Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Г. Ониани, О взаимосвязи между сходимостями по
прямоугольникам и по сферам кратных рядов Хаара,
УМН, 2012, том 67, выпуск 1, 185–186

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9464>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 16:36:41

О взаимосвязи между сходимостями по прямоугольникам и по сферам кратных рядов Хаара

Г. Г. Ониани

Пусть $n \geq 2$, $\mathbb{I}^n = [0, 1]^n$, и пусть $\{h_k\}_{k \in \mathbb{N}^n}$ есть n -кратная система Хаара. Для n -кратного ряда Хаара

$$\sigma = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} c_k h_k$$

и для $x \in \mathbb{I}^n$, $m \in \mathbb{N}^n$ и $r > 0$ через $S_m(\sigma)(x)$, $S_r(\sigma)(x)$, $G_m(\sigma)(x)$ и $G_r(\sigma)(x)$ обозначим прямоугольную частичную сумму, сферическую частичную сумму, прямоугольный общий член и сферический общий член соответственно, т. е.

$$\begin{aligned} S_m(\sigma)(x) &= \sum_{k_1=1}^{m_1} \cdots \sum_{k_n=1}^{m_n} c_k h_k(x), & S_r(\sigma)(x) &= \sum_{k_1^2 + \cdots + k_n^2 \leq r^2} c_k h_k(x), \\ G_m(\sigma)(x) &= c_m h_m(x), & G_r(\sigma)(x) &= \sum_{k_1^2 + \cdots + k_n^2 = r^2} c_k h_k(x), \end{aligned}$$

где $m = (m_1, \dots, m_n)$, $k = (k_1, \dots, k_n)$ и сумма по пустому множеству индексов считается равной 0. Если $\sigma = \sigma(f)$ – ряд Фурье–Хаара функции $f \in L(\mathbb{I}^n)$, то в вышеприведенных обозначениях вместо σ будем использовать f .

Если $n \geq 2$ и $1 \leq \ell \leq n-1$, то ℓ -мерным сечением последовательности $(a_m)_{m \in \mathbb{N}^n}$ будем называть каждую последовательность, получаемую из $(a_m)_{m \in \mathbb{N}^n}$ фиксированием некоторых $n - \ell$ среди n координат индекса $m = (m_1, \dots, m_n)$.

Под сходимостью (сильной сходимостью) последовательности $(a_m)_{m \in \mathbb{N}^n}$ мы понимаем сходимость a_m к пределу при $\min\{m_1, \dots, m_n\} \rightarrow \infty$ (при $\max\{m_1, \dots, m_n\} \rightarrow \infty$).

Заметим, что для последовательности $(a_m)_{m \in \mathbb{N}^n}$ следующие условия эквивалентны: 1) $(a_m)_{m \in \mathbb{N}^n}$ сильно сходится к a ; 2) $(a_m)_{m \in \mathbb{N}^n}$ сходится к a и каждое $(n-1)$ -мерное сечение $(a_m)_{m \in \mathbb{N}^n}$ сильно сходится к a .

Известно, что $L(\ln^+ L)^{n-1}(\mathbb{I}^n)$ при каждом $n \geq 2$ является наиболее широким интегральным классом, в котором обеспечена сходимость почти всюду рядов Фурье–Хаара как для прямоугольных частичных сумм (см. [1]), так и для сферических частичных сумм (см. [2], [3]). Здесь же заметим, что кубические частичные суммы ряда Фурье–Хаара каждой суммируемой функции (т. е. $S_m(f)(x)$ с $m_1 = m_2 = \dots = m_n$) сходятся почти всюду к f (детали см., например, в [1]).

Наша цель – изучить взаимосвязь между прямоугольной и сферической сходимостями кратных рядов Хаара. Известна следующая теорема Кемхадзе [2].

ТЕОРЕМА А. Пусть $f \in L(\mathbb{I}^2)$. Если $\lim_{m \rightarrow \infty} S_m(f)(x) = f(x)$ для почти всех $x \in \mathbb{I}^2$, то $\lim_{r \rightarrow \infty} S_r(f)(x) = f(x)$ для почти всех $x \in \mathbb{I}^2$.

Справедливы следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $n \geq 2$ и σ есть n -кратный ряд Хаара. Если σ сходится по прямоугольникам в двоично-иррациональной точке x и прямоугольный общий член $(G_m(\sigma)(x))_{m \in \mathbb{N}^n}$ сильно сходится к 0, то σ по сферам сходится в точке x к $\lim_{m \rightarrow \infty} S_m(\sigma)(x)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $n \geq 2$ и $f \in L(\ln^+ L)^{n-2}(\mathbb{I}^n)$. Тогда для почти всех $x \in \mathbb{I}^n$ каждое $(n-1)$ -мерное сечение последовательности $(G_m(f)(x))_{m \in \mathbb{N}^n}$ сильно сходится к 0.

Из теорем 1 и 2 вытекает следующее обобщение теоремы А.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $n \geq 2$, $f \in L(\ln^+ L)^{n-2}(\mathbb{I}^n)$ и E есть множество всех точек x , в которых $\lim_{m \rightarrow \infty} S_m(f)(x) = f(x)$. Тогда $\lim_{r \rightarrow \infty} S_r(f)(x) = f(x)$ для почти всех $x \in E$.

Из следствия 1, принимая во внимание сходимост почти всюду по прямоугольникам рядов Фурье–Хаара функции из $L(\ln^+ L)^{n-1}(\mathbb{I}^n)$, выводим следующий результат Кемхадзе [2].

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $n \geq 2$ и $f \in L(\ln^+ L)^{n-1}(\mathbb{I}^n)$. Тогда $\lim_{r \rightarrow \infty} S_r(f)(x) = f(x)$ для почти всех $x \in \mathbb{I}^n$.

Следующая теорема, в частности, показывает, что при $n \geq 3$ связь между сходимостью по прямоугольникам и сходимостью по сферам, о которой говорится в следствии 1, нарушается при расширении интегрального класса $L(\ln^+ L)^{n-2}(\mathbb{I}^n)$.

ТЕОРЕМА 3. Для каждого $n \geq 3$ и каждой функции $f \in L \setminus L(\ln^+ L)^{n-2}(\mathbb{I}^n)$ существует равноизмеримая с f функция g на $\mathbb{I}^n$ такая, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_m(g)(x) = g(x) \quad \text{и} \quad \limsup_{r \rightarrow \infty} |G_r(g)(x)| = \infty \quad \text{для почти всех } x \in \mathbb{I}^n.$$

Список литературы

- [1] Т. Ш. Зерекидзе, “Сходимость кратных рядов Фурье–Хаара и сильная дифференцируемость интегралов”, *Труды Тбилис. матем. ин-та им. А. М. Размадзе АН ГрССР*, **76** (1985), 80–99. [2] Г. Г. Кемхадзе, “О сходимости шаровых частичных сумм кратных рядов Фурье–Хаара”, *Труды Тбилис. матем. ин-та им. А. М. Размадзе АН ГрССР*, **55** (1977), 27–38. [3] Г. Г. Ониани, “О расходимости кратных рядов Фурье–Хаара”, *Докл. РАН*, **419:2** (2008), 169–170; англ. пер.: G. G. Oniani, “On the divergence of multiple Fourier–Haar series”, *Dokl. Math.*, **77:2** (2008), 203–204.

Г. Г. Ониани (G. G. Oniani)
Государственный университет
им. Акакия Церетели, Кутаиси, Грузия
E-mail: oniani@atsu.edu.ge

Представлено А. Г. Сергеевым
Принято редколлегией
11.01.2012