Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. М. Асеев, К. О. Бесов, А. В. Кряжимский, Задачи оптимального управления на бесконечном интервале времени в экономике, *УМН*, 2012, том 67, выпуск 2, 3–64

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9467>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 16:32:27

УДК 517.977

Задачи оптимального управления на бесконечном интервале времени в экономике

С. М. Асеев, К. О. Бесов, А. В. Кряжимский

Настоящая работа посвящена развитию теории оптимального управления для одного класса задач на бесконечном интервале времени, возникающих в экономике при исследовании динамических моделей оптимального распределения ресурсов. Задачи данного класса характеризуются фиксированным начальным состоянием, отсутствием каких-либо ограничений на поведение допустимых траекторий на бесконечности и специальным видом интегрального функционала, задаваемого несобственным интегралом с дисконтированием. Основное внимание уделяется развитию метода “конечно-временных” аппроксимаций и его применению к получению наиболее полных вариантов принципа максимума Понтрягина для таких задач. Получены условия, гарантирующие нормальность задачи и выполнение “стандартных” условий трансверсальности на бесконечности. В качестве содержательного примера рассмотрена одна новая двухсекторная модель оптимального экономического роста со случайным скачком цен.

Библиография: 53 названия.

Ключевые слова: динамическая оптимизация, принцип максимума Понтрягина, бесконечный горизонт, условия трансверсальности на бесконечности, оптимальный экономический рост.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение.....	4
2. Постановка задачи. Вспомогательные результаты	8
3. Аппроксимационный вариант принципа максимума	14
4. Случай доминирования дисконтирующего множителя.....	25
5. Монотонный случай.....	32
6. Модель оптимального экономического роста со случайным скачком цен	38
7. Экономическая интерпретация принципа максимума	53
Список литературы.....	61

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 09-01-00624-а, 10-01-91004-АНФ-а, 11-01-00348-а, 11-01-12018-офи-м и 11-01-12112-офи-м), программы “Ведущие научные школы” (грант НШ-65772.2010.1) и научной программы Президиума РАН “Математическая теория управления”.

1. Введение

Экономические модели оптимального динамического распределения ресурсов явились в 50-х годах прошлого века одним из источников создания современной математической теории оптимального управления. В 60–70-е годы мощный толчок этому направлению в экономике (см. [3], [4], [23], [49]) дало открытие (в конце 50-х годов) Л. С. Понтрягиным и его сотрудниками знаменитого принципа максимума Понтрягина [44]. Оказалось, что принцип максимума имеет прозрачную экономическую интерпретацию (см. [28]) и является эффективным аналитическим средством исследования многих экономических моделей.

Следует отметить, что постановки задач оптимального управления в экономике часто отличаются от постановок задач, возникающих в технике. Бесконечный интервал планирования – одно из основных таких отличий.

Действительно, рассмотрим постановку типичной “экономической” задачи оптимального управления на фиксированном конечном интервале времени $[0, T]$, $T > 0$:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad u(t) \in U, \quad (1.1)$$

$$x(0) = x_0, \quad (1.2)$$

$$J_T(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_0^T e^{-\rho t} g(x(t), u(t)) dt + e^{-\rho T} V(x(T)) \rightarrow \max. \quad (1.3)$$

Здесь $x(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t)) \in \mathbb{R}^n$ и $u(t) = (u^1(t), \dots, u^m(t)) \in \mathbb{R}^m$ – соответственно фазовый вектор производственного капитала и вектор управления (инвестиций) в текущий момент $t \in [0, T]$, $g(x(t), u(t))$ – мгновенная “полезность” допустимой пары $(x(\cdot), u(\cdot))$ в момент t , величина $V(x(T))$ характеризует “стоимость” вектора капитала $x(T)$ в момент T , а дисконтирующий множитель $e^{-\rho t}$, $\rho \geq 0$, характеризует субъективное временное предпочтение текущей полезности в момент t . Вид функционала (1.3) определяется здесь тем обстоятельством, что в экономических задачах оптимальный процесс должен максимизировать не только суммарную текущую полезность (интегральный член в функционале (1.3)), но и всю последующую полезность (терминальный член в функционале (1.3)).

Сформулированная задача (1.1)–(1.3) является стандартной задачей теории оптимального управления [44], однако такая ее постановка не всегда удовлетворительна с экономической точки зрения. Прежде всего это связано с тем фактом, что во многих экономических моделях отсутствует естественное обоснование выбора определенного горизонта планирования $T > 0$. Более того, относительно многих экономических систем часто неявно предполагается, что они будут существовать вечно или во всяком случае на неопределенно больших промежутках времени. Поэтому при выборе какого-либо конкретного момента $T > 0$ окончания процесса управления всегда возникает вопрос: что будет происходить с рассматриваемой экономической системой после этого момента T ? Рассмотрение этого вопроса естественно приводит к постановке задачи

на бесконечном интервале времени $[0, \infty)$:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad u(t) \in U, \quad (1.4)$$

$$x(0) = x_0, \quad (1.5)$$

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_0^\infty e^{-\rho t} g(x(t), u(t)) dt \rightarrow \max. \quad (1.6)$$

Естественность постановки экономической задачи оптимального управления как задачи (1.4)–(1.6) связана также и с тем фактом, что терминальный член в функционале (1.3) содержит стоимость $V(x(T))$ вектора капитала $x(T)$ в будущий момент T , которая, вообще говоря, в начальный момент неизвестна и должна быть каким-то образом определена заранее.

В случае, когда объект управления существует неопределенно длительное время, стоимость $V(\xi, T)$ вектора капитала $\xi \in \mathbb{R}^n$ в момент $T \geq 0$ обычно определяют при помощи функции оптимального значения в следующей задаче оптимального управления:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad u(t) \in U, \quad (1.7)$$

$$x(T) = \xi, \quad (1.8)$$

$$J_T(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_T^\infty e^{-\rho(t-T)} g(x(t), u(t)) dt \rightarrow \max, \quad (1.9)$$

т. е. полагают

$$V(\xi, T) = \sup_{(x(\cdot), u(\cdot))} J_T(x(\cdot), u(\cdot)). \quad (1.10)$$

Здесь верхняя грань берется по всем допустимым парам $(x(\cdot), u(\cdot))$ в задаче (1.7)–(1.9).

Заметим, что так определенная стоимость $V(\xi, T)$ вектора капитала $\xi \in \mathbb{R}^n$ инвариантна по времени, т. е. $V(\xi, T) \equiv V(\xi)$, $T \geq 0$ (это легко показать при помощи замены времени $s = t - T$, $s \geq 0$, в соотношениях (1.7)–(1.9)).

Подставляя теперь стоимость $V(x(T)) = V(x(T), T)$, определенную равенством (1.10), в функционал (1.3), в силу аддитивности интеграла снова приходим к задаче оптимального управления (1.4)–(1.6) на бесконечном интервале $[0, \infty)$.

Другой механизм появления бесконечного интервала планирования связан с ситуацией, когда момент времени $T > 0$ окончания процесса управления является случайной величиной (подробнее о задачах со случайным временем остановки см. [22; гл. 11]). Заметим, что такая ситуация была рассмотрена Л. С. Понтрягиным и Е. Ф. Мищенко еще в начале 1960-х годов в связи с задачей о вычислении вероятности встречи малой окрестности управляемой точки со случайной марковской точкой (см. [44; гл. 7]).

В качестве примера рассмотрим случай, когда для любого $t \geq 0$ и любого достаточно малого $\Delta t > 0$ вероятность $P(T < t + \Delta t \mid T \geq t)$ прекращения процесса управления в задаче (1.1)–(1.3) в момент времени $T \in (t, t + \Delta t]$ при условии $T \geq t$ удовлетворяет равенству

$$P(T < t + \Delta t \mid T \geq t) = \nu \Delta t + o(\Delta t), \quad (1.11)$$

где $\nu > 0$ и $o(\Delta t)/\Delta t \rightarrow 0$ при $\Delta t \rightarrow 0$. Нетрудно показать (см. [36; § 8, пример 3]), что при таких предположениях случайная величина T имеет следующие экспоненциальные функцию распределения $\Phi(t) = P(T < t)$ и плотность $\varphi(t)$:

$$\Phi(t) = 1 - e^{-\nu t}, \quad \varphi(t) = \dot{\Phi}(t) = \nu e^{-\nu t} \quad \text{для любого } t \geq 0. \quad (1.12)$$

Выберем теперь в качестве цели процесса управления максимизацию математического ожидания $E(J_T(x(\cdot), u(\cdot)))$ случайной величины

$$J_T(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_0^T e^{-\rho t} g(x(t), u(t)) dt + e^{-\rho T} V(x(T)). \quad (1.13)$$

В этом случае функция стоимости $V(\cdot)$ считается известной.

Будем предполагать, что для любой допустимой пары $(x(\cdot), u(\cdot))$ в задаче (1.1)–(1.3) выполняются условия

$$\int_0^\infty e^{-(\nu+\rho)t} V(x(t)) dt < \infty \quad \text{и} \quad \lim_{T \rightarrow \infty} e^{-\nu T} \int_0^T e^{-\rho t} g(x(t), u(t)) dt = 0. \quad (1.14)$$

В соответствии с определением математического ожидания имеем

$$\begin{aligned} E(J_T(x(\cdot), u(\cdot))) &= \nu \int_0^\infty \left[e^{-\nu T} \int_0^T e^{-\rho t} g(x(t), u(t)) dt \right] dT \\ &\quad + \nu \int_0^\infty e^{-(\nu+\rho)T} V(x(T)) dT. \end{aligned}$$

Отсюда после интегрирования по частям получаем

$$E(J_T(x(\cdot), u(\cdot))) = \int_0^\infty e^{-(\nu+\rho)t} [g(x(t), u(t)) + \nu V(x(t))] dt. \quad (1.15)$$

Таким образом, задача максимизации математического ожидания функционала (1.13) в задаче со случайным моментом окончания процесса управления $T > 0$ снова приводит к задаче на бесконечном интервале вида (1.4)–(1.6):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)), \quad u(t) \in U, \\ x(0) &= x_0, \end{aligned}$$

$$E(J_T(x(\cdot), u(\cdot))) = \int_0^\infty e^{-(\nu+\rho)t} [g(x(t), u(t)) + \nu V(x(t))] dt \rightarrow \max.$$

Задачи оптимального управления вида (1.4)–(1.6) являются главным объектом изучения в настоящей работе. Отметим, что этой тематике посвящена обширная литература. Ряд конкретных экономических моделей, приводящих к задачам данного вида, см., например, в [22], [37], [48]. Такие задачи часто связывают с исследованием процессов экономического роста (см., например, [1], [2], [17], [38], [52]). Поэтому задачи вида (1.4)–(1.6) иногда называют *задачами оптимального экономического роста*. Впервые модель оптимизации

экономического роста в виде вариационной задачи максимизации интегрального функционала на бесконечном интервале времени была рассмотрена в 1920-х годах Ф. Рамсеем [45].

Следует отметить, что в экономических публикациях применение методов теории оптимального управления, в частности необходимых условий оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина, нередко происходит без должного математического обоснования. Однако в случае бесконечного интервала планирования в соотношениях принципа максимума возможны различные патологические эффекты, которые необходимо учитывать при его применении. При этом в общем случае нельзя гарантировать ни *нормальности* задачи (1.4)–(1.6) (т.е. нельзя исключить случай $\psi^0 = 0$), ни выполнения “стандартных” *условий трансверсальности на бесконечности* вида

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = 0 \quad (1.16)$$

или

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle x_*(t), \psi(t) \rangle = 0, \quad (1.17)$$

которые часто используются в экономических приложениях как необходимые условия без дополнительного обоснования. Здесь $\psi(\cdot)$, ψ^0 – сопряженные переменные (множители Лагранжа), соответствующие оптимальной допустимой паре $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ в задаче (1.4)–(1.6) в силу принципа максимума. Впервые возможность патологий такого рода была отмечена в работах [39], [49]. Различные иллюстрирующие примеры см. также в [10], [15], [43]. Заметим, что вопрос об асимптотическом поведении сопряженной переменной весьма важен с точки зрения эффективного применения принципа максимума, поскольку в общем случае без дополнительных условий типа условий трансверсальности (1.16) или (1.17) соотношения принципа максимума выделяют “слишком широкое” множество экстремалей.

Попытки получить достаточные условия нормальности задачи (1.4)–(1.6) и охарактеризовать асимптотическое поведение сопряженной переменной в соотношениях принципа максимума предпринимались многими авторами (см. [15], [20], [29], [39], [41], [43], [46], [47], [50], [53]), обычно при довольно сильных дополнительных предположениях типа выпуклости.

Основной целью настоящей работы является развитие *метода конечно-временных аппроксимаций* (см. [8]–[10]) и получение с его помощью по возможности наиболее полных вариантов принципа максимума для задачи (1.4)–(1.6), причем в достаточно общем случае. Суть данного метода состоит в построении последовательности стандартных задач оптимального управления, аппроксимирующих исходную задачу (1.4)–(1.6), на стремящихся к бесконечности конечных интервалах времени с последующим предельным переходом в соотношениях принципа максимума для аппроксимирующих задач. Полученные здесь результаты обобщают ряд предыдущих результатов авторов в этом направлении (см. [5], [6], [8]–[10], [12], [13]).

Дальнейшее изложение организовано следующим образом. В разделе 2 обсуждается постановка рассматриваемой задачи и доказываются два вспомогательных результата: теорема существования оптимального управления и теорема о равномерной аппроксимации общей нелинейной управляемой системы

структурно более простой линейной по управлению системой (с управлениями типа скользящих режимов). Раздел 3 посвящен описанию метода конечно-временных аппроксимаций. Здесь получен общий (аппроксимационный) вариант принципа максимума Понтрягина для рассматриваемой задачи. В разделах 4 и 5 рассмотрены два конкретных случая: случай доминирования дисконтирующего множителя и монотонный случай. В этих случаях принцип максимума выполняется в нормальной форме и, кроме того, имеют место некоторые дополнительные соотношения для сопряженной переменной $\psi(\cdot)$. В разделе 6 развитая теория применяется к одной новой модели оптимального экономического роста со случайным скачком цен. Раздел 7 посвящен экономической интерпретации принципа максимума.

2. Постановка задачи. Вспомогательные результаты

Будем рассматривать следующую задачу оптимального управления (P) (см. (1.4)–(1.6)):

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad u(t) \in U, \quad (2.1)$$

$$x(0) = x_0, \quad (2.2)$$

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_0^\infty e^{-\rho t} g(x(t), u(t)) dt \rightarrow \max. \quad (2.3)$$

Здесь $x(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t)) \in \mathbb{R}^n$ и $u(t) = (u^1(t), \dots, u^m(t)) \in \mathbb{R}^m$ – значения фазового вектора управляемой системы (2.1) и вектора управления соответственно в момент времени $t \geq 0$; U – непустой компакт из $\mathbb{R}^m$; $x_0 \in \mathbb{R}^n$ – заданное начальное состояние системы; $\rho \geq 0$ – параметр дисконтирования. Предполагается, что $x_0 \in G$, где G – заданное открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Векторная функция $f: G \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ и скалярная функция $g: G \times U \rightarrow \mathbb{R}$ предполагаются непрерывными. Кроме того, мы предполагаем, что их частные производные $\frac{\partial}{\partial x} f(\cdot, \cdot)$ и $\frac{\partial}{\partial x} g(\cdot, \cdot)$ также непрерывны на множестве $G \times U$.

