающая приведенному слову $I = (i_1, \dots, i_{m_\ell})$. Тогда мера

$$d\mu_{N_+}(v(t)) = \prod_{k=1}^{\ell} \prod_{i=1}^{m_\ell} t_i^{\langle \omega_k, \gamma_i \rangle} \cdot \bigwedge_{i=1}^{m_\ell} \frac{dt_i}{t_i} \quad (2.14)$$

является ограничением правоинвариантной меры $d\mu_{N_+}$ на $N_+^{(0)}$, т. е.

$$d\mu_{N_+}(v(t)) = d\mu_{N_+}(v(t) X_j(\tau)), \quad j = 1, \dots, \ell. \quad (2.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Исследуем зависимость от выбора приведенного слова $I = (i_1, \dots, i_{m_\ell})$. Пусть $t^I = (t_1^I, \dots, t_{m_\ell}^I)$ – параметры факторизации, отвечающие редуцированному слову I . Согласно [16; теорема 4.3], имеются следующие выражения для матричных элементов:

$$\Delta_k(t^I) := \Delta_k(x(t^I)w_0^{-1}) = \prod_{i=1}^{m_\ell} (t_i^I)^{\langle \omega_k, \gamma_i \rangle}. \quad (2.16)$$

Две параметризации $x(t^I)$ и $x(t^{I'})$ открытого множества $N_+^{(0)}$, отвечающие приведенным словам I и I' , связаны бирациональным преобразованием.

ЛЕММА 2.1. Для двух параметризаций $x(t^I)$ и $x(t^{I'})$, соответствующих приведенным словам I и I' , имеют место следующие утверждения.

1. Соответствующие матричные элементы совпадают:

$$\Delta_k(t^I) = \Delta_k(t^{I'}), \quad 1 \leq k \leq \ell. \quad (2.17)$$

2. Следующие дифференциалы совпадают:

$$\bigwedge_{j=1}^{m_\ell} \frac{dt_j^I}{t_j^I} = \bigwedge_{j=1}^{m_\ell} \frac{dt_j^{I'}}{t_j^{I'}}. \quad (2.18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Как показано в [14], бирациональные преобразования $R_I^{I'}$ на N_+ , отвечающие любой паре приведенных слов I и I' , можно представить в виде композиции элементарных преобразований (так называемых 3-, 4- и 6-движений). Поэтому для доказательства (2.17), (2.18) надо проверить тождества для элементарных движений только в следующих случаях. А именно, в случае классических групп Ли достаточно рассматривать следующие два бирациональные преобразования $R_I^{I'}: t^I \rightarrow t^{I'}$:

- 1) $X_i(t_1)X_j(t_2)X_i(t_3) = X_j(t'_1)X_i(t'_2)X_j(t'_3)$ при $a_{ij} = a_{ji} = -1$,
- 2) $X_j(t_1)X_i(t_2)X_j(t_3)X_i(t_4) = X_i(t'_1)X_j(t'_2)X_i(t'_3)X_j(t'_4)$ при $a_{ij} = -1$ и $a_{ji} = -2$, где мы обозначаем $t = t^I$ и $t' = t^{I'}$.

Доказательство тождества (2.17) для элементарных 3-, 4- и 6-движений следует непосредственно из результатов работы [16]. Для полноты изложения достаточно проверить (2.18) для 3- и 4-движений.

1) В случае $a_{ij} = a_{ji} = -1$ мы должны рассмотреть бирациональное преобразование между параметризациями, отвечающими приведенным словам $I = (\dots iji \dots)$ и $I' = (\dots jji \dots)$. Имеется следующее соотношение между параметрами:

$$v = X_i(t_1)X_j(t_2)X_i(t_3) = X_j(t'_1)X_i(t'_2)X_j(t'_3),$$

где

$$t'_1 = \frac{t_2 t_3}{t_1 + t_3}, \quad t'_2 = t_1 + t_3, \quad t'_3 = \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_3}.$$

Непосредственная проверка показывает, что

$$d \ln t'_1 \wedge d \ln t'_2 \wedge d \ln t'_3 = d \ln t_1 \wedge d \ln t_2 \wedge d \ln t_3. \quad (2.19)$$

2) В случае $a_{ij} = -1$, $a_{ji} = -2$ мы должны рассмотреть бирациональное преобразование между параметризациями, отвечающими приведенным словам $I = (\dots jiji \dots)$ и $I' = (\dots ijij \dots)$. Тем самым, мы получаем следующее соотношение между параметрами:

$$X = X_j(t_1)X_i(t_2)X_j(t_3)X_i(t_4) = X_i(t'_1)X_j(t'_2)X_i(t'_3)X_j(t'_4),$$

где

$$\begin{aligned} t'_1 &= \frac{t_2 t_3^2 t_4}{t_1^2 t_2 + (t_1 + t_3)^2 t_4}, & t'_2 &= \frac{t_1^2 t_2 + (t_1 + t_3)^2 t_4}{t_1 t_2 + (t_1 + t_3) t_4}, \\ t'_3 &= \frac{(t_1 t_2 + (t_1 + t_3) t_4)^2}{t_1^2 t_2 + (t_1 + t_3)^2 t_4}, & t'_4 &= \frac{t_1 t_2 t_3}{t_1 t_2 + (t_1 + t_3) t_4}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Можно непосредственно проверить следующее тождество:

$$d \ln t'_1 \wedge d \ln t'_2 \wedge d \ln t'_3 \wedge d \ln t'_4 = d \ln t_1 \wedge d \ln t_2 \wedge d \ln t_3 \wedge d \ln t_4.$$

Это завершает доказательство леммы.

Сейчас мы готовы завершить доказательство предложения 2.1. Чтобы установить правоинвариантность меры $d\mu_{N_+}(v)$, мы используем (2.17), (2.18). Для любого простого корня α_i можно найти приведенное слово $I(\alpha_i) = (j_1, \dots, j_m)$ элемента w_0 с $m = m_\ell$, для которого $j_m = i$. Тогда из тождеств (2.17), (2.18) следует, что

$$d\mu_{N_+}(v(t^{I(\alpha_i)})) = d\mu_{N_+}(v(t^{I_\ell})).$$

Таким образом, мы получаем

$$v(t^{I(\alpha_i)}) \cdot X_i(\tau) = X_{j_1}(t_1)X_{j_{m-1}}(t_{m-1})X_i(t_m + \tau). \quad (2.21)$$

По построению параметр факторизации t_m входит только в (мономиальное) выражение для $\Delta_j(v(t))$ как однородный множитель первой степени. Тем самым, параметр факторизации t_m возникает в выражении для меры $d\mu_{N_+}$ только в α_j -компоненте $\Delta_j(v(t)) d \ln t_m$, а значит, мера $d\mu_{N_+}$ инвариантна относительно сдвига $t_m \rightarrow t_m + \tau$. Итак, мера правоинвариантна относительно действия $X_j(\tau)$ для любого $j = 1, \dots, \ell$ и, значит, правоинвариантна относительно всей группы N_+ . Это завершает доказательство предложения 2.1, а с учетом (2.16) и доказательство леммы 1.2.

2.2. Векторы Уиттекера для классических групп Ли: доказательства леммы 1.1 и предложения 1.1. В этом разделе мы получим выражения для левого и правого $\mathfrak{g}$ -векторов Уиттекера в терминах матричных элементов конечномерных представлений алгебры $\mathfrak{g}$. Векторы Уиттекера удовлетворяют следующим уравнениям:

$$f_i \psi_R = -\psi_R, \quad e_i \psi_L = -\psi_L, \quad i = 1, \dots, \ell. \quad (2.22)$$

Интегрируя действия нильпотентных подалгебр Ли $\mathfrak{n}_\pm \subset \mathfrak{g}$ до действий нильпотентных подгрупп Ли $N_\pm \subset G$, уравнения на $\mathfrak{g}$ -функции Уиттекера можно переписать в терминах однопараметрических подгрупп $X_i(t) \subset N_+$ и $Y_i(t) \subset N_-$ следующим образом:

$$\pi_\mu(X_i(t))\psi_R(v) = e^{-t}\psi_R(v), \quad \pi_\mu(Y_i(t))\psi_L(v) = e^{-t}\psi_L(v),$$

где $i = 1, \dots, \ell$, $v \in N_+$. Эквивалентно, для любого $z_{\pm} \in N_{\pm}$ имеем

$$\begin{aligned}\pi_{\mu}(z_+)\psi_R(v) &= \exp\left\{-\sum_{i=1}^{\ell}(z_+)_i\right\}\psi_R(v), \\ \pi_{\lambda}(z_-)\psi_L(v) &= \exp\left\{-\sum_{i=1}^{\ell}(z_-)_i\right\}\psi_L(v),\end{aligned}\tag{2.23}$$

где $(z_{\pm})_i := u_{\pm\alpha_i}(z_{\pm})$. Конструкция правого вектора Уиттекера получается непосредственно. Заметим, что имеют место простые тождества

$$u_{\alpha_i}(v_1 v_2) = u_{\alpha_i}(v_1) + u_{\alpha_i}(v_2), \quad v_1, v_2 \in N_+.$$

Тогда из (2.23) мы заключаем, что правый вектор Уиттекера задается мультипликативным характером максимальной унипотентной подгруппы N_+ :

$$\psi_R(v) = \exp\left\{-\sum_{i=1}^{\ell} v_i\right\} = \exp\left\{-\frac{\Delta_{\omega_i, \dot{s}_i^{-1}}(v)}{\Delta_{\omega_i, 1}(v)}\right\}, \quad v \in N_+, \tag{2.24}$$

где $v_i := u_{\alpha_i}(v)$ и мы используем (2.9) чтобы выразить v_i через матричные элементы.

Для построения левого вектора Уиттекера в терминах матричных элементов применим внутренний автоморфизм группы G , действующий на $z \in G$ как $z^{\tau} = \dot{w}_0^{-1} z \dot{w}_0$. Принимая во внимание, что $\dot{w}_0^{-1} X_{i^*}(-t) \dot{w}_0 = Y_i(t)$, мы получаем $\dot{w}_0^{-1} N_+ \dot{w}_0 = N_-$. Теперь уравнение на левый вектор Уиттекера

$$\pi_{\mu}(Y_i(t))\psi_L(v) = e^{-t}\psi_L(v), \quad i = 1, \dots, \ell,$$

может быть записано в виде

$$\pi_{\mu}(z^{\tau})\psi_L(v) = \exp\left\{-\sum_{i=1}^{\ell} z_i\right\}\psi_L(v), \quad z \in N_+. \tag{2.25}$$

Левый вектор Уиттекера можно выразить через правый вектор:

$$\psi_L(v) = \psi_R(v \dot{w}_0^{-1})^{-1},$$

где функция ψ_R рассматривается как B_- -эквариантная функция на G (точное определение дано в (1.9)). Используя разложение Гаусса и параметризацию (2.8), (2.9), мы получаем для левого вектора Уиттекера

$$\psi_L(v) = \exp\left\langle i\lambda - \rho, \sum_{i=1}^{\ell} u_i(v \dot{w}_0^{-1}) h_i \right\rangle \exp\left\{\sum_{i=1}^{\ell} u_{\alpha_i}(v \dot{w}_0^{-1})\right\}.$$

В терминах матричных элементов конечномерных представлений имеет место представление

$$\begin{aligned}\psi_L(v) &= \prod_{i=1}^{\ell} \Delta_{\omega_i, \dot{w}_0^{-1}}(v)^{\langle i\lambda - \rho, \alpha_i^{\vee} \rangle} \exp\left\{\frac{\Delta_{\omega_i, \dot{w}_0^{-1} \dot{s}_i^{-1}}(v)}{\Delta_{\omega_i, \dot{w}_0^{-1}}(v)}\right\} \\ &= \prod_{i=1}^{\ell} \Delta_i(v)^{\langle i\lambda - \rho, \alpha_i^{\vee} \rangle} \exp\left\{-\frac{\Delta'_i(v)}{\Delta_i(v)}\right\}.\end{aligned}\tag{2.26}$$

Это завершает доказательство леммы 1.1. Доказательство предложения 1.1 можно получить, комбинируя выражения для правого вектора Уиттекера и левого вектора Уиттекера, подкрученных соответственно на элементы e^{H_L} и e^{H_R} максимального тора, такие, что $e^{H_L+H_R} = \exp(-h_x) = \exp\left\{-\sum_{i=1}^{\ell} \langle \omega_i, x \rangle h_i\right\}$.

2.3. Явные вычисления для матричных элементов. Для построения интегральных представлений функций Уиттекера надо выразить различные матричные элементы, входящие в интегральную формулу (1.19), используя факторизационную и модифицированную факторизационную параметризацию элементов группы. Это можно сделать непосредственно, применяя результаты работ [16], [15]. Ниже мы используем рекурсивную структуру приведенного слова I_ℓ , отвечающего элементу максимальной длины w_0 в группе Вейля $W(X_\ell)$ классической алгебры Ли типа X_ℓ для $X = A, B, C, D$. Эта рекурсивная структура приводит к рекурсивным формулам для подходящих соотношений матричных элементов. Решая рекурсивные уравнения, мы находим явные выражения для ψ_L и ψ_R в (модифицированной) факторизационной параметризации. Это дает соответствующие интегральные представления для функций Уиттекера классических групп Ли. В случае модифицированной факторизационной параметризации мы получаем обобщение интегрального представления Гивенталья для $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_{\ell+1}$ на остальные алгебры Ли классического типа.

2.3.1. Выражения для $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$ -матричных элементов: доказательства теоремы 1.1 и теоремы 1.3. В этом пункте мы находим выражения для матричных элементов, которые связаны с построением интегральных представлений для $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$ -функций Уиттекера, используя факторизационную параметризацию открытого подмножества $N_+ \subset \mathrm{GL}(\ell+1)$. Это дает доказательство интегральных представлений $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$ -функций Уиттекера, анонсированных в части 1.

Собственные функции $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$ - и $\mathfrak{sl}_{\ell+1}$ -цепочек Тоды отличаются простым множителем (1.31), и векторы Уиттекера ψ_L , ψ_R совпадают для обеих алгебр Ли. Мы используем корневые данные для $\mathfrak{sl}_{\ell+1}$ для вычисления матричных элементов $\Delta_{\omega_i, \tilde{w}_0^{-1}}(v)$, $\Delta_{\omega_i, \tilde{w}_0^{-1} s_i^{-1}}(v)$, $i = 1, \dots, \ell$, в фундаментальных представлениях алгебры Ли $\mathfrak{sl}_{\ell+1}$ и дополнительно полагаем $\Delta_{\omega_{\ell+1}, \tilde{w}_0^{-1}}(v) = 1$. Корневые данные для $\mathfrak{sl}_{\ell+1}$ указаны в (1.28). Разложение $w_0 = s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_m}$ элемента максимальной длины $w_0 \in S_{\ell+1}$, соответствующее приведенному слову $I_\ell = (i_1, \dots, i_m)$ при $m = m_\ell = \ell(\ell+1)/2$, определяет упорядочение на положительных корнях: $R_+^\vee = \{\gamma_k^\vee = s_{i_1} \dots s_{i_{k-1}} \alpha_k^\vee, k = 1, \dots, m_\ell\}$. Мы рассматриваем разложение элемента w_0 , соответствующее следующему приведенному слову:

$$I_\ell = (1, 21, \dots, (\ell \dots 21)).$$

Соответствующее упорядочение положительных корней имеет вид:

$$\begin{aligned} \gamma_1^\vee &= \alpha_1^\vee, & \gamma_2^\vee &= \alpha_1^\vee + \alpha_2^\vee, & \gamma_{m_{\ell-1}+1}^\vee &= \alpha_1^\vee + \dots + \alpha_\ell^\vee, \\ & & \gamma_3^\vee &= \alpha_2^\vee, & & \vdots \\ & & & & & \gamma_{m_\ell}^\vee = \alpha_\ell^\vee. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Рекурсивная параметризация открытого подмножества $N_+^{(0)}$ в N_+ , соответствующая приведенному слову I_ℓ , приобретает следующий вид. Для $v^{A_\ell} \in N_+^{(0)}$ мы имеем

$$v^{A_\ell}(y) = \mathfrak{X}_1(y)\mathfrak{X}_2(y) \cdots \mathfrak{X}_\ell(y), \quad (2.28)$$

где

$$\mathfrak{X}_k(y) = X_k(y_{k,n_{k,k}}) \cdots X_2(y_{2,n_{k,2}})X_1(y_{1,n_{k,1}})$$

и $\mathfrak{X}_1 = X_1(y_{1,1})$. Здесь использованы следующие обозначения. Пусть $|I_\ell| = m_\ell$ – длина элемента w_0 . Для системы корней типа A_ℓ имеем $m_\ell = \ell(\ell+1)/2$. Тогда для любого $k \in \{1, \dots, \ell\}$ рассмотрим подслово

$$I_k = (i_1, \dots, i_{m_k}) \subset I_\ell = (i_1, \dots, i_{m_k}, i_{m_k+1}, \dots, i_{m_\ell}),$$

где $|I_k| = m_k = k(k+1)/2$. Пусть A_k – соответствующая корневая подсистема в R_+ и $v^{A_k} = \mathfrak{X}_1 \cdots \mathfrak{X}_k$ – факторизационная параметризация на соответствующей подгруппе. Параметры факторизации для $v^{A_k}(y)$ естественно пронумеровать так: $\{y_{i,n}; 1 \leq i \leq k, 1 \leq n \leq n_{k,i}\}$ и

$$n_{k,i} = k+1-i, \quad 1 \leq i \leq \ell. \quad (2.29)$$

Мы интересуемся явными выражениями для следующих матричных элементов в терминах параметров факторизации $\{y_{i,n}\}$:

$$\Delta_i(v) := \langle \xi_{\omega_i}^- | \pi_i(v w_0^{-1}) | \xi_{\omega_i}^+ \rangle, \quad \Delta'_i(v) := \langle \xi_{\omega_i}^- | \pi_i(v f_{i^*} w_0^{-1}) | \xi_{\omega_i}^+ \rangle,$$

где $\pi_i = \pi_{\omega_i}$, $i = 1, \dots, \ell$, – фундаментальное представление со старшим весом ω_i , а $\xi_{\omega_i}^+$ и $\xi_{\omega_i}^-$ – старший и младший весовые векторы в представлениях π_i , определенные условиями $\mathfrak{n}_\pm \xi_i^\pm = 0$ и нормализованные так, что $\langle \xi_{\omega_i}^+ | \xi_{\omega_i}^- \rangle = 1$. Заметим, что в соответствии с (2.5) для алгебры Ли $\mathfrak{sl}_{\ell+1}$ мы получаем $i^* = \ell+1-i$. Доказательство следующего утверждения получается последовательным вычислением матричных элементов с учетом соотношений Серра и определяющих идеалов для фундаментальных представлений с использованием техники работы [16].

ЛЕММА 2.2. *При $i = 1, \dots, \ell$ имеют место следующие рекурсивные соотношения:*

$$\begin{aligned} \Delta_i(v)^{A_\ell} &= \left(\prod_{k=1}^i y_{\ell+1-k,i} \right) \Delta_i(v)^{A_{\ell-1}}; \\ \left(\frac{\Delta'_i(v)}{\Delta_i(v)} \right)^{A_\ell} &= \frac{1}{y_{\ell+1-i,i}} + (1 - \delta_{i,\ell}) \frac{y_{\ell-i,i+1}}{y_{\ell+1-i,i}} \left(\frac{\Delta'_i(v)}{\Delta_i(v)} \right)^{A_{\ell-1}}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Матричные элементы теперь можно найти, решая рекурсивные соотношения (2.30).

ЛЕММА 2.3. *Пусть v определено формулами (1.32), (1.33). Тогда при $i = 1, \dots, \ell$ имеют место следующие соотношения на матричные элементы v в терминах переменных $y_{i,k}$:*

$$\Delta_{\omega_i, s_i}(v)^{A_\ell} = \sum_{n=i}^{\ell} y_{i,n},$$

$$\Delta_i(v)^{A_\ell} = \prod_{k=i}^{\ell} \prod_{n=1}^i y_{k+1-n,n}, \quad (2.31)$$

$$\left(\frac{\Delta'_k(v)}{\Delta_i(v)} \right)^{A_\ell} = \frac{1}{y_{\ell+1-i,i}} \left[1 + (1 - \delta_{i,\ell}) \sum_{n=1}^{\ell-i} \prod_{k=1}^n \frac{y_{\ell+1-k-i,i+1}}{y_{\ell+1-k-i,i}} \right].$$

Подставляя выражение (2.31) в (1.17), (1.18) и комбинирую результат с выражением (1.21) для меры, мы собираем полученные выражения в (1.19) и таким образом получаем интегральную формулу (1.37), что и завершает доказательство теоремы 1.1.

Рассмотрим интегральное представление для $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$ -функции Уиттекера в модифицированной факторизационной параметризации (1.41). Начнем с аналога рекурсивных соотношений (2.30) для матричных элементов в модифицированной факторизационной параметризации. Для упрощения вида рекурсивных соотношений оказывается полезным рассматривать модифицированную версию

$$y_{i,n} = e^{x_{\ell+1,i} - x_{\ell+1,i+1}} e^{x_{n+i,i+1} - x_{n+i-1,i}} \quad (2.32)$$

факторизационной параметризации (1.41) с учетом действия части e^{H_R} (1.46) элемента максимального тора e^{-h_x} . Замена переменных (2.32), примененная к (2.30), приводит к следующему.

ЛЕММА 2.4. 1) В модифицированной факторизационной параметризации (2.32) рекурсивные соотношения (2.30) имеют вид

$$\left(\frac{\Delta'_i(v)}{\Delta_i(v)} \right)^{A_\ell} = e^{x_{\ell,\ell-i+1} - x_{\ell+1,\ell-i+1}} + \frac{e^{x_{\ell,\ell-i+1} - x_{\ell,\ell-i}}}{e^{x_{\ell+1,\ell-i+1} - x_{\ell+1,\ell-i}}} \left(\frac{\Delta'_i(v)}{\Delta_i(v)} \right)^{A_{\ell-1}}. \quad (2.33)$$

2) Решение рекурсивных уравнений можно записать как

$$\left(\frac{\Delta'_i(v)}{\Delta_i(v)} \right)^{A_\ell} = \sum_{n=1}^{\ell+1-i} e^{x_{n+i-1,n} - x_{n+i,n}}, \quad (2.34)$$

$$\Delta_{\omega_i, \dot{w}_0^{-1}}(v)^{A_\ell} = \exp \left\{ \sum_{n=1}^i (x_{\ell+1,n} - x_{i,n}) \right\}, \quad (2.35)$$

$$\left(\frac{\Delta_i(v)}{\Delta_{i+1}(v)} \right)^{A_\ell} = e^{-x_{\ell+1,i+1}} \exp \left\{ \sum_{k=1}^{i+1} x_{i+1,k} - \sum_{k=1}^i x_{i,k} \right\},$$

где $i = 1, \dots, \ell$ и $\Delta_{\ell+1}(v) = 1$.

Подставляя (2.34), (2.35) в (1.17), (1.18), мы получаем векторы Уиттекера в параметризации (2.32). Полагая $x_{\ell,k} = 0$, $k = 1, \dots, \ell + 1$, мы приходим к выражениям для векторов Уиттекера из леммы 1.4. Для того чтобы доказать теорему 1.3, остается учесть вид меры $d\mu_{N_+}$ в модифицированной факторизационной параметризации. Это завершает доказательство теоремы 1.3.

2.3.2. *Выражения для $\mathfrak{so}_{2\ell+1}$ -матричных элементов: доказательства теоремы 1.4 и теоремы 1.6.* В этом пункте мы приводим выражения для матричных элементов, возникающих в конструкции интегральных представлений $\mathfrak{so}_{2\ell+1}$ -функций Уиттекера. Здесь используется факторизационная параметризация открытого подмножества в $N_+ \subset \mathrm{SO}(2\ell + 1)$. Это дает доказательство интегральных представлений для $\mathfrak{so}_{2\ell+1}$ -функций Уиттекера, анонсированных в части 1.