Интеграл в (2.3) понимается как несобственный, т. е. по определению

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-\rho t} g(x(t), u(t)) dt, \quad (2.4)$$

если этот предел существует. То же самое относится ко всем встречающимся ниже интегралам по бесконечному промежутку времени.

Будем считать, что класс допустимых управлений для системы (2.1) состоит из всех измеримых (по Лебегу) вектор-функций $u: [0, \infty) \rightarrow U$. По определению допустимой траекторией системы (2.1), соответствующей допустимому управлению $u(\cdot)$, является локально абсолютно непрерывное (т. е. абсолютно непрерывное на любом конечном интервале $[0, T]$, $T > 0$) решение (в смысле Каратеодори) $x(\cdot)$ дифференциального уравнения (2.1), определенное на некотором конечном или бесконечном интервале времени $[0, \tau)$, $\tau > 0$, удовлетворяющее начальному условию (2.2) и лежащее в множестве G . В силу стандартной теоремы существования решения задачи Коши (см. [31]) для любого

допустимого управления $u(\cdot)$ существует (единственная) соответствующая этому управлению допустимая траектория $x(\cdot)$, определенная на некотором интервале $[0, \tau)$, $\tau > 0$. Пара $(x(\cdot), u(\cdot))$, где $u(\cdot)$ – допустимое управление, а $x(\cdot)$ – соответствующая ему допустимая траектория, называется *допустимой парой* (в задаче (P)) или *процессом*.

Всюду далее будем считать выполненными следующие условия (A1)–(A3).

(A1) Все допустимые траектории $x(\cdot)$ системы (2.1) имеют интервал $[0, \infty)$ своим максимальным интервалом определения, на котором, если не оговорено противное, они и рассматриваются.

(A2) Для любого $x \in G$ множество

$$Q(x) = \{(z^0, z) \in \mathbb{R}^{n+1} : z^0 \leq g(x, u), z = f(x, u), u \in U\}$$

является выпуклым.

(A3) Существует такая положительная функция $\omega(\cdot)$ на $[0, \infty)$, что $\omega(t) \rightarrow +0$ при $t \rightarrow \infty$ и для любой допустимой пары $(x(\cdot), u(\cdot))$ имеем

$$\int_T^{T'} e^{-\rho t} g(x(t), u(t)) dt \leq \omega(T), \quad 0 \leq T \leq T'.$$

Обсудим условия (A1)–(A3). Прежде всего отметим, что в случае, когда $G = \mathbb{R}^n$, стандартная оценка вида

$$\langle x, f(x, u) \rangle \leq C_0(1 + \|x\|^2), \quad x \in G, \quad u \in U$$

(см. [30], [31]) с некоторой постоянной $C_0 \geq 0$ является достаточной для выполнения условия (A1). Легко видеть, что условие (A2) влечет выпуклость вектограммы управляемой системы (2.1), т. е. множества

$$f(x, U) = \{f(x, u) : u \in U\},$$

для любого $x \in G$.

Далее, из теоремы 3 в [31; § 7] вытекает следующий результат.

ЛЕММА 1. Пусть выполняются условия (A1) и (A2). Тогда для любого $T > 0$ множество всех допустимых траекторий $\{x(\cdot)\}$, рассматриваемых на интервале $[0, T]$, является компактом в пространстве $C([0, T], \mathbb{R}^n)$ непрерывных на $[0, T]$ функций со значениями в $\mathbb{R}^n$ с равномерной метрикой.

Наконец, из условия (A3) следует, что для любой допустимой пары $(x(\cdot), u(\cdot))$ предел в (2.4) существует и равен либо конечному числу, либо $-\infty$. Действительно, нижний предел заведомо существует, а в силу (A3) верхний предел конечен и совпадает с нижним.

Оптимальной допустимой парой (оптимальным процессом) в задаче (P) будем называть такую допустимую пару $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$, что значение функционала (2.4) на ней конечно и является максимально возможным, т. е.

$$J(x_*(\cdot), u_*(\cdot)) = \max_{(x(\cdot), u(\cdot))} J(x(\cdot), u(\cdot)) > -\infty.$$

Здесь максимум берется по всем допустимым парам $(x(\cdot), u(\cdot))$.

Отметим, что некоторые экономические модели приводят к задачам оптимального управления вида (P), в которых предел в (2.4) может не существовать

или равняться $+\infty$. В этом случае определение оптимальности допустимой пары $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ в задаче (P) может быть дано различными (вообще говоря, неэквивалентными) способами (подробнее см. [22]).

В настоящей работе основное внимание уделяется эффектам в соотношениях принципа максимума Понтрягина для задачи (P), связанным с рассмотрением процесса управления на бесконечном интервале времени. Наша основная цель – найти как можно более полную систему соотношений, характеризующих оптимальные процессы в задаче (P). Поэтому, не претендуя на максимальную общность, мы ограничиваемся здесь случаем, когда для задачи (P) выполнено условие (A3), которое гарантирует, что для любой допустимой пары несобственный интеграл в функционале (2.3) либо сходится (к конечному числу), либо расходится к $-\infty$. По этой же причине в дальнейшем наше рассмотрение ограничено автономным случаем, когда функции $f(\cdot, \cdot)$ и $g(\cdot, \cdot)$ не зависят от времени.

Определим множество достижимости $X(t) \subset \mathbb{R}^n$ системы (2.1) из начального состояния x_0 (см. (2.2)) в момент $t \geq 0$ равенством

$$X(t) = \bigcup_{x(\cdot)} \{x(t)\}; \quad (2.5)$$

здесь объединение берется по всем допустимым траекториям $x(\cdot)$. Для произвольного $T \geq 0$ положим

$$\Pi_T = \bigcup_{t \in [0, T]} X(t). \quad (2.6)$$

В силу леммы 1 множество Π_T – компакт в $\mathbb{R}^n$.

Следующий результат устанавливает существование оптимальной допустимой пары в задаче (P).

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполняются условия (A1)–(A3) и хотя бы для одной допустимой пары $(x(\cdot), u(\cdot))$ значение функционала $J(x(\cdot), u(\cdot))$ конечно, т. е. $J(x(\cdot), u(\cdot)) > -\infty$. Тогда в задаче (P) существует оптимальное допустимое управление.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{(x_k(\cdot), u_k(\cdot))\}_{k=1}^\infty$ – произвольная максимизирующая последовательность допустимых пар в задаче (P). В силу леммы 1, переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно считать, что траектории $x_k(\cdot)$ сходятся к некоторой допустимой траектории $x_*(\cdot)$ равномерно на любом отрезке $[0, T]$, $T > 0$, при $k \rightarrow \infty$. Покажем, что управление $u_*(\cdot)$, которое порождает траекторию $x_*(\cdot)$ на $[0, \infty)$, можно выбрать так, что $J(x_*(\cdot), u_*(\cdot)) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} J(x_k(\cdot), u_k(\cdot))$.

Для любых $x \in G$ и $t \geq 0$ определим (выпуклое в силу условия (A2)) множество

$$W(x, t) = \{(z^0, z) \in \mathbb{R}^{n+1} : z^0 \leq e^{-\rho t} g(x, u), z = f(x, u), u \in U\}.$$

Для $k = 1, 2, \dots$ определим вспомогательную функцию $x_k^0: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ равенством

$$x_k^0(t) = \int_0^t e^{-\rho s} g(x_k(s), u_k(s)) ds.$$

В силу непрерывности функции $g(\cdot, \cdot)$ на $G \times U$ функции $x_k^0(\cdot)$ равномерно ограничены и равномерно непрерывны (липшицевы с общей константой) на любом конечном отрезке $[0, T]$. Поэтому, переходя, если нужно, к подпоследовательности, в силу теоремы Арцела–Асколи (см., например, [26; гл. V, § 2]) можно считать, что $x_k^0(\cdot)$ сходятся к некоторой локально липшицевой функции $x_*^0(\cdot)$ равномерно на любом отрезке $[0, T]$, $T > 0$, при $k \rightarrow \infty$.

По построению для любого $k = 1, 2, \dots$ вектор-функция $(x_k^0, x_k): [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ удовлетворяет дифференциальному включению

$$(\dot{x}_k^0(t), \dot{x}_k(t)) \in W(x_k(t), t) \quad \text{при почти всех } t > 0.$$

Так как многозначное отображение $W(\cdot, \cdot)$ имеет замкнутый график на множестве $\Pi_T \times [0, T]$ для любого $T > 0$, множества $W(x, t)$ выпуклы при всех $x \in G$ и $t \geq 0$ и последовательность $\{(x_k^0(\cdot), x_k(\cdot))\}_{k=1}^\infty$ равномерно сходится к $(x_*^0(\cdot), x_*(\cdot))$ на любом конечном отрезке $[0, T]$, $T > 0$, то локально абсолютно непрерывная функция $(x_*^0(\cdot), x_*(\cdot))$ удовлетворяет дифференциальному включению

$$(\dot{x}_*^0(t), \dot{x}_*(t)) \in W(x_*(t), t) \quad \text{при почти всех } t > 0.$$

По лемме Филиппова о существовании измеримой однозначной ветви у многозначного отображения (см. [30]) существует такое допустимое управление $(u_*, v_*): [0, \infty) \rightarrow U \times [0, \infty)$ (с локально ограниченной компонентой $v_*(\cdot)$), что

$$\begin{aligned} \dot{x}_*(t) &= f(x_*(t), u_*(t)) \quad \text{при почти всех } t > 0, \\ \dot{x}_*^0(t) &= e^{-\rho t} g(x_*(t), u_*(t)) - v_*(t) \leq e^{-\rho t} g(x_*(t), u_*(t)) \quad \text{при почти всех } t > 0. \end{aligned}$$

В силу равномерной сходимости последовательности $\{x_k^0(\cdot)\}_{k=1}^\infty$ к функции $x_*^0(\cdot)$ на любом конечном отрезке $[0, T]$ при $k \rightarrow \infty$ это дает неравенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-\rho t} g(x_k(t), u_k(t)) dt \leq \int_0^T e^{-\rho t} g(x_*(t), u_*(t)) dt. \quad (2.7)$$

Отсюда в силу (A3) для любого $T \geq 0$ находим

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J(x_k(\cdot), u_k(\cdot)) \leq \int_0^T e^{-\rho t} g(x_*(t), u_*(t)) dt + \omega(T).$$

Переходя к пределу при $T \rightarrow \infty$, получаем требуемое неравенство. Теорема доказана.

Доказанный результат обобщает теорему 2.1 из [10] (см. также [12; теорема 1]).

Доказательство теоремы 1 основано на тех же идеях, что и доказательство известной теоремы Филиппова (см. [30] и [24; теорема 9.3.i]) о существовании оптимального допустимого управления в задаче на конечном интервале времени. Заметим, что данное доказательство может быть с небольшими изменениями перенесено на более общий неавтономный случай, когда правая часть $f(\cdot, \cdot)$ управляемой системы (2.1) и функция мгновенной полезности $g(\cdot, \cdot)$ в функционале (2.3) зависят также от времени (измеримым образом), а множество

ограничений на управление имеет вид $U = U(t, x)$, $t \geq 0$, $x \in G$, где $U(\cdot, \cdot)$ – полунепрерывное сверху (см. [30], [31]) компактозначное многозначное отображение.

Один из наиболее общих результатов о существовании оптимального управления в задачах на бесконечном интервале времени был доказан Э. Балдером [16]. Отметим, однако, что использованное здесь условие (A3) (предложенное в [27]) слабее условия равномерной интегрируемости, которое требуется в [16], и аналогичной оценки на “хвост” функционала, используемой в [10] и [12].

Результаты о существовании управления, оптимального в более слабом смысле, в задачах на бесконечном интервале времени см. в [22].

Определим теперь один вспомогательный класс линейных по управлению систем, которые будут использоваться в дальнейшем для аппроксимации задачи (P).

Пусть $\{u_i\}_{i=1}^N$ – некоторый конечный набор из $N \geq 1$ точек компакта U . Для $x_0 \in G$ и $t \in [0, T]$, $T > 0$, рассмотрим следующую управляемую систему:

$$\dot{x}(t) = f_N(x(t), v(t)) = \sum_{i=1}^N v^i(t) f(x(t), u_i), \quad v(t) \in V_N, \quad (2.8)$$

$$V_N = \{v = (v^1, \dots, v^N) : v^i \geq 0, i = 1, \dots, N; v^1 + \dots + v^N = 1\},$$

с начальным условием (2.2). Здесь $x \in \mathbb{R}^n$, вектор-функция $f(\cdot, \cdot)$, начальное состояние x_0 и множество G те же самые, что и в исходной задаче (P) (см. (2.1), (2.2)). В качестве допустимых управлений в системе (2.8), как обычно, рассматриваются все измеримые вектор-функции $v(\cdot) = (v^1(\cdot), \dots, v^N(\cdot))$, $v: [0, T] \rightarrow V_N$.

Нетрудно видеть, что для любого $T > 0$ и любого N произвольная допустимая траектория $x(\cdot)$ системы (2.8) на интервале $[0, T]$ является одновременно допустимой траекторией исходной системы (2.1). Действительно, в силу условия выпуклости (A2) для любого $x \in G$ вектограмма $f(x, U)$ системы (2.1) есть выпуклый компакт в $\mathbb{R}^n$. Поэтому для любого $x \in G$ являющаяся в силу своего определения выпуклым компактом вектограмма

$$f_N(x, V_N) = \{f_N(x, v) : v \in V_N\} \quad (2.9)$$

системы (2.8) удовлетворяет включению $f_N(x, V_N) \subset f(x, U)$.

В частности, отсюда вытекает, что все допустимые траектории системы (2.8) лежат в открытом множестве G и в силу леммы 1 их множество является компактом в $C([0, T], \mathbb{R}^n)$.

Заметим, что управляемая система (2.8) рассматривается в классе обычных управлений, т. е. измеримых ограниченных функций, однако она может рассматриваться и как расширение в классе так называемых *обобщенных управлений* (определение и свойства обобщенных управлений см. в [33], [34]) следующей подсистемы управляемой системы (2.1) на интервале $[0, T]$:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad u(t) \in U_N = \{u_i : i = 1, \dots, N\}, \quad (2.10)$$

с начальным условием (2.2).

Действительно, если $v(\cdot)$ – некоторое допустимое управление системы (2.8), то нетрудно видеть, что семейство мер Радона

$$\mu_t = \sum_{i=1}^N v^i(t) \delta_{u_i}, \quad t \in [0, T], \quad (2.11)$$

является обобщенным управлением для системы (2.10) (здесь δ_{u_i} – меры Дирака, сконцентрированные в точках u_i , $i = 1, \dots, N$). С другой стороны, если $\{\mu_t\}_{t \in [0, T]}$ – некоторое обобщенное управление системы (2.10), то в силу конечности множества U_N оно представимо в виде (2.11) с некоторыми измеримыми функциями $v^i(\cdot)$, $i = 1, \dots, N$. Управления вида (2.11) называют *скользящими режимами* (см. [32], [34]).