Мы используем корневые данные, описанные в (1.64). Разложение $w_0 = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_{m_\ell}}$ элемента максимальной длины $w_0 \in W(B_\ell)$, отвечающее приведенному слову $I_\ell = (i_1, \dots, i_{m_\ell})$ с $m_\ell = \ell^2$, определяет следующее упорядочение на множестве положительных корней: $R_+^\vee = \{\gamma_k^\vee = s_{i_1} \cdots s_{i_{k-1}} \alpha_k^\vee, k = 1, \dots, m_\ell\}$ для алгебры $\mathfrak{so}_{2\ell+1}$. Мы рассматриваем разложение элемента w_0 , описываемое следующим приведенным словом:

$$I_\ell = (1, 212, \dots, (\ell \dots 212 \dots \ell)).$$

Соответствующее упорядочение положительных корней задано как

$$\begin{aligned} \gamma_2^\vee &= \alpha_1^\vee + \alpha_2^\vee, \\ \gamma_1^\vee &= \alpha_1^\vee, \quad \gamma_3^\vee = \alpha_1^\vee + 2\alpha_2^\vee, \quad \dots \\ \gamma_4^\vee &= \alpha_2^\vee, \\ \gamma_{(\ell-1)^2+1}^\vee &= \alpha_1^\vee + 2(\alpha_2^\vee + \cdots + \alpha_{\ell-1}^\vee) + \alpha_\ell^\vee, \\ \gamma_{(\ell-1)^2+2}^\vee &= \alpha_1^\vee + 2(\alpha_2^\vee + \cdots + \alpha_{\ell-2}^\vee) + \alpha_{\ell-1}^\vee + \alpha_\ell^\vee, \\ &\dots\dots\dots (2.36) \\ \gamma_{\ell(\ell-1)}^\vee &= \alpha_1^\vee + \alpha_2^\vee + \cdots + \alpha_\ell^\vee, \\ \gamma_{\ell(\ell-1)+1}^\vee &= \alpha_1^\vee + 2(\alpha_2^\vee + \cdots + \alpha_\ell^\vee), \\ \gamma_{\ell(\ell-1)+2}^\vee &= \alpha_2^\vee + \cdots + \alpha_\ell^\vee, \\ &\dots\dots\dots \\ \gamma_{\ell^2}^\vee &= \alpha_\ell^\vee. \end{aligned}$$

Рекурсивная параметризация открытого подмножества $N_+^{(0)}$ в N_+ , соответствующая приведенному слову I_ℓ , имеет следующий вид. Для $v^{B_\ell} \in N_+^{(0)}$ мы получаем

$$v^{B_\ell}(y) = \mathfrak{X}_1(y) \mathfrak{X}_2(y) \cdots \mathfrak{X}_\ell(y), \quad (2.37)$$

где

$$\mathfrak{X}_k(y) = X_k(y_{k,n_{k,k}-1}) \cdots X_2(y_{2,n_{k,2}-1}) X_1(y_{1,n_{k,1}}) X_2(y_{2,n_{k,2}}) \cdots X_k(y_{k,n_{k,k}})$$

и $\mathfrak{X}_1 = X_1(y_{1,1})$. Для любого $k \in \{1, \dots, \ell\}$ рассмотрим подслово

$$I_k = (i_1, \dots, i_{m_k}) \subset I_\ell = (i_1, \dots, i_{m_k}, i_{m_k+1}, \dots, i_{m_\ell})$$

с $|I_k| = m_k = k^2$. Пусть B_k – соответствующая подсистема корней в R_+ и $v^{B_k} = \mathfrak{X}_1 \cdots \mathfrak{X}_k$ – факторизационная параметризация на соответствующей подгруппе. Параметры факторизации для $v^{B_k}(y)$ можно естественно занумеровать элементами $\{y_{i,n}; 1 \leq i \leq k, 1 \leq n \leq n_{k,i}\}$, где

$$n_{k,1} = k, \quad n_{k,i} = 2(k+1-i), \quad 1 < i \leq \ell. \quad (2.38)$$

Также мы используем обозначение $n_i := n_{\ell,i}$.

Мы интересуемся явными выражениями для матричных элементов в терминах параметров факторизации $\{y_{i,n}\}$:

$$\Delta_i(v) := \langle \xi_{\omega_i}^- | \pi_i(v \dot{\omega}_0^{-1}) | \xi_{\omega_i}^+ \rangle, \quad \Delta'_i(v) := \langle \xi_{\omega_i}^- | \pi_i(v f_{i^*} \dot{\omega}_0^{-1}) | \xi_{\omega_i}^+ \rangle,$$

где $\pi_i = \pi_{\omega_i}$ – фундаментальное представление со старшим весом ω_i , а $\xi_{\omega_i}^+$ и $\xi_{\omega_i}^-$ – старший и младший векторы в представлении π_i , для которых $\langle \xi_{\omega_i}^+ | \xi_{\omega_i}^- \rangle = 1$. Заметим, что в случае алгебры Ли $\mathfrak{so}_{2\ell+1}$ мы имеем $i \rightarrow i^*$ для инволюции, определенной в (2.5). Доказательство следующего утверждения получается последовательным вычислением матричных элементов с учетом соотношений Серра и определяющих идеалов для фундаментальных представлений с использованием техники работы [16].

ЛЕММА 2.5. Пусть $v := v^{B_\ell}$, где v^{B_ℓ} определено в (2.37). Тогда имеют место следующие рекурсивные уравнения:

$$\begin{aligned} \Delta_1(v)^{B_\ell} &= \left(y_{1,\ell} \prod_{k=2}^{\ell} y_{k,n_k-1} \right) \cdot \Delta_1(v)^{B_{\ell-1}}, \\ \Delta_i(v)^{B_\ell} &= \left(y_{1,\ell}^2 \prod_{k=2}^i y_{k,n_k-1} y_{k,n_k} \prod_{k=i+1}^{\ell} y_{k,n_k-1}^2 \right) \cdot \Delta_i(v)^{B_{\ell-1}}, \quad 1 < i \leq \ell, \\ \left(\frac{\Delta'_1(v)}{\Delta_1(v)} \right)^{B_\ell} &= \frac{1}{y_{1,\ell}} \left(1 + \frac{y_{2,2(\ell-1)}}{y_{2,2(\ell-1)-1}} \right) + \frac{y_{2,2(\ell-1)}}{y_{2,2(\ell-1)-1}} \left(\frac{\Delta'_1(v)}{\Delta_1(v)} \right)^{B_{\ell-1}}, \\ \left(\frac{\Delta'_k(v)}{\Delta_k(v)} \right)^{B_\ell} &= \frac{1}{y_{k,2(\ell+1-k)}} \left(1 + \frac{y_{k+1,2(\ell-k)}}{y_{k+1,2(\ell-k)-1}} \right) \\ &\quad + \frac{y_{k,2(\ell+1-k)-1}}{y_{k,2(\ell+1-k)}} \frac{y_{k+1,2(\ell-k)}}{y_{k+1,2(\ell-k)-1}} \left(\frac{\Delta'_k(v)}{\Delta_k(v)} \right)^{B_{\ell-1}}, \\ &\quad k = 2, \dots, \ell-1, \\ \left(\frac{\Delta'_\ell(v)}{\Delta_\ell(v)} \right)^{B_\ell} &= \frac{1}{y_{\ell,2}}, \end{aligned} \quad (2.39)$$

где $n_k = 2(\ell+1-k)$, $k = 2, \dots, \ell$, и $\prod_{n=M}^N a_n = 1$ при $N < M$.

Теперь матричные элементы можно найти, разрешая указанные выше рекурсивные соотношения.

ЛЕММА 2.6. Пусть v определено как в (1.67) и (1.68). Тогда имеют место следующие выражения матричных элементов v через переменные $y_{i,k}$:

$$\Delta_{\omega_{i,s_i}}(v)^{B_\ell} = \sum_{n=i}^{\ell} y_{i,n}, \quad i = 1, \dots, \ell, \quad (2.40)$$

$$\Delta_1(v)^{B_\ell} = \prod_{n=1}^{\ell} y_{1,n} \cdot \prod_{k=2}^{n_1} \prod_{n=1}^{n_k/2} y_{k,2n-1}, \quad (2.41)$$

$$\Delta_k(v)^{B_\ell} = \prod_{n=2}^{n_1} y_{1,n}^2 \cdot \prod_{i=k+1}^{\ell} \prod_{n=1}^{n_i/2} y_{i,2n-1}^2 \cdot \prod_{i=2}^k \prod_{n=1}^{n_i/2} y_{i,2n-1} y_{i,2n}, \quad (2.42)$$

$$k = 2, \dots, \ell,$$

$$\left(\frac{\Delta'_1(v)}{\Delta_1(v)} \right)^{B_\ell} = \sum_{n=1}^{\ell} \frac{1}{y_{1,n}} \left(1 + \frac{y_{2,2(n-1)}}{y_{2,2(n-1)-1}} \right) \prod_{i=n+1}^{\ell} \frac{y_{2,2(i-1)}}{y_{2,2(i-1)-1}}, \quad (2.43)$$

$$\left(\frac{\Delta'_k(v)}{\Delta_k(v)} \right)^{B_\ell} = \sum_{n=1}^{n_k/2} \frac{1}{y_{k,2n}} \left(1 + \frac{y_{k+1,2(n-1)}}{y_{k+1,2(n-1)-1}} \right) \prod_{i=n+1}^{n_k/2} \frac{y_{k+1,2(i-1)}}{y_{k+1,2(i-1)-1}} \frac{y_{k,2i-1}}{y_{k,2i}}, \quad (2.44)$$

$$k = 2, \dots, \ell,$$

где $n_1 = \ell$ и $n_k = 2(\ell + 1 - k)$.

Доказательство леммы 2.5 следует из непосредственной подстановки выражений из леммы 2.6 в (2.24) и (2.26). Аналогично, подставляя полученные выражения из леммы 2.6 в формулу (1.19) из предложения 1.1, мы получаем интегральную формулу (1.74), таким образом завершая доказательство теоремы 1.4.

Рассмотрим интегральное представление для $\mathfrak{so}_{2\ell+1}$ -функции Уиттекера в модифицированной факторизационной параметризации (1.89), (1.90). Начнем с аналога рекурсивных соотношений (2.39) для матричных элементов в модифицированной факторизационной параметризации. Для упрощения формулировки рекурсивных соотношений оказывается удобным рассматривать модифицированную версию

$$\begin{aligned} y_{1,1} &= e^{-x_{\ell,1}} e^{x_{1,1} - z_{1,1}}, & y_{1,k} &= e^{-x_{\ell,1}} (e^{x_{k-1,1} - z_{k,1}} + e^{x_{k,1} - z_{k,1}}), \\ y_{k,2r-1} &= e^{x_{\ell,k-1} - x_{\ell,k}} e^{z_{k+r-1,k} - x_{k+r-2,k-1}}, & (2.45) \\ y_{k,2r} &= e^{x_{\ell,k-1} - x_{\ell,k}} e^{z_{k+r-1,k} - x_{k+r-1,k-1}} \end{aligned}$$

при $k = 2, \dots, \ell$ и $r = 1, \dots, \ell + 1 - k$, модифицированной параметризации (1.89) с учетом действия части H_R образующих Картана (1.99).

ЛЕММА 2.7. *Для унитарного элемента общего вида $v \in N_+^{(0)}$ имеют место следующие выражения для матричных элементов v через переменные $x_{k,i}, z_{k,i}$, определенные в (2.45):*

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_1^2(v)}{\Delta_2(v)} &= e^{x_{1,1} - 2z_{1,1}}, \\ \frac{\Delta_k(v)}{\Delta_{k+1}(v)} &= \exp \left\{ - \sum_{i=1}^k x_{k,i} - 2z_{k,1} + 2 \sum_{i=2}^k z_{k,i} - \sum_{i=1}^{k-1} x_{k-1,i} \right\} \\ &\quad \times (e^{x_{k-1,1}} + e^{x_{k,1}})^2, \quad k = 2, \dots, \ell, \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$\Delta_{\ell+1}(v) = 1;$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta'_1(v)}{\Delta_1(v)} &= \sum_{k=1}^{\ell} e^{z_{k,1}}, \\ \frac{\Delta'_k(v)}{\Delta_k(v)} &= e^{x_{k,k} - z_{k,k}} + \sum_{n=k+1}^{\ell} (e^{x_{n-1,k} - z_{n,k}} + e^{x_{n,k} - z_{n,k}}), \quad k = 2, \dots, \ell. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Здесь $x_{\ell,k} = 0$, $k = 1, \dots, \ell$. Мы полагаем, что члены вида $e^{z_{\ell+1,i}}$ в (2.47) сокращаются и, как обычно, $\sum_{n=i}^j a_n = 0$, если $i > j$.

Подставляя (2.46), (2.47) в (1.17), (1.18), мы получаем выражения для векторов Уиттекера в параметризации (2.45). Полагая $x_{\ell,k} = 0$, $k = 1, \dots, \ell$, мы приходим к выражениям для векторов Уиттекера из леммы 1.6. Для доказательства теоремы 1.6 остается учесть вид меры $d\mu_{N_+}$ в модифицированной факторизационной параметризации. Это завершает доказательство теоремы 1.6.

2.3.3. Выражения для $\mathfrak{sp}_{2\ell}$ -матричных элементов: доказательства теоремы 1.8 и теоремы 1.10. В этом пункте мы находим выражения для матричных элементов, возникающих в конструкции интегральных представлений $\mathfrak{sp}_{2\ell}$ -функций Уиттекера, используя факторизационную параметризацию открытого подмножества в $N_+ \subset \mathrm{Sp}(2\ell)$. Это дает доказательство интегральных представлений для $\mathfrak{sp}_{2\ell}$ -функций Уиттекера, анонсированных в части 1.