В дальнейшем мы будем использовать линейные по управлению системы вида (2.8) для построения аппроксимирующей последовательности задач оптимального управления для исходной задачи (P).

Пусть $\{u_i\}_{i=1}^\infty$ – некоторое счетное всюду плотное множество в U . Фиксируем произвольное $T > 0$ и при $N = 1, 2, \dots$ на интервале времени $[0, T]$ рассмотрим управляемую систему (2.8) с начальным условием (2.2).

Оказывается, что при достаточно больших N управляемая система (2.8) “равномерно” аппроксимирует систему (2.1). Именно, справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. *Для любых $T > 0$ и $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число N , что для произвольной допустимой пары $(x(\cdot), u(\cdot))$ системы (2.1) найдется такая допустимая пара $(x_N(\cdot), v_N(\cdot))$ системы (2.8), что выполняются неравенства*

$$\|u(t) - u_i\| \leq \varepsilon \quad \text{для любых } t \in [0, T] \text{ и } i \in \{1, \dots, N\}: v_N^i(t) \neq 0, \quad (2.12)$$

$$\|x(t) - x_N(t)\| \leq \varepsilon \quad \text{для любого } t \in [0, T] \quad (2.13)$$

и, кроме того,

$$\int_0^T e^{-\rho t} \sum_{i=1}^N v_N^i(t) |g(x(t), u(t)) - g(x_N(t), u_i)| dt \leq \varepsilon. \quad (2.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 1 множество $\Gamma = \Pi_T \times U$ (см. (2.6)) – компакт и, следовательно, функции $f(\cdot, \cdot)$ и $g(\cdot, \cdot)$ равномерно непрерывны на Γ . Отсюда следует, что неравенство (2.14) может быть получено из условий (2.12) и (2.13) за счет уменьшения в них величины ε (посредством увеличения N).

Пусть теперь $u(\cdot)$ – произвольное допустимое управление системы (2.1) на интервале $[0, T]$, $T > 0$. Поскольку $\{u_i\}_{i=1}^\infty$ – счетное всюду плотное множество в U , ясно, что для достаточно больших N множество допустимых управлений в задаче (2.8), удовлетворяющих (2.12), непусто. Уменьшая при необходимости ε в (2.12), для каждого такого управления $v_N(\cdot)$ в силу [31; § 8, теорема 5] получаем условие (2.13).

Нетрудно видеть, что в силу равномерной непрерывности функций $f(\cdot, \cdot)$ и $g(\cdot, \cdot)$ на Γ оценки (2.13) и (2.14) равномерны по всем допустимым управлениям $u(\cdot)$ и $v_N(\cdot)$ систем (2.1) и (2.8) на интервале $[0, T]$, удовлетворяющим (2.12)

с некоторым $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ вместо ε . Другими словами, для заданной системы (2.1), (2.2) число N зависит только от T и ε и не зависит от $u(\cdot)$. Теорема доказана.

Отметим, что теорема 2 не совсем стандартна в том смысле, что чаще рассматривают приближения систем с овыпукленными правыми частями и соответствующих обобщенных управлений исходными невыпуклыми (в смысле вектограммы) системами и обычными управлениями (как, например, в [31; § 8, теорема 1] или [33; теорема 3.2]). В нашем случае система (2.1) изначально имеет выпуклую вектограмму (в силу условия (A2)), а приближаем мы ее также системами с выпуклыми вектограммами, но с меньшим запасом допустимых управлений, а именно, допустимые управления в них суть обобщенные управления с носителем, состоящим из конечного числа точек (скользящие режимы).

3. Аппроксимационный вариант принципа максимума

Пусть $(u_*(\cdot), x_*(\cdot))$ – произвольная допустимая оптимальная пара в задаче (P) (см. (2.1)–(2.3)).

Рассмотрим семейство задач оптимального управления (Q_T) , $T > 0$, определенных каждая на своем фиксированном интервале $[0, T]$:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad u(t) \in U, \quad (3.1)$$

$$x(0) = x_0, \quad (3.2)$$

$$J_T(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_0^T e^{-\rho t} g(x(t), u(t)) dt \rightarrow \max. \quad (3.3)$$

Здесь функции $f(\cdot, \cdot)$, $g(\cdot, \cdot)$, начальное состояние $x_0 \in G$, параметр $\rho \geq 0$, множества U и G те же самые, что и в исходной задаче (P). Единственное отличие задачи (Q_T) от задачи (P) состоит в том, что она рассматривается на конечном отрезке $[0, T]$. Класс допустимых управлений в задаче (Q_T) состоит из всех измеримых вектор-функций $u: [0, T] \rightarrow U$.

В силу условий (A1), (A2) и теоремы Филиппова (см. [30] и [24; теорема 9.3.i]) для любого $T > 0$ в задаче (Q_T) существует оптимальная допустимая пара $(x_T(\cdot), u_T(\cdot))$. Будем считать, что пара $(x_T(\cdot), u_T(\cdot))$ продолжена на $[0, \infty)$ и представляет собой допустимую пару в задаче (P).

Докажем равенство

$$\lim_{T \rightarrow \infty} J_T(x_T(\cdot), u_T(\cdot)) = J(x_*(\cdot), u_*(\cdot)). \quad (3.4)$$

В одну сторону неравенство очевидно:

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} J_T(x_T(\cdot), u_T(\cdot)) \geq \liminf_{T \rightarrow \infty} J_T(x_*(\cdot), u_*(\cdot)) = J(x_*(\cdot), u_*(\cdot)). \quad (3.5)$$

Докажем обратное неравенство. Для любых $0 < T' < T$ в силу (A3) имеем

$$\int_0^T e^{-\rho t} g(x_T(t), u_T(t)) dt \leq \int_0^{T'} e^{-\rho t} g(x_T(t), u_T(t)) dt + \omega(T').$$

Отсюда аналогично (2.7) заключаем, что найдется такая допустимая пара $(\tilde{x}(\cdot), \tilde{u}(\cdot))$ в задаче (2.1)–(2.3), что

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-\rho t} g(x_T(t), u_T(t)) dt \leq \int_0^{T'} e^{-\rho t} g(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) dt + \omega(T')$$

для любого $T' > 0$. Переходя в последнем неравенстве к пределу при $T' \rightarrow \infty$, получаем

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} J_T(x_T(\cdot), u_T(\cdot)) \leq J(\tilde{x}(\cdot), \tilde{u}(\cdot)) \leq J(x_*(\cdot), u_*(\cdot)). \quad (3.6)$$

Неравенства (3.5) и (3.6) влекут как существование предела в (3.4), так и само это равенство.

Перейдем к построению последовательности задач оптимального управления на конечных (нефиксированных) интервалах времени, аппроксимирующих задачу (P).

Выберем такие последовательности непрерывно дифференцируемых функций $\{z_k(\cdot)\}_{k=1}^\infty$, $z_k: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$, $k = 1, 2, \dots$, и положительных чисел $\{\sigma_k\}_{k=1}^\infty$, $\sigma_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$, что

$$\sup_{t \in [0, \infty)} \|z_k(t)\| \leq \max_{u \in U} \|u\| + 1, \quad (3.7)$$

$$\int_0^\infty e^{-(\rho+1)t} \|z_k(t) - u_*(t)\|^2 dt \leq \frac{1}{2^k}, \quad (3.8)$$

$$\sup_{t \in [0, \infty)} \|\dot{z}_k(t)\| \leq \sigma_k < \infty. \quad (3.9)$$

Очевидно, что такие последовательности $\{z_k(\cdot)\}_{k=1}^\infty$ и $\{\sigma_k\}_{k=1}^\infty$ существуют.

Выберем монотонно возрастающую и стремящуюся к бесконечности последовательность $\{T_k\}_{k=1}^\infty$ с $T_1 > 1$ так, чтобы (см. (3.4))

$$|J_T^* - J(x_*(\cdot), u_*(\cdot))| \leq \frac{1}{2^k(1 + \sigma_k)} \quad \text{и} \quad \omega(T) \leq \frac{1}{2^k(1 + \sigma_k)} \quad (3.10)$$

при всех $T \geq T_k - 1$. Здесь J_T^* – оптимальное значение функционала (3.3) в задаче (Q_T) на интервале $[0, T]$, а функция $\omega(\cdot)$ определена в условии (A3).

Наконец, для $k = 1, 2, \dots$ выберем такое натуральное число N_k , что при $N = N_k$ управляемая система (2.8) аппроксимирует на интервале времени $[0, T_k]$ управляемую систему (2.1) в смысле теоремы 2 при $\varepsilon = 1/(2^k(1 + \sigma_k))$. Последнее, в частности, означает, что для пары $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ и некоторой допустимой пары $(\hat{x}_{N_k}(\cdot), \hat{v}_{N_k}(\cdot))$ системы (2.8) имеем

$$\|u_*(t) - u_i\| \leq \frac{1}{2^k} \quad \text{для любых } t \in [0, T_k] \text{ и } u_i \in U_{N_k}: \hat{v}_{N_k}^i(t) \neq 0, \quad (3.11)$$

$$\int_0^{T_k} e^{-\rho t} \sum_{i=1}^{N_k} \hat{v}_{N_k}^i(t) |g(x_*(t), u_*(t)) - g(\hat{x}_{N_k}(t), u_i)| dt \leq \frac{1}{2^k(1 + \sigma_k)}. \quad (3.12)$$

Напомним, что точки u_i , $i = 1, 2, \dots$, образуют счетное всюду плотное множество в U (см. (2.8), (2.10)).

Не ограничивая общности, можно считать последовательность $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ монотонно возрастающей: $N_1 < N_2 < \dots$.

Для произвольного $k = 1, 2, \dots$ определим теперь линейную по управлению задачу (P_k) со свободным временем $T > 0$:

$$\dot{x}(t) = f_{N_k}(x(t), v(t)) = \sum_{i=1}^{N_k} v^i(t) f(x(t), u_i), \quad v(t) = (v^1(t), \dots, v^{N_k}(t)) \in V_k, \quad (3.13)$$

$$V_k = \{v = (v^1, \dots, v^{N_k}) : v^i \geq 0, i = 1, \dots, N_k; v^1 + \dots + v^{N_k} = 1\}, \quad (3.14)$$

$$x(0) = x_0, \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \tilde{J}_k(x(\cdot), v(\cdot), T) &= \int_0^T e^{-\rho t} \sum_{i=1}^{N_k} v^i(t) \left[g(x(t), u_i) - e^{-t} \frac{\|u_i - z_k(t)\|^2}{1 + \sigma_k} \right] dt \\ &\quad - (T - T_k)^2 \rightarrow \max. \end{aligned} \quad (3.16)$$

В задаче (P_k) , $k = 1, 2, \dots$, в качестве допустимых управлений рассматриваем измеримые по Лебегу вектор-функции $v(\cdot)$, $v(t) = (v^1(t), \dots, v^{N_k}(t)) \in V_k$, на интервалах $[0, T]$.

Будем называть последовательность $\{(P_k)\}_{k=1}^{\infty}$ *аппроксимирующей последовательностью задач*, соответствующей оптимальному управлению $u_*(\cdot)$.

Легко видеть, что для любого $k = 1, 2, \dots$ задача (P_k) удовлетворяет условиям (A1) и (A2). Поэтому в силу теоремы Филиппова для всех достаточно больших $k = 1, 2, \dots$ в задаче (P_k) существует оптимальная допустимая пара $(\tilde{x}_k(\cdot), \tilde{v}_k(\cdot))$, которая определена на некотором отрезке $[0, \tilde{T}_k]$, $\tilde{T}_k > 0$. В дальнейшем будем считать без ограничения общности, что оптимальные пары существуют во всех задачах (P_k) , $k = 1, 2, \dots$ (если это не так, то увеличим первые несколько T_k) и что любая оптимальная в задаче (P_k) , $k = 1, 2, \dots$, пара $(\tilde{x}_k(\cdot), \tilde{v}_k(\cdot))$ продолжена с интервала $[0, \tilde{T}_k]$ на весь бесконечный полуинтервал $[0, \infty)$ произвольным допустимым для системы (3.13) образом.

Следующий результат является основным инструментом изучения задачи (P) посредством ее аппроксимации последовательностью $\{(P_k)\}_{k=1}^{\infty}$ линейных по управлению задач со свободным временем окончания процесса управления $T > 0$.

ЛЕММА 2. Пусть для задачи (P) выполняются условия (A1)–(A3). Пусть, далее, $u_*(\cdot)$ – оптимальное допустимое управление в задаче (P) и $\{(P_k)\}_{k=1}^{\infty}$ – соответствующая $u_*(\cdot)$ последовательность аппроксимирующих задач оптимального управления. Пусть, наконец, $\tilde{v}_k(\cdot)$ – оптимальное управление в задаче (P_k) , определенное на соответствующем отрезке $[0, \tilde{T}_k]$, $\tilde{T}_k > 0$. Тогда имеют место сходимости

$$\tilde{T}_k - T_k \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty, \quad (3.17)$$

$$\sum_{i=1}^{N_k} \tilde{v}_k^i(t) \|u_i - u_*(t)\|^2 \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty \text{ для почти всех } t > 0. \quad (3.18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tilde{x}_k(\cdot)$, $k = 1, 2, \dots$, – допустимая траектория, соответствующая управлению $\tilde{v}_k(\cdot)$ в задаче (P_k) на отрезке $[0, \tilde{T}_k]$. В силу оптимальности пары $(\tilde{x}_k(\cdot), \tilde{v}_k(\cdot))$ в задаче (P_k) , допустимости пары $(\hat{x}_{N_k}(\cdot), \hat{v}_{N_k}(\cdot))$ в этой задаче и выбора последовательности $\{N_k\}_{k=1}^\infty$ (см. (3.12)) для всех k имеем

$$\begin{aligned} & \tilde{J}_k(\tilde{x}_k(\cdot), \tilde{v}_k(\cdot), \tilde{T}_k) \\ &= \int_0^{\tilde{T}_k} e^{-\rho t} \sum_{i=1}^{N_k} \tilde{v}_k^i(t) \left[g(\tilde{x}_k(t), u_i) - e^{-t} \frac{\|u_i - z_k(t)\|^2}{1 + \sigma_k} \right] dt - (\tilde{T}_k - T_k)^2 \\ &\geq \int_0^{T_k} e^{-\rho t} \sum_{i=1}^{N_k} \hat{v}_{N_k}^i(t) \left[g(\hat{x}_{N_k}(t), u_i) - e^{-t} \frac{\|u_i - z_k(t)\|^2}{1 + \sigma_k} \right] dt \\ &\geq \int_0^{T_k} e^{-\rho t} \sum_{i=1}^{N_k} \hat{v}_{N_k}^i(t) \left[g(x_*(t), u_*(t)) \right. \\ &\quad \left. - 2e^{-t} \frac{\|u_i - u_*(t)\|^2 + \|u_*(t) - z_k(t)\|^2}{1 + \sigma_k} \right] dt - \frac{1}{2^k(1 + \sigma_k)}. \end{aligned}$$