Мы используем корневые данные для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2\ell}$, определенные в (1.131). Разложение $w_0 = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_m}$, $m = m_\ell$, элемента максимальной длины $w_0 \in W(C_\ell)$, отвечающее приведенному слову $I_\ell = (i_1, \dots, i_{m_\ell})$, определяет следующее упорядочение положительных корней: $R_+^\vee = \{\gamma_k^\vee = s_{i_1} \cdots s_{i_{k-1}} \alpha_k^\vee, k = 1, \dots, m_\ell\}$. Для системы корней типа C_ℓ мы имеем $m_\ell = \ell^2$. Мы рассматриваем разложение элемента w_0 , описываемое следующим приведенным словом:

$$I_\ell = (1, 212, \dots, (\ell \dots 212 \dots \ell)).$$

Соответствующее упорядочение на положительных корнях имеет вид:

$$\begin{aligned}
 \gamma_{(\ell-1)^2+1}^\vee &= 2\alpha_1^\vee + \cdots + 2\alpha_{\ell-1}^\vee + \alpha_\ell^\vee, \\
 &\vdots \\
 \gamma_{\ell(\ell-1)}^\vee &= 2\alpha_1^\vee + \alpha_2^\vee + \cdots + \alpha_\ell^\vee, \\
 \gamma_{(\ell-1)^2+\ell}^\vee &= \alpha_1^\vee + \cdots + \alpha_\ell^\vee, \\
 &\vdots \\
 \gamma_{\ell^2}^\vee &= \alpha_\ell^\vee.
 \end{aligned}
 \tag{2.48}$$

Рекурсивная параметризация открытого подмножества $N_+^{(0)}$ в N_+ , определяемая приведенным словом I_ℓ , имеет следующий вид. Для $v^{C_\ell} \in N_+^{(0)}$ мы получаем

$$v^{C_\ell}(y) = \mathfrak{X}_1(y)\mathfrak{X}_2(y) \cdots \mathfrak{X}_\ell(y), \tag{2.49}$$

где

$$\mathfrak{X}_k(y) = X_k(y_{k,n_{k,k}-1}) \cdots X_2(y_{2,n_{k,2}-1}) X_1(y_{1,n_{k,1}}) X_2(y_{2,n_{k,2}}) \cdots X_k(y_{k,n_{k,k}})$$

и $\mathfrak{X}_1 = X_1(y_{1,1})$. Для любого $k \in \{1, \dots, \ell\}$ рассмотрим подслово

$$I_k = (i_1, \dots, i_{m_k}) \subset I_\ell = (i_1, \dots, i_{m_k}, i_{m_k+1}, \dots, i_{m_\ell})$$

с $|I_k| = m_k = k^2$. Пусть C_k – соответствующая подсистема корней в R_+ и $v^{C_k} = \mathfrak{X}_1 \cdots \mathfrak{X}_k$ – факторизационная параметризация на соответствующей подгруппе. Параметры факторизации для $v(y)^{C_k}$ естественно занумеровать как $\{y_{i,n}; 1 \leq i \leq k, 1 \leq n \leq n_{k,i}\}$, где

$$n_{k,1} = k, \quad n_{k,i} = 2(k+1-i), \quad 1 < i \leq \ell. \tag{2.50}$$

Обозначим также $n_i := n_{\ell,i}$.

Мы интересуемся явными выражениями для матричных элементов в терминах параметров факторизации $\{y_{i,n}\}$:

$$\Delta_i(v) := \langle \xi_{\omega_i}^- | \pi_i(v \dot{w}_0^{-1}) | \xi_{\omega_i}^+ \rangle, \quad \Delta'_i(v) := \langle \xi_{\omega_i}^- | \pi_i(v f_{i^*} \dot{w}_0^{-1}) | \xi_{\omega_i}^+ \rangle,$$

где $\pi_i = \pi_{\omega_i}$ – фундаментальное представление со старшим весом ω_i , а $\xi_{\omega_i}^+$ и $\xi_{\omega_i}^-$ – старший и младший векторы в представлении π_i такие, что $\langle \xi_{\omega_i}^+ | \xi_{\omega_i}^- \rangle = 1$. Заметим, что для алгебры Ли $\mathfrak{sp}_{2\ell}$ инволюция $i \rightarrow i^*$, определенная в (2.5), тривиальна, т.е. $i^* = i$. Доказательство следующего утверждения получается последовательным вычислением матричных элементов с учетом соотношений Серра и определяющих идеалов для фундаментальных представлений с использованием техники работы [16].

ЛЕММА 2.8. Матричные элементы $\Delta_i(v)^{C_\ell}$ и $\Delta'_i(v)^{C_\ell}$ удовлетворяют следующим рекурсивным соотношениям:

$$\begin{aligned} \Delta_i(v)^{C_\ell} &= \left(y_{1,n_1} \prod_{k=2}^i y_{k,n_k-1} y_{k,n_k} \prod_{k=i+1}^{\ell} y_{k,n_k-1}^2 \right) \Delta_i(v)^{C_{\ell-1}}, \quad i = 1, \dots, \ell, \\ \left(\frac{\Delta'_1(v)}{\Delta_1(v)} \right)^{C_\ell} &= \frac{1}{y_{1,\ell}} \left(1 + \frac{y_{2,2(\ell-1)}}{y_{2,2(\ell-1)-1}} \right)^2 + \left(\frac{y_{2,2(\ell-1)}}{y_{2,2(\ell-1)-1}} \right)^2 \left(\frac{\Delta'_1(v)}{\Delta_1(v)} \right)^{C_{\ell-1}}, \\ \left(\frac{\Delta'_k(v)}{\Delta_k(v)} \right)^{C_\ell} &= \frac{1}{y_{k,2(\ell+1-k)}} \left(1 + \frac{y_{k+1,2(\ell-k)}}{y_{k+1,2(\ell-k)-1}} \right) \\ &\quad + \frac{y_{k,2(\ell+1-k)-1}}{y_{k,2(\ell+1-k)}} \frac{y_{k+1,2(\ell-k)}}{y_{k+1,2(\ell-k)-1}} \left(\frac{\Delta'_k(v)}{\Delta_k(v)} \right)^{C_{\ell-1}}, \quad k = 2, \dots, \ell-1, \\ \left(\frac{\Delta'_\ell(v)}{\Delta_\ell(v)} \right)^{C_\ell} &= \frac{1}{y_{\ell,2}}. \end{aligned} \tag{2.51}$$

Теперь матричные элементы можно найти, разрешая рекурсивные соотношения (2.51).

ЛЕММА 2.9. Пусть v определен как в (1.134) и (1.135). Тогда имеют место следующие соотношения для матричных элементов v в терминах переменных $y_{i,k}$:

$$\begin{aligned} \Delta_{\omega_i, \dot{s}_i}(v)^{C_\ell} &= \sum_{n=i}^{\ell} y_{i,n}, \quad i = 1, \dots, \ell, \\ \Delta_{\omega_i, \dot{w}_0^{-1}}(v)^{C_\ell} &= \prod_{n=1}^{n_1} y_{1,n} \cdot \prod_{k=2}^i \prod_{n=1}^{n_k} y_{k,n} \cdot \prod_{k=i+1}^{\ell} \prod_{n=1}^{n_k/2} y_{k,2n-1}^2, \\ \left(\frac{\Delta'_1(v)}{\Delta_1(v)} \right)^{C_\ell} &= \sum_{n=1}^{n_1} \frac{1}{y_{1,n}} \left(1 + \frac{y_{2,2(n-1)}}{y_{2,2(n-1)-1}} \right)^2 \prod_{i=n}^{\ell-1} \left(\frac{y_{2,2i}}{y_{2,2i-1}} \right)^2, \\ \left(\frac{\Delta'_k(v)}{\Delta_k(v)} \right)^{C_\ell} &= \sum_{n=1}^{n_k/2} \frac{1}{y_{k,2n}} \left(1 + \frac{y_{k+1,2(n-1)}}{y_{k+1,2(n-1)-1}} \right) \\ &\quad \times \prod_{i=n+1}^{n_k/2} \frac{y_{k+1,2(i-1)}}{y_{k+1,2(i-1)-1}} \frac{y_{k,2i-1}}{y_{k,2i}}, \quad k = 2, \dots, \ell-1, \\ \left(\frac{\Delta'_\ell(v)}{\Delta_\ell(v)} \right)^{C_\ell} &= \frac{1}{y_{\ell,2}}. \end{aligned} \tag{2.52}$$

Комбинируя эти выражения с выражениями (1.21) для инвариантной меры на N_+ и подставляя в (1.17), (1.18) и (1.19), мы завершаем доказательство теоремы 1.8.

Теперь рассмотрим интегральное представление для $\mathfrak{sp}_{2\ell}$ -функции Уиттекера в модифицированной факторизационной параметризации (1.150), (1.151). Начнем с аналога рекурсивных соотношений (2.51) для матричных элементов

в модифицированной факторизационной параметризации. Для упрощения вида рекурсивных соотношений оказывается полезной скрученная версия модифицированной параметризации (1.152) с учетом действия части H_R (1.162) элемента максимального тора e^{-h_z} . Тем самым, мы рассматриваем следующую замену переменных:

$$\begin{aligned} y_{1,1} &= e^{-2z_{\ell,1}} e^{x_{1,1}+z_{1,1}}, & y_{1,k} &= e^{-2z_{\ell,1}} (e^{z_{k-1,1}+x_{k,1}} + e^{z_{k,1}+x_{k,1}}), \\ y_{k,2r-1} &= e^{z_{\ell,k-1}-z_{\ell,k}} e^{x_{k+r-1,k}-z_{k+r-2,k-1}}, \\ y_{k,2r} &= e^{z_{\ell,k-1}-z_{\ell,k}} e^{x_{k+r-1,k}-z_{k+r-1,k-1}}, \end{aligned}$$

здесь $k = 2, \dots, \ell$, $r = 1, \dots, \ell + 1 - k$.

ЛЕММА 2.10. 1) В модифицированной факторизационной параметризации рекурсивные соотношения (2.51) имеют вид

$$\left(\frac{\Delta'_k}{\Delta_k} \right)^{C_n} = e^{z_{n-1,k}-x_{n,k}} + e^{z_{n,k}-x_{n,k}} + \frac{e^{\langle \alpha_k, \underline{z}_{n-1} \rangle}}{e^{\langle \alpha_k, \underline{z}_n \rangle}} \left(\frac{\Delta'_k}{\Delta_k} \right)^{C_{n-1}}, \quad 1 \leq k < n < \ell,$$

с решением

$$\left(\frac{\Delta'_k(v)}{\Delta_k(v)} \right)^{C_n} = e^{z_{k,k}-x_{k,k}} + \sum_{n=k+1}^{\ell} (e^{z_{n-1,k}-x_{n,k}} + e^{z_{n,k}-x_{n,k}}), \quad k = 1, \dots, \ell, \quad (2.53)$$

где $\underline{z}_n = (z_{n,1}, \dots, z_{n,n})$ и мы полагаем $\langle \alpha_k, \underline{z}_n \rangle = z_{n,k+1} - z_{n,k}$, $\langle \alpha_k, \underline{z}_{n-1} \rangle = z_{n-1,k+1} - z_{n-1,k}$.

2) Имеют место следующие выражения для $\Delta_k(v)$ через переменные $x_{k,i}$, $z_{k,i}$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta_1(v)}{\Delta_2(v)} \right)^{C_n} &= e^{-z_{\ell,1}} e^{x_{1,1}}, \\ \left(\frac{\Delta_k(v)}{\Delta_{k+1}(v)} \right)^{C_n} &= e^{-z_{\ell,k}} (e^{z_{k,1}} + e^{z_{k-1,1}}) \\ &\quad \times \exp \left\{ - \sum_{i=1}^k z_{k,i} + x_{k,1} + 2 \sum_{i=2}^k x_{k,i} - \sum_{i=1}^{k-1} z_{k-1,i} \right\}, \end{aligned} \quad (2.54)$$

где $k = 2, \dots, \ell$ и $\Delta_{\ell+1} = 1$.

Подставляя (2.53), (2.54) в (1.17), (1.18), мы получаем левый и правый векторы Уиттекера в параметризации (2.53). Полагая $z_{\ell,k} = 0$, $k = 1, \dots, \ell$, мы приходим к формулам для векторов Уиттекера из леммы 1.8. Для доказательства теоремы 1.10 остается учесть вид меры $d\mu_{N_+}$ в модифицированной факторизационной параметризации. Это завершает доказательство теоремы 1.10.

2.3.4. Выражения для $\mathfrak{so}_{2\ell}$ -матричных элементов: доказательства теоремы 1.12 и теоремы 1.14. В этом пункте мы находим выражения для матричных элементов, возникающих в конструкции интегральных представлений $\mathfrak{so}_{2\ell}$ -функций Уиттекера, используя факторизационную параметризацию открытого подмножества в $N_+ \subset \mathrm{SO}(2\ell)$. Это дает доказательство интегральных представлений для $\mathfrak{so}_{2\ell}$ -функций Уиттекера, анонсированных в части 1.