Отсюда в силу условий (3.11), (3.8), (A3) и второго условия в (3.10) получаем

$$\tilde{J}_k(\tilde{x}_k(\cdot), \tilde{v}_k(\cdot), \tilde{T}_k) \geq J(x_*(\cdot), u_*(\cdot)) - \frac{4}{2^k(1 + \sigma_k)} - \frac{2}{4^k(\rho + 1)(1 + \sigma_k)}. \quad (3.19)$$

С другой стороны, в силу того факта, что любая допустимая траектория овыпукленной системы (или дифференциального включения, полученного посредством овыпукления вектограммы системы (2.10)) является равномерным пределом последовательности допустимых траекторий исходной системы (см., например, [21; гл. 2, теорема 10] или [34], [33; теорема 3.2]), имеем

$$\tilde{J}_k(\tilde{x}_k(\cdot), \tilde{v}_k(\cdot), \tilde{T}_k) \leq J_{\tilde{T}_k}^* - \int_0^{\tilde{T}_k} e^{-(\rho+1)t} \sum_{i=1}^{N_k} \tilde{v}_k^i(t) \frac{\|u_i - z_k(t)\|^2}{1 + \sigma_k} dt - (\tilde{T}_k - T_k)^2, \quad (3.20)$$

где $J_{\tilde{T}_k}^*$ – оптимальное значение функционала (3.3) в задаче $(Q_{\tilde{T}_k})$. Объединяя (3.19) и (3.20), получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^{\tilde{T}_k} e^{-(\rho+1)t} \sum_{i=1}^{N_k} \tilde{v}_k^i(t) \frac{\|u_i - z_k(t)\|^2}{1 + \sigma_k} dt + (\tilde{T}_k - T_k)^2 \\ & \leq J_{\tilde{T}_k}^* - J(x_*(\cdot), u_*(\cdot)) + \frac{1}{1 + \sigma_k} \left[\frac{4}{2^k} + \frac{2}{4^k(\rho + 1)} \right]. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Заметим, что правая часть неравенства (3.21) ограничена (например, числом $\omega(0) - J(x_*(\cdot), u_*(\cdot)) + 6$), поэтому разность $\tilde{T}_k - T_k$ ограничена по модулю, а стало быть, $\tilde{T}_k$ стремится к ∞ вместе с T_k при $k \rightarrow \infty$. Но в силу (3.4) это означает, что правая часть (3.21) стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$. Отсюда следует (3.17). Кроме того, при достаточно больших k из соотношения (3.17) мы имеем $\tilde{T}_k > T_k - 1$ и, пользуясь первым условием (3.10), из (3.21) получаем оценку

$$\int_0^{\tilde{T}_k} e^{-(\rho+1)t} \sum_{i=1}^{N_k} \tilde{v}_k^i(t) \frac{\|u_i - z_k(t)\|^2}{1 + \sigma_k} dt \leq \frac{1}{1 + \sigma_k} \left[\frac{5}{2^k} + \frac{2}{4^k(\rho + 1)} \right]. \quad (3.22)$$

Так как для любого $T > 0$ имеем $\tilde{T}_k > T$ при достаточно больших k , то при таких k

$$\begin{aligned} & \int_0^T \sum_{i=1}^{N_k} \tilde{v}_k^i(t) \|u_i - u_*(t)\|^2 dt \\ & \leq 2e^{(\rho+1)T} \int_0^T e^{-(\rho+1)t} \left(\|z_k(t) - u_*(t)\|^2 + \sum_{i=1}^{N_k} \tilde{v}_k^i(t) \|u_i - z_k(t)\|^2 \right) dt \\ & \leq 2e^{(\rho+1)T} \left(\frac{6}{2^k} + \frac{2}{4^k(\rho+1)} \right) \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Так как скорость стремления к 0 здесь как у геометрической прогрессии, мы получаем сходимость почти всюду¹, т. е. (3.18). Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что установленное в доказательстве леммы 2 стремление к нулю (при $k \rightarrow \infty$) разности правых частей (3.19) и (3.20) приводит к равенствам

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{J}_k(\tilde{x}_k(\cdot), \tilde{v}_k(\cdot), \tilde{T}_k) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{\tilde{T}_k} e^{-\rho t} \sum_{i=1}^{N_k} \tilde{v}_k^i(t) g(\tilde{x}_k(t), u_i) dt \\ &= J(x_*(\cdot), u_*(\cdot)). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Следующий результат вытекает из леммы 2.

ЛЕММА 3. Пусть $u_*(\cdot)$ – оптимальное допустимое управление в задаче (P), $\{(P_k)\}_{k=1}^\infty$ – соответствующая $u_*(\cdot)$ аппроксимирующая последовательность задач и $\tilde{v}_k(\cdot)$ – оптимальное управление в задаче (P_k). Тогда для любого $T > 0$ и любой непрерывной функции $\xi: [0, T] \times U \rightarrow \mathbb{R}^q$ последовательность $\{\varphi_k(\cdot)\}_{k=1}^\infty$ измеримых вектор-функций $\varphi_k: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^q$, определенных равенствами

$$\varphi_k(t) = \sum_{i=1}^{N_k} \tilde{v}_k^i(t) \xi(t, u_i), \quad t \in [0, T],$$

сходится почти всюду на $[0, T]$ (а значит, и в $L^1([0, T], \mathbb{R}^q)$) к измеримой функции $\varphi(\cdot)$, определенной равенством $\varphi(t) = \xi(t, u_*(t))$, $t \in [0, T]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непрерывная функция $\xi(\cdot, \cdot)$ ограничена на компакте $[0, T] \times U$, т. е. $\|\xi(t, u)\| \leq M$ при $t \in [0, T]$, $u \in U$ для некоторого $M > 0$. Зафиксируем некоторое $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \|\varphi(t) - \varphi_k(t)\| &\leq \sum_{i=1}^{N_k} \tilde{v}_k^i(t) \|\xi(t, u_*(t)) - \xi(t, u_i)\| \\ &\leq \sum_{i \in \mathcal{J}_\varepsilon(t)} \tilde{v}_k^i(t) \|\xi(t, u_*(t)) - \xi(t, u_i)\| + 2M \sum_{i \in \mathcal{J}_\varepsilon^c(t)} \tilde{v}_k^i(t), \end{aligned} \quad (3.24)$$

где $\mathcal{J}_\varepsilon(t) = \{i \in \{1, \dots, N_k\} : \|u_*(t) - u_i\| \leq \varepsilon\}$, а $\mathcal{J}_\varepsilon^c(t) = \{1, \dots, N_k\} \setminus \mathcal{J}_\varepsilon(t)$.

¹Если $\|h_n(\cdot) - h(\cdot)\|_{L_1} \leq Cq^n$ при $C > 0$, $0 < q < 1$, $n = 1, 2, \dots$, то по теореме Леви о монотонной сходимости ряд $\sum_{n=1}^\infty |h_n(t) - h(t)|$ сходится почти всюду к конечной функции, а значит, члены ряда стремятся к нулю при почти всех t .

В силу равномерной непрерывности функции $\xi(\cdot, \cdot)$ на $[0, T] \times U$ первое слагаемое в правой части (3.24) может быть сделано сколь угодно малым за счет уменьшения ε . Второе слагаемое в правой части (3.24) оценим так:

$$2M \sum_{i \in \mathcal{I}_\varepsilon(t)} \tilde{v}_k^i(t) \leq \frac{2M}{\varepsilon^2} \sum_{i=1}^{N_k} \tilde{v}_k^i(t) \|u_*(t) - u_i\|^2.$$

В силу (3.18) это слагаемое стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$ для почти всех $t > 0$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. В условиях леммы 3 последовательность траекторий $\{\tilde{x}_k(\cdot)\}_{k=1}^\infty$, соответствующих оптимальным управлениям $\tilde{v}_k(\cdot)$, $k = 1, 2, \dots$, в задачах (P_k) , равномерно сходится к траектории $x_*(\cdot)$, соответствующей оптимальному в задаче (P) управлению $u_*(\cdot)$, на любом отрезке $[0, T]$, $T > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, допустим, что на каком-то отрезке $[0, T]$, $T > 0$, последовательность $\{\tilde{x}_k(\cdot)\}_{k=1}^\infty$ не сходится равномерно к $x_*(\cdot)$. Тогда из нее в силу леммы 1 можно выбрать подпоследовательность, равномерно сходящуюся к некоторой абсолютно непрерывной функции $y(\cdot)$, отличной от $x_*(\cdot)$. Переходя к интегральной форме уравнения (3.13) и затем переходя к пределу по этой подпоследовательности в силу леммы 3, получим противоречие с единственностью решения уравнения (2.1) с начальным условием (2.2). Следствие доказано.

СЛЕДСТВИЕ 2. В условиях леммы 3 и следствия 1 для любого фиксированного $T > 0$ и любой непрерывной функции $\zeta: G \times U \rightarrow \mathbb{R}^q$ последовательность $\{\tilde{\varphi}_k(\cdot)\}_{k=1}^\infty$ измеримых вектор-функций $\tilde{\varphi}_k: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^q$, определенных равенствами $\tilde{\varphi}_k(t) = \sum_{i=1}^{N_k} \tilde{v}_k^i(t) \zeta(\tilde{x}_k(t), u_i)$, $t \in [0, T]$, сходится почти всюду на $[0, T]$ (а значит, и в $L^1([0, T], \mathbb{R}^q)$) к измеримой функции $\tilde{\varphi}(\cdot)$, определенной равенством $\tilde{\varphi}(t) = \zeta(x_*(t), u_*(t))$, $t \in [0, T]$.

Ниже, используя лемму 2 и следствия 1, 2, мы докажем аппроксимационный вариант принципа максимума Понтрягина для задачи (P) .

Напомним формулировку принципа максимума для задачи (P_k) , $k = 1, 2, \dots$.

Пусть допустимая пара $(\tilde{x}_k(\cdot), \tilde{v}_k(\cdot))$ оптимальна в задаче (P_k) , $k = 1, 2, \dots$, и $[0, \tilde{T}_k]$ – отрезок ее определения. Тогда в силу принципа максимума Понтрягина [44] существует такая ненулевая пара $(\psi_k(\cdot), \psi_k^0)$ сопряженных переменных, соответствующих паре $(\tilde{x}_k(\cdot), \tilde{v}_k(\cdot))$, что выполняются следующие основные соотношения принципа максимума для задачи (P_k) .

1. Сопряженная переменная $\psi_k(\cdot)$ является решением сопряженной системы на интервале $[0, \tilde{T}_k]$:

$$\dot{\psi}_k(t) \stackrel{\text{п.б.}}{=} - \left[\sum_{i=1}^{N_k} \tilde{v}_k^i(t) \frac{\partial f(\tilde{x}_k(t), u_i)}{\partial x} \right]^* \psi_k(t) - \psi_k^0 e^{-\rho t} \sum_{i=1}^{N_k} \tilde{v}_k^i(t) \frac{\partial g(\tilde{x}_k(t), u_i)}{\partial x}. \quad (3.25)$$

2. На интервале $[0, \tilde{T}_k]$ выполняется условие максимума

$$\mathcal{H}_k(\tilde{x}_k(t), t, \tilde{v}_k(t), \psi_k(t), \psi_k^0) \stackrel{\text{п.б.}}{=} H_k(\tilde{x}_k(t), t, \psi_k(t), \psi_k^0). \quad (3.26)$$

Кроме того, выполняются неравенство $\psi_k^0 > 0$, условие трансверсальности в правом конце

$$\psi_k(\tilde{T}_k) = 0 \quad (3.27)$$

и условие трансверсальности по времени

$$H_k(\tilde{x}_k(\tilde{T}_k), \tilde{T}_k, \psi_k(\tilde{T}_k), \psi_k^0) = 2\psi_k^0(\tilde{T}_k - T_k). \quad (3.28)$$

Здесь функция Гамильтона–Понтрягина $\mathcal{H}_k: G \times [0, \infty) \times V_k \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и гамильтониан $H_k: G \times [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ задачи (P_k), $k = 1, 2, \dots$, определяются равенствами

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_k(x, t, v, \psi, \psi^0) &= \sum_{i=1}^{N_k} v^i \langle f(x, u_i), \psi \rangle \\ &\quad + \psi^0 e^{-\rho t} \sum_{i=1}^{N_k} v^i \left[g(x, u_i) - e^{-t} \frac{\|u_i - z_k(t)\|^2}{1 + \sigma_k} \right], \quad (3.29) \\ H_k(x, t, \psi, \psi^0) &= \sup_{v \in V_k} \mathcal{H}_k(x, t, v, \psi, \psi^0). \end{aligned}$$

В дальнейшем, не ограничивая общности, будем считать, что для любого $k = 1, 2, \dots$ функция $\psi_k(\cdot)$ продолжена на бесконечный полуинтервал $[0, \infty)$ нулем по непрерывности (см. (3.27)), т. е. $\psi_k(t) = 0$ для любого $t \geq \tilde{T}_k$.

Как известно, сопряженная система (3.25) и условие максимума (3.26) влекут абсолютную непрерывность гамильтониана $H_k(\tilde{x}_k(\cdot), \cdot, \psi_k(\cdot), \psi_k^0)$ как функции времени и выполнение следующего условия стационарности на отрезке $[0, \tilde{T}_k]$ (см. [44]):

$$\frac{d}{dt} H_k(\tilde{x}_k(t), t, \psi_k(t), \psi_k^0) \stackrel{\text{п.в.}}{=} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{H}_k(\tilde{x}_k(t), t, \tilde{v}_k(t), \psi_k(t), \psi_k^0). \quad (3.30)$$

Отметим, что в силу сопряженной системы (3.25), условия трансверсальности (3.27) и формулы Коши для линейных дифференциальных систем (см., например, [26], [40]) для сопряженной переменной $\psi_k(\cdot)$, $k = 1, 2, \dots$, справедливо представление

$$\psi_k(t) = \psi_k^0 Z_k(t) I_k(t), \quad t \in [0, \tilde{T}_k]. \quad (3.31)$$

Здесь $Z_k(\cdot)$, $k = 1, 2, \dots$, – нормированная фундаментальная матрица линейной однородной дифференциальной системы

$$\dot{z}(t) = - \left[\sum_{i=1}^{N_k} \tilde{v}_k^i(t) \frac{\partial f(\tilde{x}_k(t), u_i)}{\partial x} \right]^* z(t), \quad t \in [0, \tilde{T}_k] \quad (3.32)$$

(т. е. $Z_k(\cdot)$ – такое матричное решение системы (3.32), что $Z_k(0)$ – единичная матрица) и

$$I_k(t) = \int_t^{\tilde{T}_k} e^{-\rho s} [Z_k(s)]^{-1} \sum_{i=1}^{N_k} \tilde{v}_k^i(s) \frac{\partial g(\tilde{x}_k(s), u_i)}{\partial x} ds, \quad t \in [0, \tilde{T}_k]. \quad (3.33)$$

Положим $I_\infty = \liminf_{k \rightarrow \infty} \|I_k(0)\|$. Отметим, что величина I_∞ , вообще говоря, зависит от выбранной последовательности аппроксимирующих задач $\{(P_k)\}_{k=1}^\infty$ и выбранных оптимальных допустимых пар $(\tilde{x}_k(\cdot), \tilde{v}_k(\cdot))$ в них и может равняться ∞ . Переходя, если нужно, к подпоследовательности в последовательности $\{(\tilde{x}_k(\cdot), \tilde{v}_k(\cdot), \tilde{T}_k)\}_{k=1}^\infty$, будем считать, что

$$\frac{I_k(0)}{\|I_k(0)\| + 1} \rightarrow \Psi_0 \in \mathbb{R}^n, \quad \|\Psi_0\| \leq 1, \quad \|I_k(0)\| \rightarrow I_\infty \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (3.34)$$

Поскольку соотношения принципа максимума (3.25)–(3.27) для задачи (P_k) , $k = 1, 2, \dots$, инвариантны относительно одновременного умножения сопряженных переменных $\psi_k(\cdot)$ и ψ_k^0 на произвольный положительный множитель, в силу условия $\psi_k^0 > 0$ без ограничения общности можно считать, что

$$\psi_k^0 = \begin{cases} 1, & \text{если } I_\infty < \infty, \\ \frac{1}{\|I_k(0)\| + 1}, & \text{если } I_\infty = \infty. \end{cases} \quad (3.35)$$

Определим функцию Гамильтона–Понтрягина $\mathcal{H}: G \times [0, \infty) \times U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и гамильтониан $H: G \times [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ задачи (P) стандартным образом:

$$\mathcal{H}(x, t, u, \psi, \psi^0) = \langle f(x, u), \psi \rangle + \psi^0 e^{-\rho t} g(x, u), \quad (3.36)$$

$$H(x, t, \psi, \psi^0) = \sup_{u \in U} \mathcal{H}(x, t, u, \psi, \psi^0). \quad (3.37)$$

Следующий результат, сформулированный в терминах последовательности аппроксимирующих задач $\{(P_k)\}_{k=1}^\infty$, будем называть *аппроксимационным вариантом принципа максимума* для задачи (P).