Мы используем корневые данные, описанные в (1.192). Приведенное разложение $w_0 = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_{m_\ell}}$ элемента максимальной длины $w_0 \in W(D_\ell)$, отвечающее приведенному слову $I_\ell = (i_1, \dots, i_{m_\ell})$ с $m_\ell = \ell(\ell - 1)$, определяет следующее упорядочение положительных корней: $R_+^\vee = \{\gamma_k^\vee = s_{i_1} \cdots s_{i_{k-1}} \alpha_k^\vee, k = 1, \dots, m_\ell\}$ для $\mathfrak{sp}_{2\ell}$. Мы рассматриваем разложение элемента w_0 , описываемое следующим приведенным словом:

$$I_\ell = (12, 3123, \dots, (\ell \dots 3123 \dots \ell)).$$

Соответствующее упорядочение положительных корней имеет вид

$$\begin{aligned} \gamma_3^\vee &= \alpha_1^\vee + \alpha_2^\vee + \alpha_3^\vee, \\ \gamma_1^\vee &= \alpha_1^\vee, \quad \gamma_4^\vee = \alpha_2^\vee + \alpha_3^\vee, \\ \gamma_2^\vee &= \alpha_2^\vee, \quad \gamma_5^\vee = \alpha_1^\vee + \alpha_3^\vee, \quad \dots \\ \gamma_6^\vee &= \alpha_3^\vee, \\ \gamma_{m_{\ell-1}+1}^\vee &= \alpha_1^\vee + \alpha_2^\vee + 2(\alpha_3^\vee + \cdots + \alpha_{\ell-1}^\vee) + \alpha_\ell^\vee, \\ \gamma_{m_{\ell-1}+2}^\vee &= \alpha_1^\vee + \alpha_2^\vee + 2(\alpha_3^\vee + \cdots + \alpha_{\ell-2}^\vee) + \alpha_{\ell-1}^\vee + \alpha_\ell^\vee, \\ &\vdots \\ \gamma_{m_{\ell-1}+\ell-2}^\vee &= \alpha_1^\vee + \alpha_2^\vee + \alpha_3^\vee + \cdots + \alpha_\ell^\vee, \\ \gamma_{m_{\ell-1}+\ell-1}^\vee &= p_{\ell-1} \alpha_1^\vee + p_\ell \alpha_2^\vee + \alpha_3^\vee + \cdots + \alpha_\ell^\vee, \\ \gamma_{m_{\ell-1}+\ell}^\vee &= p_\ell \alpha_1^\vee + p_{\ell+1} \alpha_2^\vee + \alpha_3^\vee + \cdots + \alpha_\ell^\vee, \\ \gamma_{m_{\ell-1}+\ell+1}^\vee &= \alpha_3^\vee + \cdots + \alpha_\ell^\vee, \\ &\vdots \\ \gamma_{m_\ell}^\vee &= \alpha_\ell^\vee. \end{aligned} \tag{2.55}$$

Рекурсивная параметризация открытого подмножества $N_+^{(0)}$ в N_+ , соответствующая приведенному слову I_ℓ , приобретает следующий вид. Для $v^{D_\ell} \in N_+^{(0)}$ мы имеем

$$v^{D_\ell}(y) = \mathfrak{X}_2(y) \mathfrak{X}_2(y) \cdots \mathfrak{X}_\ell(y), \tag{2.56}$$

где

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_k(y) &= X_k(y_{k, n_{k, k-1}}) \cdots X_3(y_{2, n_{k, 3-1}}) X_1(y_{1, n_{k, 1}}) X_2(y_{1, n_{k, 2}}) \\ &\quad \times X_3(y_{2, n_{k, 3}}) \cdots X_k(y_{k, n_{k, k}}) \end{aligned}$$

и $\mathfrak{X}_2 = X_1(y_{1, 1}) X_2(y_{2, 1})$. Для любого $k \in \{1, \dots, \ell\}$ рассмотрим подслово

$$I_k = (i_1, \dots, i_{m_k}) \subset I_\ell = (i_1, \dots, i_{m_k}, i_{m_k+1}, \dots, i_{m_\ell})$$

с $|I_k| = m_k = k(k - 1)$. Пусть D_k – соответствующая подсистема корней в R_+ и $v^{D_k} = \mathfrak{X}_2 \cdots \mathfrak{X}_k$ – факторизационная параметризация на соответствующей подгруппе. Параметры факторизации для $v^{D_k}(y)$ естественно занумеровать как $\{y_{i, n}; 1 \leq i \leq k, 1 \leq n \leq n_{k, i}\}$, где

$$n_{k, 1} = n_{k, 2} = k - 1, \quad n_{k, i} = 2(k + 1 - i), \quad 2 < i \leq \ell. \tag{2.57}$$

Также мы обозначаем $n_i = n_{\ell, i}$.

Мы интересуемся явными выражениями для матричных элементов в терминах параметров факторизации $\{y_{i, n}\}$:

$$\Delta_i(v) := \langle \xi_{\omega_i}^- | \pi_i(v \dot{w}_0^{-1}) | \xi_{\omega_i}^+ \rangle, \quad \Delta'_i(v) := \langle \xi_{\omega_i}^- | \pi_i(v f_{i^*} \dot{w}_0^{-1}) | \xi_{\omega_i}^+ \rangle,$$

где $\pi_i = \pi_{\omega_i}$ — фундаментальное представление со старшим весом ω_i , а $\xi_{\omega_i}^+$ и $\xi_{\omega_i}^-$ — старший и младший векторы в представлении π_i такие, что $\langle \xi_{\omega_i}^+ | \xi_{\omega_i}^- \rangle = 1$. Заметим, что в случае алгебры Ли $\mathfrak{so}_{2\ell}$ мы имеем $i \rightarrow i^*$ для инволюции, определенной в (2.5). Доказательство следующего утверждения получается последовательным вычислением матричных элементов с учетом соотношений Серра и определяющих идеалов для фундаментальных представлений с использованием техники работы [16].

ЛЕММА 2.11. *Имеют место следующие рекурсивные соотношения:*

$$\begin{aligned} \Delta_1(v)^{D_\ell} &= \left((y_{1, n_1})^{p_{\ell-1}} (y_{2, n_2})^{p_\ell} \prod_{k=3}^{\ell} y_{k, n_k-1} \right) \Delta_1(v)^{D_{\ell-1}}, \\ \Delta_2(v)^{D_\ell} &= \left((y_{1, n_1})^{p_\ell} (y_{2, n_2})^{p_{\ell+1}} \prod_{k=3}^{\ell} y_{k, n_k-1} \right) \Delta_2(v)^{D_{\ell-1}}, \\ \Delta_i(v)^{D_\ell} &= \left(y_{1, n_1} y_{2, n_2} \prod_{k=3}^i y_{k, n_k-1} y_{k, n_k} \prod_{k=i+1}^{\ell} y_{k, n_k-1}^2 \right) \Delta_i(v)^{D_{\ell-1}}, \quad 2 < i < \ell, \\ \left(\frac{\Delta'_1}{\Delta_1} \right)^{D_{2r}} &= \frac{1}{y_{1, 2r-1}} \left(1 + \frac{y_{3, 2(2r-2)}}{y_{3, 2(2r-2)-1}} \right) + \frac{y_{2, 2r-1}}{y_{1, 2r-1}} \frac{y_{3, 2(2r-2)}}{y_{3, 2(2r-2)-1}} \left(\frac{\Delta'_1}{\Delta_1} \right)^{D_{2r-1}}, \\ \left(\frac{\Delta'_1}{\Delta_1} \right)^{D_{2r+1}} &= \frac{1}{y_{2, 2r}} \left(1 + \frac{y_{3, 2(2r-1)}}{y_{3, 2(2r-1)-1}} \right) + \frac{y_{1, 2r}}{y_{2, 2r}} \frac{y_{3, 2(2r-1)}}{y_{3, 2(2r-1)-1}} \left(\frac{\Delta'_1}{\Delta_1} \right)^{D_{2r}}, \\ \left(\frac{\Delta'_2}{\Delta_2} \right)^{D_{2r}} &= \frac{1}{y_{2, 2r-1}} \left(1 + \frac{y_{3, 4(r-1)}}{y_{3, 4(r-1)-1}} \right) + \frac{y_{1, 2r-1}}{y_{2, 2r-1}} \frac{y_{3, 4(r-1)}}{y_{3, 4(r-1)-1}} \left(\frac{\Delta'_2}{\Delta_2} \right)^{D_{2r-1}}, \\ \left(\frac{\Delta'_2}{\Delta_2} \right)^{D_{2r+1}} &= \frac{1}{y_{1, 2r-1}} \left(1 + \frac{y_{3, 2(2r-1)}}{y_{3, 2(2r-1)-1}} \right) + \frac{y_{2, 2r}}{y_{1, 2r-1}} \frac{y_{3, 2(2r-1)}}{y_{3, 2(2r-1)-1}} \left(\frac{\Delta'_2}{\Delta_2} \right)^{D_{2r}}. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Матричные элементы могут быть вычислены как решения рекурсивных уравнений. Результаты вычислений представлены в следующей лемме.

ЛЕММА 2.12. *Пусть v определен как в (2.56). Тогда имеют место следующие выражения матричных элементов v через переменные $y_{i, k}$:*

$$\begin{aligned} \Delta_i(v) &= \prod_{n=1}^{\ell-1} y_{i, n}^{\varpi(n)} y_{i^*, n}^{1-\varpi(n)} \prod_{n=1}^{(\ell-1)/2} y_{2, 2n} \prod_{n=3}^{\ell} \prod_{i=3}^n y_{i, 2(n+1-i)-1}, \quad i = 1, 2; \\ \Delta_k(v) &= \prod_{n=k}^{\ell} \left(y_{1, n-1} y_{2, n-1} \prod_{j=3}^k y_{j, 2(n-j)+1} y_{j, 2(n-j)+2} \prod_{m=k+1}^n y_{m, 2(n-m)-1}^2 \right) \end{aligned} \quad (2.59)$$

при $k = 3, \dots, \ell$, где $\varpi(n) = (1 - (-1)^n)/2$ – четность числа n , и $n_k = 2(\ell + 1 - k)$, $2 < k \leq \ell$;

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta'_1}{\Delta_1} + \frac{\Delta'_2}{\Delta_2} \right)^{D_\ell} &= \sum_{n=1}^{\ell-1} \left[\frac{1}{y_{1,\ell-1}} \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{y_{1,\ell-k}}{y_{1,\ell-k-1}} \right)^{1-\varpi(k)} \left(\frac{y_{2,\ell-k}}{y_{2,\ell-k-1}} \right)^{\varpi(k)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{y_{2,\ell-1}} \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{y_{1,\ell-k}}{y_{1,\ell-k-1}} \right)^{\varpi(k)} \left(\frac{y_{2,\ell-k}}{y_{2,\ell-k-1}} \right)^{1-\varpi(k)} \right] \\ &\quad \times \left(1 + \frac{y_{3,2(\ell-n-1)}}{y_{3,2(\ell-n-1)-1}} \right)^{1-\delta_{n,\ell-1}} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{y_{3,2(\ell-k-1)}}{y_{3,2(\ell-k-1)-1}}; \end{aligned} \quad (2.60)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta'_k(v)}{\Delta_k(v)} \right)^{D_\ell} &= \frac{1}{y_{k,2(\ell+1-k)}} \sum_{n=k}^{\ell} \left(1 + \frac{y_{k+1,2(\ell-n)}}{y_{k+1,2(\ell-n)-1}} \right)^{1-\delta_{n,\ell}} \\ &\quad \times \prod_{j=k}^{n-1} \frac{y_{k,2(\ell-j)-1}}{y_{k,2(\ell-j)}} \frac{y_{k+1,2(\ell-j)}}{y_{k+1,2(\ell-j)-1}} \end{aligned} \quad (2.61)$$

при $k = 3, \dots, \ell$.

Для доказательства леммы 1.9 нужно подставить полученные выражения для матричных элементов из леммы 2.12 в (2.24) и (2.26). Утверждение теоремы 1.12 (интегральная формула (1.205)) следует из непосредственной подстановки выражений из леммы 2.12 в формулу (1.19) из предложения 1.1.