ТЕОРЕМА 3. Пусть для задачи (P) выполняются условия (A1)–(A3). Пусть $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ – оптимальная допустимая пара в задаче (P) и $\{(P_k)\}_{k=1}^\infty$ – аппроксимирующая последовательность задач оптимального управления, соответствующая управлению $u_*(\cdot)$. Кроме того, для каждого $k = 1, 2, \dots$ пусть $(\tilde{x}_k(\cdot), \tilde{v}_k(\cdot))$ – оптимальная допустимая пара в задаче (P_k) , $\tilde{T}_k > 0$ – соответствующее оптимальное время окончания процесса управления, а $(\psi_k(\cdot), \psi_k^0)$ – пара сопряженных переменных, соответствующая паре $(\tilde{x}_k(\cdot), \tilde{v}_k(\cdot))$ в силу принципа максимума Понтрягина, т. е. четверка $(\tilde{x}_k(\cdot), \tilde{v}_k(\cdot), \psi_k(\cdot), \psi_k^0)$ удовлетворяет соотношениям (3.25), (3.26), выполняются равенство (3.35) и условия трансверсальности (3.27) и (3.28).

Тогда существуют такие не обращающиеся одновременно в нуль постоянная $\psi^0 \geq 0$ и локально абсолютно непрерывная функция $\psi: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ (сопряженные переменные, соответствующие паре $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ в задаче (P)), что

1) выполняются условия

$$\psi_k^0 \rightarrow \psi^0 = \begin{cases} 1, & \text{если } I_\infty < \infty, \\ 0, & \text{если } I_\infty = \infty, \end{cases} \quad \text{при } k \rightarrow \infty, \quad (3.38)$$

$$\psi_k(\cdot) \rightarrow \psi(\cdot) \quad \text{в } C([0, T], \mathbb{R}^n) \quad \text{при } k \rightarrow \infty \quad \text{для любого } T > 0; \quad (3.39)$$

2) функция $\psi(\cdot)$ удовлетворяет сопряженной системе для задачи (P) на $[0, \infty)$:

$$\dot{\psi}(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} - \left[\frac{\partial f(x_*(t), u_*(t))}{\partial x} \right]^* \psi(t) - \psi^0 e^{-\rho t} \frac{\partial g(x_*(t), u_*)}{\partial x}, \quad (3.40)$$

причем $\|\psi(0)\| = 1$, если $I_\infty = \infty$, и $\|\psi(0)\| = I_\infty$, если $I_\infty < \infty$;

3) выполняется условие максимума на $[0, \infty)$:

$$\mathcal{H}(x_*(t), t, u_*(t), \psi(t), \psi^0) \stackrel{\text{п.в.}}{=} H(x_*(t), t, \psi(t), \psi^0); \quad (3.41)$$

4) выполняется условие стационарности:

$$H(x_*(t), t, \psi(t), \psi^0) = \psi^0 \rho \int_t^\infty e^{-\rho s} g(x_*(s), u_*(s)) ds \quad \text{для любого } t \geq 0. \quad (3.42)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношение (3.38) следует из (3.34) и (3.35).

Для произвольного $k = 1, 2, \dots$ запишем равенство (3.25) в интегральной форме:

$$\begin{aligned} \psi_k(t) &= \psi_k(0) - \int_0^t \left[\sum_{i=1}^{N_k} \tilde{v}_k^i(s) \frac{\partial f(\tilde{x}_k(s), u_i)}{\partial x} \right]^* \psi_k(s) ds \\ &\quad - \psi_k^0 \int_0^t e^{-\rho s} \sum_{i=1}^{N_k} \tilde{v}_k^i(s) \frac{\partial g(\tilde{x}_k(s), u_i)}{\partial x} ds. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Рассмотрим последовательность $\{\psi_k(0)\}_{k=1}^\infty$. Так как $Z_k(0)$ – единичная матрица, то в силу (3.31) $\psi_k(0) = \psi_k^0 I_k(0)$. Поэтому из (3.34) и (3.35) при $k \rightarrow \infty$ имеем $\psi_k(0) \rightarrow (I_\infty + 1)\Psi_0 \in \mathbb{R}^n$ и $\|\psi_k(0)\| \rightarrow I_\infty$, если $I_\infty < \infty$, и $\psi_k(0) \rightarrow \Psi_0$, $\|\Psi_0\| = 1$, если $I_\infty = \infty$.

Так как последовательность $\{\psi_k(0)\}_{k=1}^\infty$ сходится (к конечному пределу), она ограничена. В силу леммы Гронуолла–Беллмана (см., например, [6; теорема II.4.4]) из (3.43) получаем ограниченность и равностепенную непрерывность функций $\psi_k(\cdot)$, $k = 1, 2, \dots$, на любом фиксированном интервале времени $[0, T]$. По теореме Арцела–Асколи из $\{\psi_k(\cdot)\}_{k=1}^\infty$ можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся на любом конечном интервале к некоторой функции $\psi(\cdot)$. Переходя в (3.43) при фиксированном $t \geq 0$ к пределу по этой подпоследовательности, в силу следствия 2 получаем

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \psi(0) - \int_0^t \left[\frac{\partial f(x_*(s), u_*(s))}{\partial x} \right]^* \psi(s) ds \\ &\quad - \psi^0 \int_0^t e^{-\rho s} \frac{\partial g(x_*(s), u_*(s))}{\partial x} ds, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Очевидно, что функция $\psi(\cdot)$ локально абсолютно непрерывна и является решением сопряженной системы (3.40), причем, как установлено выше, $\psi(0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \psi_k(0)$ не зависит от выбора подпоследовательности. Но в силу

единственности решения линейной системы (3.40) получаем, что при любом $T > 0$ у последовательности $\{\psi_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ есть только один частичный предел в $C([0, T], \mathbb{R}^n)$, откуда следует (3.39).

Так как $\psi^0 = 1$, если $I_{\infty} < \infty$, и $\|\psi(0)\| = 1$, если $I_{\infty} = \infty$, то построенная пара $(\psi(\cdot), \psi^0)$ ненулевая.

Рассмотрим теперь условие максимума (3.26) для $k = 1, 2, \dots$.

На произвольном интервале $[0, T]$, $T > 0$, при почти всех $t \in [0, T]$ для любого достаточно большого номера k ($\tilde{T}_k > T$) и любого $v = (v^1, \dots, v^{N_k}) \in V_k$ в силу (3.26) имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{N_k} \tilde{v}_k^i(t) \langle f(\tilde{x}_k(t), u_i) \psi_k(t) \rangle + \psi_k^0 e^{-\rho t} \sum_{i=1}^{N_k} \tilde{v}_k^i(t) \left[g(\tilde{x}_k(t), u_i) - e^{-t} \frac{\|u_i - z_k(t)\|^2}{1 + \sigma_k} \right] \\ & \geq \sum_{i=1}^{N_k} v^i \langle f(\tilde{x}_k(t), u_i), \psi_k(t) \rangle + \psi_k^0 e^{-\rho t} \sum_{i=1}^{N_k} v^i \left[g(\tilde{x}_k(t), u_i) - e^{-t} \frac{\|u_i - z_k(t)\|^2}{1 + \sigma_k} \right]. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Выберем в неравенстве (3.44) в качестве $v \in V_k$ такой вектор, у которого все координаты, кроме j -й, равны 0, а j -я координата равна 1. Тогда для любого $j = 1, \dots, N_k$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{N_k} \tilde{v}_k^i(t) \langle f(\tilde{x}_k(t), u_i), \psi_k(t) \rangle + \psi_k^0 e^{-\rho t} \sum_{i=1}^{N_k} \tilde{v}_k^i(t) \left[g(\tilde{x}_k(t), u_i) - e^{-t} \frac{\|u_i - z_k(t)\|^2}{1 + \sigma_k} \right] \\ & \geq \langle f(\tilde{x}_k(t), u_j), \psi_k(t) \rangle + \psi_k^0 e^{-\rho t} \left[g(\tilde{x}_k(t), u_j) - e^{-t} \frac{\|u_j - z_k(t)\|^2}{1 + \sigma_k} \right]. \end{aligned}$$

Поскольку $\sigma_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$, то в силу условий (3.7), (3.38), (3.39) и следствий 1 и 2, переходя при почти всех $t \in [0, T]$ в последнем неравенстве к пределу при $k \rightarrow \infty$, получаем неравенство

$$\begin{aligned} & \langle f(x_*(t), u_*(t)), \psi(t) \rangle + \psi^0 e^{-\rho t} g(x_*(t), u_*(t)) \\ & \geq \langle f(x_*(t), u_j), \psi(t) \rangle + \psi^0 e^{-\rho t} g(x_*(t), u_j). \end{aligned}$$

Так как $T > 0$ произвольно и $N_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$, то это неравенство выполнено при почти всех $t \geq 0$ и всех $j = 1, 2, \dots$. Напомним, что последовательность $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ всюду плотна в U , поэтому неравенство по непрерывности распространяется с $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ на все множество U . Условие максимума (3.41) доказано.

Осталось доказать условие стационарности (3.42). Для этого рассмотрим условие (3.30). В силу (3.29) имеем

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} H_k(\tilde{x}_k(t), t, \psi_k(t), \psi_k^0) \stackrel{\text{п.в.}}{=} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{H}_k(\tilde{x}_k(t), t, \tilde{v}_k(t), \psi_k(t), \psi_k^0) \\ & = -\psi_k^0 \rho e^{-\rho t} \sum_{i=1}^{N_k} \tilde{v}_k^i(t) g(\tilde{x}_k(t), u_i) + \psi_k^0 (\rho + 1) e^{-(\rho+1)t} \sum_{i=1}^{N_k} \tilde{v}_k^i(t) \frac{\|u_i - z_k(t)\|^2}{1 + \sigma_k} \\ & \quad + 2\psi_k^0 e^{-(\rho+1)t} \sum_{i=1}^{N_k} \tilde{v}_k^i(t) \frac{\langle u_i - z_k(t), \dot{z}_k(t) \rangle}{1 + \sigma_k}. \end{aligned}$$

Выберем такие произвольные $t > 0$ и k , что $\tilde{T}_k > t$, и проинтегрируем последнее равенство на $[t, \tilde{T}_k]$, принимая во внимание краевое условие (3.28). Тогда получаем

$$\begin{aligned} H_k(\tilde{x}_k(t), t, \psi_k(t), \psi_k^0) &= 2\psi_k^0(\tilde{T}_k - T_k) + \psi_k^0 \rho \int_t^{\tilde{T}_k} e^{-\rho s} \sum_{i=1}^{N_k} \tilde{v}_k^i(s) g(\tilde{x}_k(s), u_i) ds \\ &\quad - \psi_k^0(\rho + 1) \int_t^{\tilde{T}_k} e^{-(\rho+1)s} \sum_{i=1}^{N_k} \tilde{v}_k^i(s) \frac{\|u_i - z_k(s)\|^2}{1 + \sigma_k} ds \\ &\quad - 2\psi_k^0 \int_t^{\tilde{T}_k} e^{-(\rho+1)s} \sum_{i=1}^{N_k} \tilde{v}_k^i(s) \frac{\langle u_i - z_k(s), \dot{z}_k(s) \rangle}{1 + \sigma_k} ds. \end{aligned} \quad (3.45)$$

В силу (3.38), (3.17), (3.9), (3.22) первое, третье и четвертое слагаемые в правой части (3.45) стремятся к нулю при $k \rightarrow \infty$. Предел второго слагаемого при $k \rightarrow \infty$ в силу (3.23) (и вытекающей из следствия 2 сходимости соответствующих интегралов по дополнительному фиксированному отрезку $[0, t]$) также существует:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \psi_k^0 \rho \int_t^{\tilde{T}_k} e^{-\rho s} \sum_{i=1}^{N_k} \tilde{v}_k^i(s) g(\tilde{x}_k(s), u_i) ds = \psi^0 \rho \int_t^\infty e^{-\rho t} g(x_*(t), u_*(t)) dt. \quad (3.46)$$

Таким образом, существует и предел левой части равенства (3.45) при $k \rightarrow \infty$. Следовательно, переходя в (3.45) к пределу при $k \rightarrow \infty$, получаем условие стационарности (3.42). Теорема доказана.

Доказанная теорема 3 аналогична теореме 9.1 из [10], однако получена она при более слабых предположениях относительно данных задачи (P). В соответствии с более общей ситуацией адаптирован и использованный здесь метод конечно-временных аппроксимаций (см. [10; разд. 9]). Основное отличие теоремы 3 от других общих вариантов принципа максимума для задач с бесконечным горизонтом (см. [44], [39], [43]) состоит в том, что она не только дает необходимые условия оптимальности первого порядка, но и обосновывает соответствующий *метод регуляризации* для задачи (P). Применение теоремы 3 в двух конкретных случаях продемонстрировано ниже в разделах 4 и 5.