Теперь рассмотрим интегральные представления для $so_{2\ell}$ -функции Уиттекера в модифицированной факторизационной параметризации (1.217). Начнем с аналога рекурсивных соотношений (2.58) для матричных элементов в модифицированной факторизационной параметризации. Для упрощения вида рекурсивных соотношений оказывается полезным рассматривать скрученную версию модифицированной параметризации (1.217), учитывая действие части e^{H_R} (1.226) элемента максимального тора e^{-h_x} . Тем самым, мы рассматриваем следующую замену переменных:

$$\begin{aligned} y_{1,n} &= e^{x_{\ell,1}-x_{\ell,2}} (e^{z_{n,1}-x_{n,1}} + e^{z_{n,1}-x_{n+1,1}}), & n &= 1, \dots, \ell-1, \\ y_{2,n} &= e^{-x_{\ell,1}-x_{\ell,2}} (e^{z_{n,1}+x_{n,1}} + e^{z_{n,1}+x_{n+1,1}}), & n &= 1, \dots, \ell-1, \\ y_{k,2r-1} &= e^{x_{\ell,k-1}-x_{\ell,k}} e^{z_{k+r-2,k-1}-x_{k+r-2,k-1}}, & k &= 3, \dots, \ell, \\ y_{k,2r} &= e^{x_{\ell,k-1}-x_{\ell,k}} e^{z_{k+r-2,k-1}-x_{k+r-1,k-1}}, & r &= 1, \dots, \ell+1-k. \end{aligned} \quad (2.62)$$

ЛЕММА 2.13. *Имеет место следующее рекурсивное соотношение относительно переменных, определенных в (2.62):*

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta'_1}{\Delta_1} \right)^{D_n} + \left(\frac{\Delta'_2}{\Delta_2} \right)^{D_n} &= e^{x_{n-1,2}-z_{n-1,1}} + e^{x_{n,2}-z_{n-1,1}} \\ &\quad + \frac{e^{x_{n-1,2}+(-1)^{\varpi(n)}x_{n-1,1}}}{e^{x_{n,2}+(-1)^{\varpi(n)}x_{n,1}}} \left(\frac{\Delta'_1}{\Delta_1} \right)^{D_{n-1}} \\ &\quad + \frac{e^{x_{n-1,1}+(-1)^{1-\varpi(n)}x_{n-1,2}}}{e^{x_{n,1}+(-1)^{1-\varpi(n)}x_{n,2}}} \left(\frac{\Delta'_2}{\Delta_2} \right)^{D_{n-1}}, \end{aligned} \quad (2.63)$$

где $\varpi(n) = (1 - (-1)^n)/2$ – четность числа $n = 3, \dots, \ell$.

Решая рекурсивные уравнения, несложно получить следующий результат.

ЛЕММА 2.14. *Для унитарного элемента $v \in N_+$ имеют место следующие выражения для матричных элементов v в модифицированной параметризации:*

$$\begin{aligned} \frac{\Delta'_1}{\Delta_1} + \frac{\Delta'_2}{\Delta_2} &= \sum_{k=1}^{\ell-1} (e^{z_{k,k} - x_{k,k-1}} + e^{z_{k,k} - x_{k+1,k}}), \\ \frac{\Delta'_k}{\Delta_k} &= e^{z_{\ell-1,\ell+1-k} - x_{\ell,\ell+1-k}}, \quad k = 3, \dots, \ell, \\ \frac{\Delta_2}{\Delta_1} &= e^{-x_{\ell,1}} e^{x_{1,1}}, \\ \frac{\Delta_1 \Delta_2}{\Delta_3} &= e^{-x_{\ell,2}} \exp\{-(x_{2,1} + x_{2,2}) + 2z_{1,1} - x_{1,1}\} (e^{x_{1,1}} + e^{x_{2,1}})^2, \\ \frac{\Delta_k}{\Delta_{k+1}} &= e^{-x_{\ell,k}} \exp\left\{-\sum_{i=1}^k x_{k,i} + 2\sum_{i=1}^{k-1} z_{k-1,i} - \sum_{i=1}^{k-1} x_{k-1,i}\right\} \\ &\quad \times (e^{x_{k-1,1}} + e^{x_{k,1}})^2, \quad k = 3, \dots, \ell, \end{aligned} \tag{2.64}$$

и $\Delta_{\ell+1} = 1$.

Подставляя (2.64) в (1.17), (1.18), мы получаем векторы Уиттекера в параметризации (2.62). Полагая $x_{\ell,k} = 0$, $k = 1, \dots, \ell$, мы приходим к выражениям для векторов Уиттекера из леммы 1.10. Для завершения доказательства теоремы 1.14 остается учесть вид меры $d\mu_{N_+}$ в модифицированной факторизационной параметризации.

2.4. Реализация $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ дифференциальными операторами. В этом разделе мы доказываем формулы для реализации образующих Шевалле классических алгебр Ли типов X_ℓ для $X = A, B, C, D$ дифференциальными операторами, действующими в пространстве эквивариантных функций на группе N_+ относительно факторизационной параметризации. Аналогичные формулы для реализации образующих алгебры Ли в модифицированной факторизационной параметризации (представление Гаусса–Гивенталя) можно получить непосредственно, используя замену переменных, которую мы обсуждали в части 1; здесь мы не будем на этом останавливаться.

Начнем с изложения общей стратегии получения реализации алгебры Ли дифференциальными операторами. Пусть V_μ – пространство B_- -эквивариантных функций на $B_- \backslash G$:

$$f(bg) = \chi_\mu(b)f(g), \quad b \in B_-, \tag{2.65}$$

где χ_μ – характер борелевской подгруппы $B_- \subset G$. Представление основной серии алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ в пространстве V_μ определяется как

$$(Xf)(v) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f(v e^{\varepsilon X})|_{\varepsilon \rightarrow 0}, \quad X \in \mathfrak{g}. \tag{2.66}$$

Пусть $I_\ell = (i_1, \dots, i_{m_\ell})$ – приведенное слово, отвечающее приведенному разложению $w_0 = s_{i_1} \cdots s_{i_{m_\ell}}$ элемента w_0 максимальной длины из группы Вейля

$W(X_\ell)$ (здесь X_ℓ принадлежит классическим сериям A , B , C или D и имеет ранг ℓ). При этом можно выбрать слово I_ℓ так, что оно обладает рекурсивной структурой по отношению к рангу ℓ алгебры Ли типа X_ℓ . Далее рассмотрим рекурсивную факторизационную параметризацию унипотентных элементов из соответствующей классической группы Ли G типа X_ℓ :

$$v^{X_\ell} = \mathfrak{X}_{X_1}^{X_2} \cdots \mathfrak{X}_{X_{\ell-1}}^{X_\ell} = v^{X_{\ell-1}} \mathfrak{X}_{X_{\ell-1}}^{X_\ell}. \quad (2.67)$$

Для алгебры Ли $\mathfrak{g}$ классического типа X_ℓ мы получим явные формулы, определяющие представление π_μ алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ в пространстве V_μ , в два шага. На первом шаге мы используем рекурсивную структуру (2.67), чтобы построить рекурсивные соотношения между образующими Шевалле, действующими в представлении (π_μ, V_μ) , для алгебр Ли одного типа, ранги которых отличаются на 1. На втором шаге мы решаем рекурсивные соотношения между образами $\pi_\mu(e_i), \pi_\mu(f_i), \pi_\mu(h_i)$ образующих Шевалле алгебр типов X_ℓ и $X_{\ell\pm 1}$ и получаем явные формулы для действия образующих в пространстве V_μ .

Начнем со списка соотношений между однопараметрическими подгруппами в G (см., например, [14], [16]). Пусть $e_i, h_i, f_i, i = 1, \dots, \ell$, – образующие Шевалле в $\mathfrak{g}$ и $A = \|a_{j,i}\|$ – матрица Картана. Введем однопараметрические подгруппы:

$$X_i(y) = e^{y f_i}, \quad \alpha_i^\vee(1+y) = e^{y h_i}, \quad Y_i(y) = e^{y e_i}, \quad i = 1, \dots, \ell. \quad (2.68)$$

Тогда выполнены соотношения

$$X_i(y) \alpha_j^\vee(1+\varepsilon) = \alpha_j^\vee(1+\varepsilon) X_i(y + a_{ji} \varepsilon y) \mod \varepsilon^2, \quad (2.69)$$

$$X_i(y) Y_i(\varepsilon) = Y_i(\varepsilon) \alpha_i^\vee(1 - \varepsilon y) X_i(y - \varepsilon y^2) \mod \varepsilon^2. \quad (2.70)$$

При $a_{i,j} = a_{j,i} = -1$ мы получаем

$$X_i(y_1) X_j(y_2) X_i(\varepsilon) = X_j\left(\varepsilon \frac{y_2}{y_1}\right) X_i(y_1 + \varepsilon) X_j\left(y_2 - \varepsilon \frac{y_2}{y_1}\right) \mod \varepsilon^2. \quad (2.71)$$

При $a_{i,j} = -2$ и $a_{j,i} = -1$ имеем

$$\begin{aligned} X_j(y_1) X_i(y_2) X_j(y_3) X_i(\varepsilon) &= X_i\left(\varepsilon \frac{y_3}{y_1}\right) X_j\left(y_1 + 2\varepsilon \frac{y_3}{y_2}\right) X_i\left(y_2 + \varepsilon - \varepsilon \frac{y_3}{y_1}\right) \\ &\times X_j\left(y_3 - 2\varepsilon \frac{y_3}{y_2}\right) \mod \varepsilon^2. \end{aligned} \quad (2.72)$$

При $a_{j,i} = -2$ и $a_{i,j} = -1$ имеем

$$\begin{aligned} X_j(y_1) X_i(y_2) X_j(y_3) X_i(\varepsilon) &= X_i\left(\varepsilon \frac{y_3^2}{y_1^2}\right) X_j\left(y_1 + \varepsilon \frac{y_1 y_3 + y_3^2}{y_1 y_2}\right) X_i\left(y_2 + \varepsilon \frac{y_1^2 - y_3^2}{y_1^2}\right) \\ &\times X_j\left(y_3 - \varepsilon \frac{y_1 y_3 + y_3^2}{y_1 y_2}\right) \mod \varepsilon^2. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Для вывода рекурсивного соотношения между образующими алгебры Ли рассмотрим правое действие однопараметрических подгрупп (2.68) на рекурсивной

факторизационной параметризации (2.67) элемента $v^\ell \in N_+^{(0)}$. Воспользуемся соотношениями (2.69)–(2.73), чтобы сдвинуть образующие на один шаг влево. Например, в случае однопараметрической подгруппы, порожденной f_i , мы имеем:

$$v^{(\ell)} X_i(\varepsilon) = v^{(\ell-1)} \mathfrak{X}_{\ell-1}^\ell(y) X_i(\varepsilon) = v^{(\ell-1)} X_i(c_i(y)\varepsilon) \mathfrak{X}_{\ell-1}^\ell(y'(y)) \mod \varepsilon^2. \quad (2.74)$$

Это приводит к рекурсивным соотношениям между образующими алгебры Ли ранга ℓ через образующие алгебры Ли ранга $(\ell-1)$ и дифференциальные операторы по переменным $y_{i,n}$, параметризующим $\mathfrak{X}_{\ell-1}^\ell$. На последнем шаге редукции мы используем (2.65). В следующих пунктах мы приводим рекурсивные соотношения и явные формулы для образующих всех классических алгебр Ли без дальнейших комментариев.

2.4.1. Образующие $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$: доказательство предложения 1.2. Пусть $E_{i,i+1}^{(\ell+1)}$, $E_{i,i}^{(\ell+1)}$, $E_{i+1,i}^{(\ell+1)}$ – образы базисных элементов $e_{i,j}$ алгебры $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$, действующих в представлении основной серии (π_μ, V_μ) . Ниже мы приводим рекурсивные соотношения и явные выражения для этих образующих.

Рекурсивные соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} E_{i,i+1}^{(\ell+1)} &= \frac{\partial}{\partial y_{i,\ell+1-i}} + \frac{y_{i-1,\ell+2-i}}{y_{i,\ell+1-i}} \left(E_{i-1,i}^{(\ell)} - \frac{\partial}{\partial y_{i-1,\ell+2-i}} \right), \\ E_{i,i}^{(\ell+1)} &= \mu_i^{(\ell+1)} - \mu_i^{(\ell)} + E_{i,i}^{(\ell)} + y_{i-1,\ell+2-i} \frac{\partial}{\partial y_{i-1,\ell+2-i}} \\ &\quad - y_{i,\ell+1-i} \frac{\partial}{\partial y_{i,\ell+1-i}}, \quad i \neq \ell+1, \\ E_{\ell+1,\ell+1}^{(\ell+1)} &= \mu_{\ell+1}^{(\ell+1)} + y_{\ell,1} \frac{\partial}{\partial y_{\ell,1}}, \\ E_{i+1,i}^{(\ell+1)} &= E_{i+1,i}^{(\ell)} + y_{i,\ell+1-i} (E_{i,i}^{(\ell)} - E_{i+1,i+1}^{(\ell)}) \\ &\quad - y_{i,\ell+1-i} \left\{ y_{i,\ell+1-i} \frac{\partial}{\partial y_{i,\ell+1-i}} - y_{i+1,\ell-i} \frac{\partial}{\partial y_{i+1,\ell-i}} \right\}. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Разрешая рекурсию, мы приходим к (1.34). Это завершает доказательство предложения 1.2.

2.4.2. Образующие $\mathfrak{so}_{2\ell+1}$: доказательство предложения 1.4. Пусть $E_i^{(\ell)}$, $H_i^{(\ell)}$, $F_i^{(\ell)}$ – образы базисных элементов Шевалле алгебры Ли $\mathfrak{so}_{2\ell+1}$, действующих в представлении основной серии (π_μ, V_μ) . Ниже мы приводим рекурсивные соотношения и явные выражения для этих образующих.

Рекурсивные соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} F_1^{(\ell)} &= \frac{\partial}{\partial y_{1,\ell}} + \frac{y_{2,2(\ell-1)}}{y_{2,2(\ell-1)-1}} \left(F_1^{(\ell-1)} - \frac{\partial}{\partial y_{1,\ell}} \right) \\ &\quad + 2 \frac{y_{2,2(\ell-1)}}{y_{1,\ell}} \left\{ \frac{\partial}{\partial y_{2,2(\ell-1)-1}} - \frac{\partial}{\partial y_{2,2(\ell-1)}} \right\}, \end{aligned}$$

$$F_k^{(\ell)} = \frac{\partial}{\partial y_{k,2(\ell+1-k)}} + \frac{y_{k,2(\ell+1-k)-1}}{y_{k,2(\ell+1-k)}} \frac{y_{k+1,2(\ell-k)}}{y_{k+1,2(\ell-k)-1}} \left(F_k^{(\ell-1)} - \frac{\partial}{\partial y_{k,2(\ell+1-k)-1}} \right) + \frac{y_{k+1,2(\ell-k)}}{y_{k,2(\ell+1-k)}} \left\{ \frac{\partial}{\partial y_{k+1,2(\ell-k)-1}} - \frac{\partial}{\partial y_{k+1,2(\ell-k)}} \right\}, \quad k = 2, \dots, \ell - 1, \quad (2.76)$$

$$E_1^{(\ell)} = E_1^{(\ell-1)} - y_{1,\ell} H_1^{(\ell-1)} + 2y_{1,\ell} y_{2,2(\ell-1)-1} \frac{\partial}{\partial y_{2,2(\ell-1)-1}} - y_{1,\ell}^2 \frac{\partial}{\partial y_{1,\ell}}, \quad (2.77)$$

$$E_2^{(\ell)} = E_2^{(\ell-1)} - (y_{2,2(\ell-1)-1} + y_{2,2(\ell-1)}) H_2^{(\ell-1)} + (y_{2,2(\ell-1)-1} + y_{2,2(\ell-1)}) y_{3,2(\ell-2)-1} \frac{\partial}{\partial y_{3,2(\ell-2)-1}} + 2y_{2,2(\ell-1)} y_{1,\ell} \frac{\partial}{\partial y_{1,\ell}} - \left\{ y_{2,2(\ell-1)-1}^2 \frac{\partial}{\partial y_{2,2(\ell-1)-1}} + 2y_{2,2(\ell-1)} y_{2,2(\ell-1)-1} \frac{\partial}{\partial y_{2,2(\ell-1)-1}} + y_{2,2(\ell-1)}^2 \frac{\partial}{\partial y_{2,2(\ell-1)}} \right\}, \quad (2.78)$$

$$E_k^{(\ell)} = E_k^{(\ell-1)} - (y_{k,2(\ell+1-k)-1} + y_{k,2(\ell+1-k)}) H_k^{(\ell-1)} + (y_{k,2(\ell+1-k)-1} + y_{k,2(\ell+1-k)}) y_{k+1,2(\ell-k)-1} \frac{\partial}{\partial y_{k+1,2(\ell-k)-1}} + y_{k,2(\ell+1-k)} \left\{ y_{k-1,2(\ell+2-k)-1} \frac{\partial}{\partial y_{k-1,2(\ell+2-k)-1}} + y_{k-1,2(\ell+2-k)} \frac{\partial}{\partial y_{k-1,2(\ell+2-k)}} \right\} - \left\{ y_{k,2(\ell+1-k)-1}^2 \frac{\partial}{\partial y_{k,2(\ell+1-k)-1}} + 2y_{k,2(\ell+1-k)-1} y_{k,2(\ell+1-k)} \frac{\partial}{\partial y_{k,2(\ell+1-k)-1}} + y_{k,2(\ell+1-k)}^2 \frac{\partial}{\partial y_{k,2(\ell+1-k)}} \right\}. \quad (2.79)$$

Для действия образующих картановской подалгебры мы получаем

$$H_k^{(\ell)} = \langle \mu^{(\ell)}, \alpha_k^\vee \rangle + \sum_{i=1}^{\ell} a_{k,i} \sum_{j=1}^{n_i} y_{i,j} \frac{\partial}{\partial y_{i,j}}, \quad k = 1, \dots, \ell. \quad (2.80)$$

где $n_1 = \ell$, $n_k = 2(\ell + 1 - k)$ при $1 < k \leq \ell$.

Разрешая рекурсию, мы приходим к (1.69), (1.70) и (1.71). Это завершает доказательство предложения 1.4.

2.4.3. Образующие $\mathfrak{sp}_{2\ell}$: доказательство предложения 1.8. Пусть $E_i^{(\ell)}$, $H_i^{(\ell)}$, $F_i^{(\ell)}$ – образы базисных элементов Шевалле алгебры Ли $\mathfrak{sp}_{2\ell}$, действующих в представлении основной серии (π_μ, V_μ) . Ниже мы приводим рекурсивные соотношения и явные выражения для этих образующих.

Рекурсивные соотношения имеют вид

$$\begin{aligned}
F_1^{(\ell)} &= \frac{\partial}{\partial y_{1,\ell}} + \left(\frac{y_{2,2(\ell-1)}}{y_{2,2(\ell-1)-1}} \right)^2 \left(F_1^{(\ell-1)} - \frac{\partial}{\partial y_{1,\ell}} \right) \\
&\quad + \frac{y_{2,2(\ell-1)-1} y_{2,2(\ell-1)} + y_{2,2(\ell-1)}^2}{y_{1,\ell} y_{2,2(\ell-1)-1}} \left\{ \frac{\partial}{\partial y_{2,2(\ell-1)-1}} - \frac{\partial}{\partial y_{2,2(\ell-1)}} \right\}, \\
F_k^{(\ell)} &= \frac{\partial}{\partial y_{k,2(\ell+1-k)}} + \frac{y_{k,2(\ell+1-k)-1}}{y_{k,2(\ell+1-k)}} \frac{y_{k+1,2(\ell-k)}}{y_{k+1,2(\ell-k)-1}} \left(F_k^{(\ell-1)} - \frac{\partial}{\partial y_{k,2(\ell+1-k)-1}} \right) \\
&\quad + \frac{y_{k+1,2(\ell-k)}}{y_{k,2(\ell+1-k)}} \left\{ \frac{\partial}{\partial y_{k+1,2(\ell-k)-1}} - \frac{\partial}{\partial y_{k+1,2(\ell-k)}} \right\}, \quad 1 < k < \ell, \\
F_\ell^{(\ell)} &= \frac{\partial}{\partial y_{\ell,2}}, \\
E_1^{(\ell)} &= E_1^{(\ell-1)} - y_{1,\ell} H_1^{(\ell-1)} + y_{1,\ell} y_{2,2(\ell-1)-1} \frac{\partial}{\partial y_{2,2(\ell-1)-1}} - y_{1,\ell}^2 \frac{\partial}{\partial y_{1,\ell}}, \\
E_2^{(\ell)} &= E_2^{(\ell-1)} - (y_{2,2(\ell-1)-1} + y_{2,2(\ell-1)}) H_2^{(\ell-1)} + 2y_{2,2(\ell-1)-1} y_{1,\ell} \frac{\partial}{\partial y_{1,\ell}} \\
&\quad + (y_{2,2(\ell-1)-1} + y_{2,2(\ell-1)}) y_{3,2(\ell-2)-1} \frac{\partial}{\partial y_{3,2(\ell-2)-1}} \\
&\quad - \left\{ y_{2,2(\ell-1)-1}^2 \frac{\partial}{\partial y_{2,2(\ell-1)-1}} + 2y_{2,2(\ell-1)-1} y_{2,2(\ell-1)-1} \frac{\partial}{\partial y_{2,2(\ell-1)-1}} \right. \\
&\quad \left. + y_{2,2(\ell-1)}^2 \frac{\partial}{\partial y_{2,2(\ell-1)}} \right\}, \tag{2.81} \\
E_k^{(\ell)} &= E_k^{(\ell-1)} - (y_{k,2(\ell+1-k)-1} + y_{k,2(\ell+1-k)}) H_k^{(\ell-1)} \\
&\quad + (y_{k,2(\ell+1-k)-1} + y_{k,2(\ell+1-k)}) y_{k+1,2(\ell-k)-1} \frac{\partial}{\partial y_{k+1,2(\ell-k)-1}} \\
&\quad + y_{k,2(\ell+1-k)} \left\{ y_{k-1,2(\ell+2-k)-1} \frac{\partial}{\partial y_{k-1,2(\ell+2-k)-1}} \right. \\
&\quad \left. + y_{k-1,2(\ell+2-k)} \frac{\partial}{\partial y_{k-1,2(\ell+2-k)}} \right\} - \left\{ y_{k,2(\ell+1-k)-1}^2 \frac{\partial}{\partial y_{k,2(\ell+1-k)-1}} \right. \\
&\quad \left. + 2y_{k,2(\ell+1-k)-1} y_{k,2(\ell+1-k)} \frac{\partial}{\partial y_{k,2(\ell+1-k)-1}} \right. \\
&\quad \left. + y_{k,2(\ell+1-k)}^2 \frac{\partial}{\partial y_{k,2(\ell+1-k)}} \right\}, \quad 2 < k < \ell, \\
E_\ell^{(\ell)} &= (y_{\ell,1} + y_{\ell,2}) \left\{ -\langle \mu, \alpha_\ell^\vee \rangle + y_{\ell-1,1} \frac{\partial}{\partial y_{\ell-1,1}} + y_{\ell-1,2} \frac{\partial}{\partial y_{\ell-1,2}} \right\} \\
&\quad + y_{\ell,2} \left\{ y_{\ell-1,3} \frac{\partial}{\partial y_{\ell-1,3}} + y_{\ell-1,4} \frac{\partial}{\partial y_{\ell-1,4}} \right\} \\
&\quad - \left\{ y_{\ell,1}^2 \frac{\partial}{\partial y_{\ell,1}} + 2y_{\ell,1} y_{\ell,2} \frac{\partial}{\partial y_{\ell,1}} + y_{\ell,2}^2 \frac{\partial}{\partial y_{\ell,2}} \right\}.
\end{aligned}$$

Для действия образующих подалгебры Картана мы имеем:

$$H_k^{(\ell)} = \langle \mu, \alpha_k^\vee \rangle + \sum_{i=1}^{\ell} a_{k,i} \sum_{j=1}^{n_i} y_{i,j} \frac{\partial}{\partial y_{i,j}}, \quad k = 1, \dots, \ell. \quad (2.82)$$

где $n_1 = \ell$ и $n_k = 2(\ell + 1 - k)$ при $1 < k \leq \ell$.

Разрешая рекурсию, мы получаем выражения (1.136), (1.137) и (1.138). Это завершает доказательство предложения 1.8.

2.4.4. Образующие $\mathfrak{so}_{2\ell}$: доказательство предложения 1.12. Пусть $E_i^{(\ell)}, H_i^{(\ell)}$, $F_i^{(\ell)}$ – образы базисных элементов Шевалле алгебры Ли $\mathfrak{so}_{2\ell}$, действующих в представлении основной серии (π_μ, V_μ) . Ниже мы приводим рекурсивные соотношения и явные выражения для этих образующих.