Заметим, что соотношения принципа максимума (3.38)–(3.42) можно переписать в эквивалентном виде в терминах так называемых *текущей сопряженной переменной* $\phi: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$\phi(t) = e^{\rho t} \psi(t), \quad t \geq 0, \quad (3.47)$$

текущей функции Гамильтона–Понтрягина $\mathcal{M}: G \times U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathcal{M}(x, u, \phi, \psi^0) = \langle f(x, u), \phi \rangle + \psi^0 g(x, u), \quad x \in G, \quad u \in U, \quad \phi \in \mathbb{R}^n, \quad (3.48)$$

и текущего гамильтониана $M: G \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$M(x, \phi, \psi^0) = \max_{u \in U} \langle f(x, u), \phi \rangle + \psi^0 g(x, u), \quad x \in G, \quad \phi \in \mathbb{R}^n. \quad (3.49)$$

В этом случае соответствующая *гамильтонова система принципа максимума* для задачи (P) автономна (подробнее см. [10; разд. 4]).

Изложенная здесь аппроксимационная схема может быть с небольшими изменениями и упрощениями перенесена на более общий неавтономный случай, когда правая часть $f(\cdot, \cdot)$ управляемой системы (2.1) и функция мгновенной полезности $g(\cdot, \cdot)$ в функционале (2.3) зависят также от времени (измеримым образом). Получающийся в этом случае результат аналогичен теореме 3, однако в нем отсутствует (в силу измеримой зависимости функций $f(\cdot, \cdot)$ и $g(\cdot, \cdot)$ от времени) какой-либо аналог условия стационарности (3.42), которое, вообще говоря, является дополнительным (см. [10; пример 6.6]). Заметим, что впервые условие стационарности (3.42) было получено Ф. Мишелем [43].

В некоторых нестандартных ситуациях прямое применение описанной здесь аппроксимационной схемы приводит к содержательным индивидуальным вариантам принципа максимума (см., например, [7]).

4. Случай доминирования дисконтирующего множителя

В дальнейшем для произвольной допустимой пары $(x(\cdot), u(\cdot))$ системы (2.1) через $Y_{(x,u)}(\cdot)$ будем обозначать нормированную фундаментальную матрицу линейной системы

$$\dot{y}(t) = \left[\frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial x} \right] y(t), \quad t \in [0, \infty), \quad (4.1)$$

а через $Z_{(x,u)}(\cdot)$ – нормированную фундаментальную матрицу ее сопряженной системы

$$\dot{z}(t) = - \left[\frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial x} \right]^* z(t), \quad t \in [0, \infty). \quad (4.2)$$

В силу леммы 1 и компактности множества U матричные функции $Y_{(x,u)}(\cdot)$ и $Z_{(x,u)}(\cdot)$ определены на $[0, \infty)$, а их компоненты – локально абсолютно непрерывные функции.

Напомним, что матричные функции $Y_{(x,u)}(\cdot)$ и $Z_{(x,u)}(\cdot)$ связаны равенством

$$[Z_{(x,u)}(t)]^{-1} = [Y_{(x,u)}(t)]^*, \quad t \in [0, \infty), \quad (4.3)$$

а для матрицы Коши $K_{(x,u)}(\cdot, \cdot)$ линейной системы (4.1) имеем (см., например, [26], [40])

$$K_{(x,u)}(t, \tau) = Y_{(x,u)}(t) [Y_{(x,u)}(\tau)]^{-1}, \quad t, \tau \in [0, \infty). \quad (4.4)$$

Введем *условие доминирования дисконтирующего множителя*, суть которого состоит в том, что убывание дисконтирующего множителя $e^{-\rho t}$, $t \geq 0$, присутствующего в задаче (P), идет быстрее, чем возможный рост фундаментальной матрицы $Y_{(x,u)}(\cdot)$ и градиента $\partial g(x(\cdot), u(\cdot))/\partial x$ функции мгновенной полезности вдоль любой допустимой пары $(x(\cdot), u(\cdot))$ с конечным значением функционала (2.3).

(A4) Существуют такие положительная функция $\tilde{\omega}: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{\omega}(t) \rightarrow +0$ при $t \rightarrow \infty$, и константа $C \geq 0$, что для любой допустимой пары $(x(\cdot), u(\cdot))$ системы (2.1) имеем

$$\left\| \int_T^{T'} e^{-\rho s} [Y_{(x,u)}(s)]^* \frac{\partial g(x(s), u(s))}{\partial x} ds \right\| \leq \tilde{\omega}(T) + C \left| \int_T^{T'} e^{-\rho s} g(x(s), u(s)) ds \right| \quad (4.5)$$

при любых $0 \leq T \leq T'$.

Нетрудно видеть, что при выполнении условия (A4) для любой допустимой пары $(x(\cdot), u(\cdot))$ системы (2.1) такой, что $J(x(\cdot), u(\cdot)) > -\infty$, и произвольного $t \geq 0$ существует предел (см. (4.3))

$$I_{(x,u)}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_t^T e^{-\rho s} [Z_{(x,u)}(s)]^{-1} \frac{\partial g(x(s), u(s))}{\partial x} ds, \quad (4.6)$$

при этом компоненты векторной функции $I_{(x,u)}(\cdot)$ локально абсолютно непрерывны. Кроме того, из того факта, что любая допустимая траектория овыпукленной системы является равномерным пределом последовательности допустимых траекторий исходной системы (см. [21; гл. 2, теорема 10] или [34]), и условия (A4) вытекает аналогичное условие для любой оптимальной допустимой пары $(\tilde{x}_k(\cdot), \tilde{v}_k(\cdot))$ в аппроксимирующей задаче (P_k) , $k = 1, 2, \dots$ (см. (3.13)–(3.16)), причем с теми же самыми функцией $\tilde{\omega}(\cdot)$ и константой C :

$$\begin{aligned} & \left\| \int_T^{\tilde{T}_k} e^{-\rho s} [Z_k(s)]^{-1} \sum_{i=1}^{N_k} \tilde{v}_k^i(s) \frac{\partial g(\tilde{x}_k(s), u_i)}{\partial x} ds \right\| \\ & \leq \tilde{\omega}(T) + C \left| \int_T^{\tilde{T}_k} e^{-\rho s} \sum_{i=1}^{N_k} \tilde{v}_k^i(s) g(\tilde{x}_k(s), u_i) ds \right| \end{aligned} \quad (4.7)$$

для любого T , $0 \leq T \leq \tilde{T}_k$. Здесь $Z_k(\cdot)$, $k = 1, 2, \dots$, – нормированная фундаментальная матрица линейной однородной дифференциальной системы (3.32).

Далее мы покажем, что выполнение условия (A4) (вместе с другими условиями теоремы 3) гарантирует нормальность задачи (P). Более того, в этом случае для сопряженной переменной $\psi(\cdot)$, фигурирующей в утверждении теоремы 3, справедливо представление, аналогичное известной в теории линейных дифференциальных систем формуле Коши (см., например, [26], [40]).

Определим функцию Гамильтона–Понтрягина $\mathcal{H}: G \times [0, \infty) \times U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ и гамильтониан $H: G \times [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ задачи (P) в нормальной форме ($\psi^0 = 1$) равенствами (см. (3.36), (3.37))

$$\mathcal{H}(x, t, u, \psi) = \langle f(x, u), \psi \rangle + e^{-\rho t} g(x, u), \quad H(x, t, \psi) = \sup_{u \in U} \mathcal{H}(x, t, u, \psi).$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполняются условия (A1)–(A4) и $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ – оптимальная допустимая пара в задаче (P). Тогда

1) для любого $t \geq 0$ несобственный интеграл

$$I_*(t) = \int_t^\infty e^{-\rho s} [Z_{(x_*, u_*)}(s)]^{-1} \frac{\partial g(x_*(s), u_*(s))}{\partial x} ds \quad (4.8)$$

сходится;

2) функция $\psi: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, определенная равенством

$$\psi(t) = Z_{(x_*, u_*)}(t) I_*(t), \quad t \geq 0, \quad (4.9)$$

локально абсолютно непрерывна и удовлетворяет вместе с парой $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ основным соотношениям принципа максимума Понтрягина для задачи (P) (см. (3.40) и (3.41)) в нормальной форме ($\psi^0 = 1$), т.е. на интервале $[0, \infty)$ функция $\psi(\cdot)$ является решением сопряженной системы

$$\dot{\psi}(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} - \left[\frac{\partial f(x_*(t), u_*(t))}{\partial x} \right]^* \psi(t) - e^{-\rho t} \left[\frac{\partial g(x_*(t), u_*)}{\partial x} \right] \quad (4.10)$$

и выполняется условие максимума

$$\mathcal{H}(x_*(t), t, u_*(t), \psi(t)) \stackrel{\text{п.в.}}{=} H(x_*(t), t, \psi(t)); \quad (4.11)$$

3) выполняется условие стационарности (см. (3.42)) в нормальной форме

$$H(x_*(t), t, \psi(t)) = \rho \int_t^\infty e^{-\rho s} g(x_*(s), u_*(s)) ds \quad \text{для любого } t \geq 0. \quad (4.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что утверждение 1) вытекает из существования предела (4.6) для любой допустимой пары $(x(\cdot), u(\cdot))$ такой, что $J(x(\cdot), u(\cdot)) > -\infty$. Таким образом, для любого $t \geq 0$ имеем $|I_*(t)| < \infty$.

Пусть теперь $\{(P_k)\}_{k=1}^\infty$ – последовательность аппроксимирующих задач, соответствующая оптимальному управлению $u_*(\cdot)$ (см. (3.13)–(3.16)). Пусть, далее, пара $(\tilde{x}_k(\cdot), \tilde{v}_k(\cdot))$ является оптимальной допустимой парой в задаче (P_k) , $k = 1, 2, \dots$, $\tilde{T}_k > 0$ – соответствующее оптимальное время прекращения процесса управления и $(\psi_k(\cdot), \psi_k^0)$ – пара сопряженных переменных, соответствующих паре $(\tilde{x}_k(\cdot), \tilde{v}_k(\cdot))$ в силу принципа максимума Понтрягина, так что четверка $(\tilde{x}_k(\cdot), \tilde{v}_k(\cdot), \psi_k(\cdot), \psi_k^0)$ удовлетворяет соотношениям (3.25), (3.26), выполняются равенство (3.35) и условия трансверсальности (3.27) и (3.28). Тогда выполняются все условия теоремы 3 и, следовательно, существуют такие не обращающиеся одновременно в нуль постоянная $\psi^0 \geq 0$ и локально абсолютно непрерывная функция $\psi: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, для которых справедливы условия (3.38)–(3.42).

Далее, в силу (4.7) для любых $0 \leq t < T < \tilde{T}_k$, $k = 1, 2, \dots$, выполняется неравенство (см. (3.33))

$$\begin{aligned} & \left| \int_t^T e^{-\rho s} [Z_k(s)]^{-1} \left[\sum_{i=1}^{N_k} \tilde{v}_k^i(s) \frac{\partial g(\tilde{x}_k(s), u_i)}{\partial x} \right] ds - I_k(t) \right| \\ & \leq \tilde{\omega}(T) + C \left| \int_T^{\tilde{T}_k} e^{-\rho s} \sum_{i=1}^{N_k} \tilde{v}_k^i(s) g(\tilde{x}_k(s), u_i) ds \right|. \end{aligned} \quad (4.13)$$

В силу (3.23) предел правой части при $k \rightarrow \infty$ есть

$$\tilde{\omega}(T) + C \left| \int_T^\infty e^{-\rho s} g(x_*(s), u_*(s)) ds \right|$$

(ср. (3.46)). Кроме того, в силу непрерывной зависимости решений линейной дифференциальной системы (4.2) от ее правой части и в силу следствия 2 для любого $t \geq 0$ имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Z_k(t) = Z_{(x_*, u_*)}(t), \quad (4.14)$$

причем указанная сходимость равномерна на любом конечном промежутке. Следовательно, в силу теоремы Лебега и следствия 2, переходя к пределу в неравенстве (4.13) сначала при $k \rightarrow \infty$, затем при $T \rightarrow \infty$, получаем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} I_k(t) = I_*(t), \quad t \geq 0. \quad (4.15)$$

Отсюда, в частности, вытекает (см. (3.34)), что $I_\infty = \|I_*(0)\| < \infty$. Следовательно, в силу (3.38) имеем $\lim_{k \rightarrow \infty} \psi_k^0 = \psi^0 = 1$.

Наконец, в силу (3.31), (4.14) и (4.15) справедливы равенства

$$\psi(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \psi_k(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \psi_k^0 Z_k(t) I_k(t) = Z_{(x_*, u_*)}(t) I_*(t), \quad t \geq 0.$$

Таким образом, в силу теоремы 3 выполняются утверждения 2) и 3) настоящей теоремы. Теорема доказана.

Введем параметры роста $\mu \geq 0$, $r \geq 0$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ задачи (P).

(A5) Существуют такие $\mu \geq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\varkappa \geq 0$, $r \geq 0$, $C_1 \geq 0$ и $C_2 \geq 0$, что для любой допустимой пары $(x(\cdot), u(\cdot))$ системы (2.1) выполняются неравенства

$$\|x(t)\| \leq C_1 e^{\mu t}, \quad t \geq 0, \quad (4.16)$$

$$\|Y_{(x, u)}(t)\| \leq C_2 e^{\lambda t}, \quad t \geq 0, \quad (4.17)$$

$$\left\| \frac{\partial g(x(t), u(t))}{\partial x} \right\| \leq \varkappa (1 + \|x(t)\|^r), \quad t \geq 0. \quad (4.18)$$

Следующее неравенство дает достаточное условие для выполнения свойства (A4) в терминах параметров роста задачи (P).

(A6) $\rho > \lambda + r\mu$.

ЛЕММА 4. Пусть выполняются условия (A5) и (A6). Тогда справедливо условие (A4) (при $C = 0$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (4.3), (4.16)–(4.18) и условия (A6) для любой допустимой пары $(x(\cdot), u(\cdot))$ системы (2.1) и произвольных $0 \leq T \leq T'$ имеем

$$\begin{aligned} \left\| \int_T^{T'} e^{-\rho s} [Z_{(x, u)}(s)]^{-1} \frac{\partial g(x(s), u(s))}{\partial x} ds \right\| &\leq \varkappa C_2 \int_T^{T'} e^{-\rho s} e^{\lambda s} (1 + C_1^r e^{r\mu s}) ds \\ &\leq \varkappa (1 + C_1^r) C_2 \int_T^{T'} e^{-(\rho - \lambda - r\mu)s} ds \leq \frac{\varkappa (1 + C_1^r) C_2}{\rho - \lambda - r\mu} e^{-(\rho - \lambda - r\mu)T}. \end{aligned}$$

Таким образом, в силу (A6) неравенство (4.5) выполнено для любых $0 \leq T \leq T'$ с функцией

$$\tilde{\omega}(T) = \frac{\varkappa (1 + C_1^r) C_2}{\rho - \lambda - r\mu} e^{-(\rho - \lambda - r\mu)T}, \quad T \geq 0,$$

и $C = 0$. Лемма доказана.

Покажем, что условие доминирования дисконтирующего множителя позволяет при некоторых дополнительных предположениях получить условия трансверсальности на бесконечности (см. (1.16), (1.17)). Для формулировки таких дополнительных предположений нам понадобится ряд понятий и результатов теории устойчивости линейных дифференциальных систем (см., например, [26]). Напомним их.

Рассмотрим линейную систему

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t). \quad (4.19)$$

Здесь $t \in [0, \infty)$, $x \in \mathbb{R}^n$ и все компоненты действительной $(n \times n)$ -матрицы $A(\cdot)$ измеримы и ограничены.

Пусть $x(\cdot)$ – некоторое ненулевое решение системы (4.19). Тогда число

$$\lambda = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|x(t)\|$$

называется *характеристическим показателем Ляпунова* или для краткости *характеристическим показателем* решения $x(\cdot)$. Отметим, что характеристический показатель λ отличается от введенного А. М. Ляпуновым характеристического числа противоположным знаком (см. [42]).

Известно, что характеристический показатель λ любого ненулевого решения $x(\cdot)$ системы (4.19) конечен. Множество характеристических показателей, соответствующих всем ненулевым решениям системы (4.19), называется *спектром* системы (4.19). При этом спектр системы (4.19) всегда состоит из не более чем n различных чисел.

Фундаментальная система решений $x_1(\cdot), \dots, x_n(\cdot)$ называется *нормальной*, если сумма характеристических показателей этих решений минимальная среди всех фундаментальных систем решений системы (4.19). Нормальная фундаментальная система решений всегда существует. Если $x_1(\cdot), \dots, x_n(\cdot)$ – нормальная фундаментальная система решений, то характеристические показатели решений $x_1(\cdot), \dots, x_n(\cdot)$ покрывают весь спектр системы (4.19), т.е. для любого элемента λ из спектра системы (4.19) обязательно найдется какое-то ее решение из набора $x_1(\cdot), \dots, x_n(\cdot)$, имеющее это число в качестве своего характеристического показателя. При этом различные решения $x_j(\cdot)$ и $x_k(\cdot)$ из фундаментальной системы $x_1(\cdot), \dots, x_n(\cdot)$ могут иметь один и тот же характеристический показатель.

Пусть

$$\sigma = \sum_{s=1}^l n_s \lambda_s$$

– сумма всех чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ из спектра дифференциальной системы (4.19), взятых с учетом их кратностей n_s , $s = 1, \dots, l$.

Линейная система дифференциальных уравнений (4.19) называется *правильной*, если

$$\sigma = \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \operatorname{tr} A(s) ds,$$

где $\operatorname{tr} A(s)$ – след матрицы $A(s)$ (сумма всех ее элементов, лежащих на главной диагонали).

Если дифференциальная система (4.19) правильная, то для любого $\varepsilon > 0$ ее матрица Коши $K(\cdot, \cdot)$ удовлетворяет неравенству

$$\|K(s, t)\| \leq \varkappa_1 e^{\bar{\lambda}(s-t)+\varepsilon s}, \quad 0 \leq t \leq s, \quad (4.20)$$

где $\bar{\lambda}$ – максимальный элемент спектра системы (4.19) и $\varkappa_1 \geq 0$ – постоянная, зависящая только от ε (см. [26]).

Извлечем теперь два следствия из доказанной выше теоремы 4.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть выполняются условия (A1)–(A3), (A5), (A6), и пусть $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ – оптимальная допустимая пара в задаче (P). Предположим, что линейная система

$$\dot{y}(t) = \frac{\partial f(x_*(t), u_*(t))}{\partial x} y(t) \quad (4.21)$$

правильная. Тогда выполнены все условия теоремы 4 и для любого $\varepsilon > 0$ сопряженная переменная $\psi(\cdot)$, фигурирующая в утверждении теоремы 4, удовлетворяет неравенству

$$\|\psi(t)\| \leq \varkappa_2 e^{-(\rho-r\mu-\varepsilon)t}, \quad t \geq 0, \quad (4.22)$$

где постоянная $\varkappa_2 \geq 0$ зависит только от ε .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку выполняются условия (A5) и (A6), то в силу леммы 4 справедливо утверждение теоремы 4. Пусть $\psi(\cdot)$ – сопряженная переменная, фигурирующая в условиях теоремы 4. Тогда в силу условий (4.3), (4.4), (4.8), (4.9) и оценки (4.20) для любого $t \geq 0$ имеем

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \int_t^\infty e^{-\rho s} [Y_*(t)]^*{}^{-1} [Y_*(s)]^* \frac{\partial g(x_*(s), u_*(s))}{\partial x} ds \\ &= \int_t^\infty e^{-\rho s} [Y_*(s) [Y_*(t)]^{-1}]^* \frac{\partial g(x_*(s), u_*(s))}{\partial x} ds \\ &= \int_t^\infty e^{-\rho s} [K_*(s, t)]^* \frac{\partial g(x_*(s), u_*(s))}{\partial x} ds, \end{aligned} \quad (4.23)$$

где $Y_*(\cdot) = Y_{(x_*, u_*)}(\cdot)$ – нормированная фундаментальная матрица линейной системы (4.21) и $K_*(s, t) = Y_*(s) [Y_*(t)]^{-1}$, $0 \leq t \leq s$, – ее матрица Коши.

Пусть $\bar{\lambda}$ – максимальный элемент спектра системы (4.21). Тогда, очевидно, $\bar{\lambda} \leq \lambda$ в силу (4.17). Следовательно, в силу условий (A5), (A6) и оценки (4.20) для любого $0 < \varepsilon < \rho - \bar{\lambda} - r\mu$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \|\psi(t)\| &\leq \int_t^\infty e^{-\rho s} \| [K_*(s, t)]^* \| \left\| \frac{\partial g(x_*(s), u_*(s))}{\partial x} \right\| ds \\ &\leq \varkappa \varkappa_1 \int_t^\infty e^{-\rho s} e^{\bar{\lambda}(s-t)+\varepsilon s} (1 + C_1^r e^{r\mu s}) ds \leq \varkappa_2 e^{-(\rho-r\mu-\varepsilon)t}, \end{aligned}$$

где постоянная $\varkappa_2 = \varkappa \varkappa_1 (1 + C_1^r) / (\rho - \bar{\lambda} - r\mu - \varepsilon) \geq 0$ зависит только от ε . Значит, оценка (4.22) выполняется для любого $\varepsilon > 0$. Следствие доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Нетрудно видеть, что в условиях следствия 3 при выполнении дополнительного неравенства $\rho > r\mu$ справедливо условие трансверсальности (1.16), а при выполнении более сильного неравенства $\rho > (r+1)\mu$ справедливы оба условия трансверсальности (1.16) и (1.17).

В завершение данного раздела рассмотрим ситуацию, когда управляемая система (2.1) линейная и стационарная. В этом случае задача (P) принимает следующий вид.

Задача (P_1):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + u(t), & u(t) &\in U, \\ x(0) &= x_0, \\ J(x, u) &= \int_0^\infty e^{-\rho t} g(x(t), u(t)) dt \rightarrow \max. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Здесь F – постоянная действительная $(n \times n)$ -матрица. Предполагается, что множество U – выпуклый компакт из $\mathbb{R}^n$, а функция $g(x, \cdot)$ вогнута по переменной u для любого $x \in G$. Остальные данные в задаче (P_1) те же самые, что и в исходной задаче (P).

Пусть λ_F – максимальная действительная часть собственных значений матрицы F . Тогда число λ_F – максимальный элемент спектра линейной однородной системы

$$\dot{x}(t) = Fx(t),$$

соответствующей управляемой системе (4.24). Кроме того, для любого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$\|e^{Ft}\| \leq \kappa_3 e^{(\lambda_F + \varepsilon)t}, \quad t \geq 0.$$

Здесь e^{Ft} – экспоненциал матрицы F и $\kappa_3 \geq 0$ – некоторая постоянная, зависящая только от ε (см., например, [26]).

Из стандартного представления решения линейной системы (4.24) при помощи экспоненциала e^{Ft} (см., например, [26]) вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ и любой допустимой траектории $x(\cdot)$ управляемой системы (4.24) выполняется неравенство

$$\|x(t)\| \leq \kappa_4 e^{(\max\{0, \lambda_F\} + \varepsilon)t}, \quad t \geq 0.$$

Здесь постоянная $\kappa_4 \geq 0$ зависит только от ε . Таким образом, если

$$\rho > \lambda_F + r \max\{0, \lambda_F\}, \quad (4.25)$$

то условие (A6), очевидно, выполняется с некоторыми $\lambda > \lambda_F$ и $\mu > \max\{0, \lambda_F\}$. Заметим, что, поскольку $\rho \geq 0$, неравенство (4.25) эквивалентно неравенству

$$\rho > (r+1)\lambda_F. \quad (4.26)$$

Последнее наблюдение и тот факт, что любая однородная линейная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами правильна (см. [26]), влекут справедливость следующего варианта следствия 3 для задачи (P_1).

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть выполняются условия (A1), (A3) и (4.26). Пусть, далее, $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ – оптимальная допустимая пара в задаче (P_1) . Тогда выполнены все условия теоремы 4 и для любого $\varepsilon > 0$ сопряженная переменная $\psi(\cdot)$, фигурирующая в утверждении теоремы 4, удовлетворяет неравенству

$$\|\psi(t)\| \leq \kappa e^{-(\rho - r \max\{0, \lambda_F\} - \varepsilon)t}, \quad t \geq 0, \quad (4.27)$$

где постоянная $\kappa \geq 0$ зависит только от ε . При этом если $\rho > 0$, то выполнены условия трансверсальности (1.16) и (1.17).

Доказанная выше теорема 4 обобщает ряд результатов, полученных в [8]–[10] в случае условия доминирования дисконтирующего множителя типа (4.26). Заметим, что аналогичный теореме 4 результат доказан в работе [14] при помощи метода игольчатых вариаций в случае общей неавтономной задачи (P) , причем для возможно расходящегося интеграла в функционале (2.3) (в этом случае оптимальность понимается специальным образом) и при аналогичном (A6) (но, вообще говоря, отличном от него) условии доминирования дисконтирующего множителя (подробнее см. [14]).

Отметим также, что впервые условие доминирования дисконтирующего множителя было введено в работе [15] в форме неравенства (4.26) в случае задачи (P_1) . В [15] было показано, что в этом случае неравенство (4.26) влечет как нормальность задачи (P_1) , так и сходимость некоторого несобственного интеграла, характеризующего асимптотическое поведение сопряженной переменной $\psi(\cdot)$.

В работах [8]–[10] результат [15] был обобщен на общий нелинейный случай. Более того, в [8]–[10] была получена однозначная характеристика сопряженной переменной $\psi(\cdot)$ посредством формулы (4.9). В случае задачи (P_1) это влечет интегральную характеристику $\psi(\cdot)$, полученную в [15] (подробнее см. [10], [11]).

5. Монотонный случай

В дальнейшем будем писать $a > 0$ ($a \geq 0$), если все координаты вектора $a \in \mathbb{R}^n$ положительны (соответственно неотрицательны). Аналогично запись $A > 0$ ($A \geq 0$) для действительной $(n \times n)$ -матрицы A будет означать, что все компоненты матрицы A положительны (соответственно неотрицательны).

Следующие условия будем называть условиями монотонности.

(A7) Для любой оптимальной допустимой траектории $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ в задаче (P) найдутся такие момент времени $\tau \geq 0$ и вектор $u_\tau \in U$, что

$$f(x_*(\tau), u_\tau) > 0.$$

Условие (A7) означает управляемость системы (2.1) из состояния $x_*(\tau)$ в положительном (по всем координатам) направлении.

(A8) Для любой допустимой траектории $x(\cdot)$ системы (2.1) и любого вектора $u \in U$ выполняются неравенства

$$\frac{\partial g(x(t), u)}{\partial x} \geq 0, \quad \frac{\partial f^i(x(t), u)}{\partial x^j} \geq 0, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j, \quad t \geq 0.$$

Условие (A8) гарантирует положительность диагональных и неотрицательность внедиагональных компонент нормированной фундаментальной матрицы $Y_{(x,u)}(t)$, $t > 0$, линейной системы (4.1) для любой допустимой пары $(x(\cdot), u(\cdot))$ (данный факт легко вытекает из формул 2° и 5° в [35; гл. XV, § 5]), а стало быть, и положительность диагональных и неотрицательность внедиагональных компонент матрицы Коши $K_{(x,u)}(t, \tau)$ при $t > \tau$ (см. [26; гл. 2, § 4]).

Следующий результат вытекает из теоремы 3 при выполнении дополнительных условий монотонности (A7) и (A8).

ТЕОРЕМА 5. Пусть выполняются условия (A1)–(A3), (A7), (A8). Пусть, далее, $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ – оптимальная допустимая пара в задаче (P). Тогда существует такая сопряженная переменная $\psi: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, что

1) выполняются основные соотношения принципа максимума Понтрягина для задачи (P) (см. (3.40) и (3.41)) в нормальной форме ($\psi^0 = 1$), т. е. на интервале $[0, \infty)$ функция $\psi(\cdot)$ является решением сопряженной системы

$$\dot{\psi}(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} - \left[\frac{\partial f(x_*(t), u_*(t))}{\partial x} \right]^* \psi(t) - e^{-\rho t} \left[\frac{\partial g(x_*(t), u_*(t))}{\partial x} \right] \quad (5.1)$$

и выполняется условие максимума

$$\mathcal{H}(x_*(t), t, u_*(t), \psi(t)) \stackrel{\text{п.в.}}{=} H(x_*(t), t, \psi(t)); \quad (5.2)$$

2) выполняется условие

$$\psi(t) \geq 0, \quad t \geq 0, \quad (5.3)$$

причем если первое неравенство в (A8) строгое, то и неравенство (5.3) строгое;

3) выполняется условие стационарности (см. (3.42)) в нормальной форме

$$H(x_*(t), t, \psi(t)) = \rho \int_t^\infty e^{-\rho s} g(x_*(s), u_*(s)) ds \quad \text{для любого } t \geq 0; \quad (5.4)$$

4) для любого $t \geq 0$ интеграл (см. обозначения в начале раздела 4)

$$I_*(t) = \int_t^\infty e^{-\rho s} [Z_{(x_*, u_*)}(s)]^{-1} \frac{\partial g(x_*(s), u_*(s))}{\partial x} ds \quad (5.5)$$

сходится абсолютно и имеет место равенство

$$\psi(t) = Z_{(x_*, u_*)}(t)(\Phi_0 + I_*(t)), \quad (5.6)$$

где $\Phi_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} I_k(0) - I_*(0) \geq 0$ – постоянный неотрицательный вектор, причем $Z_{(x_*, u_*)}(t)\Phi_0 \geq 0$, т. е. выполнено неравенство

$$\psi(t) \geq Z_{(x_*, u_*)}(t) I_*(t).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{(P_k)\}_{k=1}^\infty$ – последовательность аппроксимирующих задач, соответствующая управлению $u_*(\cdot)$ (см. (3.13)–(3.16)). Пусть, далее, пара $(\tilde{x}_k(\cdot), \tilde{v}_k(\cdot))$ является оптимальной допустимой парой в задаче (P_k) ,

$k = 1, 2, \dots$, $\tilde{T}_k > 0$ – соответствующее оптимальное время прекращения процесса управления и $(\psi_k(\cdot), \psi_k^0)$ – пара сопряженных переменных, соответствующих паре $(\tilde{x}_k(\cdot), \tilde{v}_k(\cdot))$ в силу принципа максимума Понтрягина, так что четверка $(\tilde{x}_k(\cdot), \tilde{v}_k(\cdot), \psi_k(\cdot), \psi_k^0)$ удовлетворяет соотношениям (3.25), (3.26), выполняются неравенство $\psi_k^0 > 0$ и условия трансверсальности (3.27) и (3.28). Тогда выполняются все условия теоремы 3 и, следовательно, существуют такие не обращающиеся одновременно в нуль постоянная $\psi^0 \geq 0$ и локально абсолютно непрерывная функция $\psi: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, что справедливы соотношения (3.38)–(3.42).