Рекурсивные соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} F_1^{(\ell)} &= \frac{\partial}{\partial y_{1,\ell-1}} + \frac{y_{2,\ell-1}}{y_{1,\ell-1}} \frac{y_{3,2(\ell-2)}}{y_{3,2(\ell-2)-1}} \left(F_2^{(\ell-1)} - \frac{\partial}{\partial y_{2,\ell-1}} \right) \\ &\quad + \frac{y_{3,2(\ell-2)}}{y_{1,\ell-1}} \left\{ \frac{\partial}{\partial y_{3,2(\ell-2)-1}} - \frac{\partial}{\partial y_{3,2(\ell-2)}} \right\}, \\ F_2^{(\ell)} &= \frac{\partial}{\partial y_{2,\ell-1}} + \frac{y_{1,\ell-1}}{y_{2,\ell-1}} \frac{y_{3,2(\ell-2)}}{y_{3,2(\ell-2)-1}} \left(F_1^{(\ell-1)} - \frac{\partial}{\partial y_{1,\ell-1}} \right) \\ &\quad + \frac{y_{3,2(\ell-2)}}{y_{2,\ell-1}} \left\{ \frac{\partial}{\partial y_{3,2(\ell-2)-1}} - \frac{\partial}{\partial y_{3,2(\ell-2)}} \right\}, \\ F_k^{(\ell)} &= \frac{\partial}{\partial y_{k,2(\ell+1-k)}} + \frac{y_{k,2(\ell+1-k)-1}}{y_{k,2(\ell+1-k)}} \frac{y_{k+1,2(\ell-k)}}{y_{k+1,2(\ell-k)-1}} \left(F_k^{(\ell-1)} - \frac{\partial}{\partial y_{k,2(\ell+1-k)-1}} \right) \\ &\quad + \frac{y_{k+1,2(\ell-k)}}{y_{k,2(\ell+1-k)}} \left\{ \frac{\partial}{\partial y_{k,2(\ell+1-k)-1}} - \frac{\partial}{\partial y_{k,2(\ell+1-k)}} \right\}, \quad k = 3, \dots, \ell-1, \\ E_i^{(\ell)} &= E_i^{(\ell-1)} - y_{i,\ell-1}^2 \frac{\partial}{\partial y_{i,\ell-1}} \\ &\quad + y_{i,\ell-1} \left\{ -H_i^{(\ell-1)} + y_{3,2(\ell-2)-1} \frac{\partial}{\partial y_{3,2(\ell-2)-1}} \right\}, \quad i = 1, 2, \\ E_3^{(\ell)} &= E_3^{(\ell-1)} - \left\{ y_{3,2(\ell-2)-1}^2 \frac{\partial}{\partial y_{3,2(\ell-2)-1}} + y_{3,2(\ell-2)}^2 \frac{\partial}{\partial y_{3,2(\ell-2)}} \right\} \\ &\quad + (y_{3,2(\ell-2)-1} + y_{3,2(\ell-2)}) \left\{ -H_3^{(\ell-1)} + y_{4,2(\ell-3)-1} \frac{\partial}{\partial y_{4,2(\ell-3)-1}} \right\} \\ &\quad + y_{3,2(\ell-2)} \left\{ y_{1,\ell-1} \frac{\partial}{\partial y_{1,\ell-1}} + y_{2,\ell-1} \frac{\partial}{\partial y_{2,\ell-1}} \right\}, \\ E_k^{(\ell)} &= E_k^{(\ell-1)} - \left\{ y_{k,2(\ell+1-k)-1}^2 \frac{\partial}{\partial y_{k,2(\ell+1-k)-1}} + y_{k,2(\ell+1-k)}^2 \frac{\partial}{\partial y_{k,2(\ell+1-k)}} \right\} \\ &\quad + (y_{k,2(\ell+1-k)-1} + y_{k,2(\ell+1-k)}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left\{ -H_k^{(\ell-1)} + y_{k+1,2(\ell-k)-1} \frac{\partial}{\partial y_{k+1,2(\ell-k)-1}} \right\} \\ & + y_{k,2(\ell+1-k)} \left\{ y_{k-1,2(\ell+2-k)-1} \frac{\partial}{\partial y_{k-1,2(\ell+2-k)-1}} \right. \\ & \left. + y_{k-1,2(\ell+2-k)} \frac{\partial}{\partial y_{k-1,2(\ell+2-k)}} \right\}, \quad 3 < k \leq \ell. \end{aligned}$$

Для действия образующих подалгебры Картана мы имеем:

$$H_i^{(\ell)} = \langle \mu, \alpha_i^\vee \rangle + \sum_{k=1}^{\ell} a_{i,k} \sum_{j=1}^{n_k} y_{k,j} \frac{\partial}{\partial y_{k,j}}, \quad k = 1, \dots, \ell. \quad (2.83)$$

где $n_1 = n_2 = \ell - 1$, $n_k = 2(\ell + 1 - k)$ при $2 < k \leq \ell$.

Разрешая рекурсию, мы получаем выражения (1.197)–(1.202). Это завершает доказательство предложения 1.12.

Список литературы

- [1] A. Givental, “Stationary phase integrals, quantum Toda lattices, flag manifolds and the mirror conjecture”, *Topics in singularity theory*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **180**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, 103–115; arXiv:alg-geom/9612001.
- [2] D. Joe, B. Kim, “Equivariant mirrors and the Virasoro conjecture for flag manifolds”, *Int. Math. Res. Not.*, **2003**:15 (2003), 859–882; arXiv:math.AG/0210377.
- [3] И. М. Гельфанд, М. С. Цейтлин, “Конечномерные представления группы унимодулярных матриц”, *Докл. АН СССР*, **71**:5 (1950), 825–828.
- [4] V. V. Batyrev, “Toric degenerations of Fano varieties and constructing mirror manifolds”, *The Fano Conference*, Univ. Torino, Turin, 2004, 109–122; arXiv:alg-geom/9712034.
- [5] V. V. Batyrev, I. Ciocan-Fontanine, B. Kim, D. van Straten, “Mirror symmetry and toric degenerations of partial flag manifolds”, *Acta Math.*, **184**:1 (2000), 1–39; arXiv:math.AG/9803108.
- [6] A. Gerasimov, S. Kharchev, D. Lebedev, S. Oblazin, “On a Gauss–Givental representation of quantum Toda chain wave function”, *Int. Math. Res. Not.*, **2006** (2006), Art. ID 96489, 23 pp.; arXiv:math.RT/0505310.
- [7] B. Kostant, “Quantization and representation theory”, *Representation theory of Lie groups*, Proceedings of the SRC/LMS Research Symposium (Oxford, 1977), London Math. Soc. Lecture Note Ser., **34**, Cambridge University Press, Cambridge–New York, 1979, 287–316.
- [8] B. Kostant, “On Whittaker vectors and representation theory”, *Invent. Math.*, 1978, № 2, 101–184.
- [9] E. T. Whittaker, G. N. Watson, *A course of modern analysis*, 4th ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996, 608 pp.; рус. пер.: Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, *Курс современного анализа*, Ч. 2. *Трансцендентные функции*, 2-е изд., Мир, М., 1963, 500 с.
- [10] V. Pasquier, M. Gaudin, “The periodic Toda chain and a matrix generalization of the Bessel function recursion relation”, *J. Phys. A*, **25**:20 (1992), 5243–5252.
- [11] E. K. Sklyanin, “Bäcklund transformations and Baxter’s Q -operator”, *Integrable systems: from classical to quantum* (Montréal, QC, 1999), CRM Proc. Lecture Notes, **26**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, 227–250.

- [12] K. Rietsch, “A mirror construction for the totally nonnegative part of the Peterson variety”, *Nagoya Math. J.*, **183** (2006), 105–142; [arXiv: math.AG/0604170](#).
- [13] М. А. Ольшанецкий, А. М. Переломов, А. Г. Рейман, М. А. Семенов-Тян-Шанский, “Интегрируемые системы. II”, *Динамические системы* – 7, Итоги науки и техники. Современ. пробл. матем. Фундам. напр., **16**, ВИНТИ, М., 1987, 86–226; [англ. пер.: М. А. Ol’shanetskij, M. A. Perelomov, A. G. Reyman, M. A. Semenov-Tian-Shansky, “Integrable systems. II”, *Dynamical systems. VII. Integrable systems, nonholonomic dynamical systems*, Encyclopaedia Math. Sci., **16**, Springer-Verlag, Berlin, 1994, 83–259.](#)
- [14] G. Lusztig, “Total positivity in reductive groups”, *Lie theory and geometry*, Progr. Math., **123**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1994, 531–568.
- [15] S. Fomin, A. Zelevinsky, “Double Bruhat cells and total positivity”, *J. Amer. Math. Soc.*, **12**:2 (1999), 335–380; [arXiv: math.RT/9802056](#).
- [16] A. Berenstein, A. Zelevinsky, “Total positivity in Schubert varieties”, *Comment. Math. Helv.*, **72**:1 (1997), 128–166.
- [17] В. Г. Дринфельд, В. В. Соколов, “Алгебры Ли и уравнения типа Кортвега–де Фриза”, Итоги науки и техники. Современ. пробл. матем. Нов. достиж., **24**, ВИНТИ, М., 1984, 81–180; [англ. пер.: V. G. Drinfeld, V. V. Sokolov, “Lie algebras and equations of Korteweg–de Vries type”, *J. Soviet Math.*, **30**:2 \(1985\), 1975–2036.](#)
- [18] A. D. Berenstein, A. V. Zelevinsky, “Tensor product multiplicities and convex polytopes in partition space”, *J. Geom. Phys.*, **5**:3 (1989), 453–472.
- [19] V. Lakshmibai, “Degeneration of flag varieties to toric varieties”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **321**:9 (1995), 1229–1234.
- [20] A. Gerasimov, D. Lebedev, S. Oblazin, *On a Gauss–Givental representation for classical groups*, [arXiv: math.RT/0608152](#).
- [21] A. Gerasimov, D. Lebedev, S. Oblazin, *Baxter Q-operator and Givental integral representation for C_n and D_n* , [arXiv: math.RT/0609082](#).
- [22] A. Gerasimov, D. Lebedev, S. Oblazin, “Quantum Toda chains intertwined”, *Алгебра и анализ*, **22**:3 (2010), 107–141; [англ. изд.: A. Gerasimov, D. Lebedev, S. Oblazin, “Quantum Toda chains intertwined”, *St. Petersburg Math. J.*, **22**:3 \(2011\), 411–435.](#)
- [23] P. Etingof, *Differential topology, infinite-dimensional Lie algebras, and applications*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **194**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, 9–25; [arXiv: math.QA/9901053](#).
- [24] В. Г. Кас, *Infinite-dimensional Lie algebras*, 3rd ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1990, xxii+400 pp.; [рус. пер.: В. Кац, *Бесконечномерные алгебры Ли*, Мир, М., 1993, 426 с.](#)
- [25] T. A. Springer, “Reductive groups”, *Automorphic forms, representations and L-functions*, Part 1 (Oregon State Univ., Corvallis, OR, 1977), Proc. Sympos. Pure Math., **33**, eds. A. Borel, W. Casselman, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1979, 3–27.
- [26] S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, Pure Appl. Math., **34**, Academic Press, New York–London, 1978, xv+628 pp.; [рус. пер. издания 1962 г.: С. Хелгасон, *Дифференциальная геометрия и симметрические пространства*, Мир, М., 1964, 533 с.](#)
- [27] H. Jacquet, “Fonctions de Whittaker associées aux groupes de Chevalley”, *Bull. Soc. Math. France*, **95** (1967), 243–309.
- [28] M. Hashizume, “Whittaker functions on semisimple Lie groups”, *Hiroshima Math. J.*, **12**:2 (1982), 259–293.
- [29] A. Gerasimov, S. Kharchev, A. Morozov, M. Olshanetsky, A. Marshakov, A. Mironov, “Liouville type models in the group theory framework. I. Finite-dimensional algebras”, *Internat. J. Modern Phys. A*, **12**:14 (1997), 2523–2583.

- [30] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Fasc. XXXIV, Groupes et algèbres de Lie: Chapitre VI: Systèmes des racines*, Hermann, Paris, 1968; рус. пер.: Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли. Главы IV–VI*, Мир, М., 1972, 334 с.
- [31] R. J. Baxter, *Exactly solved models in statistical mechanics*, Academic Press, London, 1982, xii+486 pp.; рус. пер.: Р. Бэкстер, *Точно решаемые модели в статистической механике*, Мир, М., 1985, 488 с.
- [32] А. Г. Рейман, М. А. Семенов-Тянь-Шанский, “Интегрируемые системы”, *Теоретико-групповой подход*, Современная математика, Ин-т компьютерных исследований, М.–Ижевск, 2003, 352 с.
- [33] K. Rietsch, “A mirror symmetric construction of $qH_T^*(G/P)_{(q)}$ ”, *Adv. Math.*, **217**:6 (2008), 2401–2442; arXiv: math.AG/0511124v2.

А. А. Герасимов (A. A. Gerasimov)

Институт теоретической и экспериментальной
физики им. А. И. Алиханова;
The Hamilton Mathematics Institute, Trinity College
Dublin, Ireland

Поступила в редакцию

14.07.2011

Д. Р. Лебедев (D. R. Lebedev)

Институт теоретической и экспериментальной
физики им. А. И. Алиханова

С. В. Облезин (S. V. Oblezin)

Институт теоретической и экспериментальной
физики им. А. И. Алиханова

E-mail: Sergey.Oblezin@itep.ru