Легко видеть, что в силу условия (A8) и упомянутой выше неотрицательности матрицы Коши из представления (3.31)–(3.33) получаем неравенство

$$\psi_k(t) \geq 0 \quad \text{для любого } t \in [0, \tilde{T}_k), \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.7)$$

(после внесения матрицы $Z_k(\cdot)$ под знак интеграла получаем там матрицу Коши; ср. (4.23)). Из (5.7) следует неотрицательность сопряженной переменной $\psi(\cdot)$ на всем бесконечном интервале $[0, \infty)$.

Докажем нормальность задачи (P), рассуждая от противного. Допустим, что $\psi^0 = 0$. Тогда $H(x_*(\tau), \tau, \psi(\tau), \psi^0) = 0$ в силу условия стационарности (3.42). С другой стороны, в силу определений (3.36), (3.37)

$$0 = H(x_*(\tau), \tau, \psi(\tau), \psi^0) \geq \mathcal{H}(x_*(\tau), \tau, u_\tau, \psi(\tau), \psi^0) = \langle f(x_*(\tau), u_\tau), \psi(\tau) \rangle,$$

где $f(x_*(\tau), u_\tau) > 0$ по (A7) и $\psi(\tau) \geq 0$ по доказанному выше. Следовательно, $\psi(\tau) = 0$. Но так как $\psi^0 = 0$, то в силу единственности решения системы (3.40) получаем $\psi(\cdot) \equiv 0$. С другой стороны, $\|\psi(0)\| = 1$ в силу утверждения 2) теоремы 3. Получили противоречие. Таким образом, $\psi^0 = 1$ и утверждения 1) и 3) настоящей теоремы доказаны.

Докажем утверждение 4). В силу формулы Коши для любых $t, t' \geq 0$ имеем

$$\psi(t') = Z_*(t') \left([Z_*(t)]^{-1} \psi(t) - \int_t^{t'} e^{-\rho s} [Z_*(s)]^{-1} \frac{\partial g(x_*(s), u_*(s))}{\partial x} ds \right),$$

где $Z_*(\cdot) = Z_{(x_*, u_*)}(\cdot)$. Отсюда

$$\int_t^{t'} e^{-\rho s} [Z_*(s)]^{-1} \frac{\partial g(x_*(s), u_*(s))}{\partial x} ds = [Z_*(t)]^{-1} \psi(t) - [Z_*(t')]^{-1} \psi(t'), \quad (5.8)$$

или

$$\int_t^{t'} e^{-\rho s} [K_*(s, t)]^* \frac{\partial g(x_*(s), u_*(s))}{\partial x} ds = \psi(t) - [K_*(t', t)]^* \psi(t'), \quad (5.9)$$

где $K_*(s, t) = [Z_*(t)[Z_*(s)]^{-1}]^* = Y_*(s)[Y_*(t)]^{-1}$ – матрица Коши линейной системы (4.21).

Так как $[Z_*(t')]^{-1} \geq 0$ в силу (A8) и $\psi(t') \geq 0$ при всех $t' \geq 0$ в силу (5.3), то интеграл в левой части (5.8) равномерно ограничен по всем $t' \geq t$ (при фиксированном $t \geq 0$). Поскольку в силу (A8) подынтегральная функция неотрицательна, отсюда вытекает сходимость интеграла (5.5) для любого $t \geq 0$. Более того, из (5.8) при $t = 0$ получаем

$$I_*(0) - I_*(t') = \psi(0) - [Z_*(t')]^{-1} \psi(t'), \quad (5.10)$$

что дает (5.6).

Поскольку в силу (A8) имеем $K_*(s, t) \geq 0$ при $s \geq t \geq 0$, то в (5.9) можно перейти к пределу при $t' \rightarrow \infty$, что дает $Z_*(t)I_*(t) \leq \psi(t)$, или $Z_*(t)\Phi_0 \geq 0$, при всех $t \geq 0$. Домножая последнее неравенство слева на матрицу $[Z_*(t)]^{-1} \geq 0$, получаем $\Phi_0 \geq 0$. Равенство $\Phi_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} I_k(0) - I_*(0)$ в утверждении 4) следует просто из того, что $\psi_k(0) = I_k(0)$. Таким образом, утверждение 4) доказано.

Доказанное неравенство $Z_*(t)I_*(t) \leq \psi(t)$ можно записать как

$$\int_t^\infty e^{-\rho s} [K_*(s, t)]^* \frac{\partial g(x_*(s), u_*(s))}{\partial x} ds \leq \psi(t).$$

Так как $K_*(s, t) \geq 0$, $s \geq t \geq 0$, причем диагональные элементы матрицы $K_*(s, t)$ строго положительны (см. выше), то строгое неравенство $\frac{\partial g(\cdot, \cdot)}{\partial x} > 0$ дает строгое неравенство $\psi(t) > 0$, $t \geq 0$. Утверждение 2) доказано. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Ясно, что в утверждении 4) теоремы 5 ненулевой вектор Φ_0 (“зазор” по сравнению с формулой (4.9)) может появиться, только если интегралы $I_k(0)$ не будут сходиться к интегралу $I_*(0)$, несмотря на то что подынтегральные функции в $I_k(0)$ сходятся почти всюду к подынтегральной функции в $I_*(0)$. Это означает, что хвосты интегралов $I_k(0)$ не стремятся равномерно к нулю. Возможна ли такая ситуация в каких-то задачах или при условиях монотонности всегда $\Phi_0 = 0$, нам неизвестно.

Извлечем теперь из доказанной теоремы 5 ряд следствий.

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть выполняются условия теоремы 5, $\rho > 0$ и, кроме того, существуют такие вектор $a \in \mathbb{R}^n$, $a > 0$, и момент $\tau \geq 0$, что

$$f(x_*(t), u_*(t)) \geq a \quad \text{при почти всех } t \geq \tau. \quad (5.11)$$

Тогда сопряженная переменная $\psi(\cdot)$, соответствующая оптимальной допустимой паре $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ в силу теоремы 5, удовлетворяет условию трансверсальности (1.16):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = 0. \quad (5.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (5.11) имеем $\dot{x}_*(t) > 0$ при $t \geq \tau$, поэтому из (A8) следует, что функция $\min_{u \in U} g(x_*(\cdot), u)$ не убывает на $[\tau, \infty)$ и, стало быть, ограничена снизу. Тогда из условий (5.4) и (5.11) получаем

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} \langle a, \psi(t) \rangle &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \langle f(x_*(t), u_*(t)), \psi(t) \rangle \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} H(x_*(t), t, \psi(t)) - \liminf_{t \rightarrow \infty} e^{-\rho t} g(x_*(t), u_*(t)) \leq 0. \end{aligned}$$

В силу (5.3) отсюда вытекает (5.12). Следствие доказано.

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть выполняются условия теоремы 5. Пусть, кроме того, существуют такие $\theta > 0$ и $\tau \geq 0$, что

$$x_*(t) \geq 0 \quad \text{для любого } t \geq \tau \quad (5.13)$$

и

$$\frac{\partial f(x_*(t), u_*(t))}{\partial x} - \theta I \geq 0 \quad \text{при почти всех } t \geq \tau, \quad (5.14)$$

где I – единичная диагональная $(n \times n)$ -матрица. Тогда сопряженная переменная $\psi(\cdot)$, соответствующая оптимальной паре $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ в силу теоремы 5, удовлетворяет условию трансверсальности (1.17):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle x_*(t), \psi(t) \rangle = 0. \quad (5.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу управляемой системы (2.1) и сопряженной системы (5.1) на интервале $[\tau, \infty)$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle x_*(t), \psi(t) \rangle &\stackrel{\text{п.в.}}{=} \langle f(x_*(t), u_*(t)), \psi(t) \rangle - \left\langle x_*(t), \left[\frac{\partial f(x_*(t), u_*(t))}{\partial x} \right]^* \psi(t) \right\rangle \\ &\quad - e^{-\rho t} \left\langle x_*(t), \frac{\partial g(x_*(t), u_*(t))}{\partial x} \right\rangle. \end{aligned}$$

Здесь последний член неположителен почти всюду на интервале $[\tau, \infty)$ в силу условий (5.13) и (A8). Следовательно, учитывая (5.14), на $[\tau, \infty)$ имеем

$$\frac{d}{dt} \langle x_*(t), \psi(t) \rangle \stackrel{\text{п.в.}}{\leq} -\theta \langle x_*(t), \psi(t) \rangle + \mathcal{H}(x_*(t), t, u_*(t), \psi(t)) - e^{-\rho t} g(x_*(t), u_*(t)). \quad (5.16)$$

Введем функции

$$\alpha(t) = \int_t^\infty e^{-\rho s} g(x_*(s), u_*(s)) ds, \quad y(t) = \langle x_*(t), \psi(t) \rangle - \alpha(t), \quad t \geq 0.$$

Из (5.16) в силу утверждения 3) теоремы 5 на $[\tau, \infty)$ получаем

$$\dot{y}(t) \stackrel{\text{п.в.}}{\leq} -\theta y(t) + (\rho - \theta) \alpha(t).$$

Ясно, что $\alpha(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших t имеем

$$\dot{y}(t) \stackrel{\text{п.в.}}{\leq} -\theta y(t) + \varepsilon,$$

откуда $\limsup_{t \rightarrow \infty} y(t) \leq \varepsilon/\theta$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$, определения функции $y(\cdot)$ и условий (5.3) и (5.13) получаем требуемое утверждение. Следствие доказано.

Заметим, что в случае, когда правая часть системы (2.1) аффинна как по фазовой переменной x , так и по управлению u , при выполнении условий следствия 6 и при некоторых дополнительных условиях положительности утверждение 4) теоремы 5 может быть усилено – в этом случае вектор Φ_0 в (5.6) равен нулю (подробнее см. [10; разд. 11]).

Заметим также, что условие трансверсальности вида (5.15) часто используется в формулировках достаточных условий оптимальности, основанных на соотношениях принципа максимума (подробнее см. [4], [22], [47]).

В заключение данного раздела в качестве иллюстрации существенности условия доминирования дисконтирующего множителя (A4) и условия монотонности (A7) для нормальности ($\psi^0 = 1$) задачи (P) мы рассмотрим следующий пример из работы [43].

ПРИМЕР 1. Рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$\dot{x}(t) = 2x(t) + u(t), \quad u(t) \in U = [-1, 0], \quad (5.17)$$

$$x(0) = 0, \quad (5.18)$$

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_0^\infty e^{-t}(2x(t) + u(t)) dt \rightarrow \max. \quad (5.19)$$

Положим $G = \mathbb{R}$. Задача (5.17)–(5.19) удовлетворяет условиям (A1)–(A3), т. е. является частным случаем задачи (P). Однако легко видеть, что здесь нарушаются как условие доминирования дисконтирующего множителя (A4) (или (4.26)), так и условие монотонности (A7) (условие (A8) здесь выполняется).

Единственный оптимальный процесс $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ в задаче (5.17)–(5.19) имеет вид

$$x_*(t) = 0 \quad \text{для всех } t \geq 0, \quad u_*(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} 0.$$

Действительно, любое допустимое управление $\tilde{u}(\cdot)$, отличное от $u_*(\cdot)$, принимает отрицательные значения на множестве положительной меры. Поскольку допустимая траектория $\tilde{x}(\cdot)$, соответствующая $\tilde{u}(\cdot)$, удовлетворяет условию $\tilde{x}(t) \leq 0$, $t \geq 0$ (см. (5.17) и (5.18)), то имеем $J(\tilde{x}(\cdot), \tilde{u}(\cdot)) < 0$ (см. (5.19)), в то время как $J(x_*(\cdot), u_*(\cdot)) = 0$.

В силу теоремы 3 оптимальная пара $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ удовлетворяет основным соотношениям принципа максимума Понтрягина (3.40), (3.41) вместе с некоторой соответствующей ей ненулевой парой сопряженных переменных $(\psi(\cdot), \psi^0)$, $\psi^0 \geq 0$.

Покажем, что для любой пары сопряженных переменных $(\psi(\cdot), \psi^0)$, соответствующей оптимальной паре $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ в силу теоремы 3, справедливо равенство $\psi^0 = 0$.

Действительно, функция Гамильтона–Понтрягина для задачи (5.17)–(5.19) имеет вид

$$\mathcal{H}(x, t, u, \psi, \psi^0) = \psi(2x + u) + \psi^0 e^{-t}(2x + u) = (\psi + \psi^0 e^{-t})(2x + u).$$

Следовательно, переменная $\psi(\cdot)$ является решением сопряженной системы (см. (3.40))

$$\dot{\psi}(t) = -2(\psi(t) + \psi^0 e^{-t}), \quad (5.20)$$

а условие максимума (3.41) влечет выполнение неравенства

$$\psi(t) + \psi^0 e^{-t} \geq 0, \quad t \geq 0. \quad (5.21)$$

Решая (5.20), получаем

$$\psi(t) = -2\psi^0 e^{-t} + (\psi(0) + 2\psi^0)e^{-2t}, \quad t \geq 0.$$

Отсюда следует, что если $\psi^0 > 0$, то для всех достаточно больших t

$$\psi(t) + \psi^0 e^{-t} = -\psi^0 e^{-t} + (\psi(0) + 2\psi^0)e^{-2t} < 0,$$

что противоречит условию (5.21) и, следовательно, условию максимума (3.41). Таким образом, $\psi^0 = 0$.

6. Модель оптимального экономического роста со случайным скачком цен

В этом разделе в качестве нетривиального примера применения описанной выше теории мы рассмотрим одну модель оптимального экономического роста, предложенную в [5], [6]. При этом мы дадим ей другую, отличающуюся от первоначальной (см. [5], [6]) экономическую интерпретацию, отражающую наблюдаемую изменчивость мировых цен на энергоносители.

Рассмотрим абстрактную двухсекторную экономику, в которой первый (“промышленный”) сектор ориентирован на производство товаров для внутреннего потребления, а второй (“сырьевой”) сектор – главным образом на внешний рынок.

Будем считать, что величины $K_1(t) > 0$ и $K_2(t) > 0$ суть количества производственного капитала, имеющегося в момент времени $t \geq 0$ в первом и втором секторах рассматриваемой экономики. Для простоты предположим, что производство продукции в обоих секторах описывается посредством производственной функции типа AK (см. [1], [2]): в единицу времени, следующую за моментом $t \geq 0$, i -й сектор, $i = 1, 2$, производит соответствующий однородный продукт в количестве $Q_i(t) = A_i K_i(t)$, $A_i > 0$, пропорциональном имеющемуся в момент t количеству $K_i(t)$ производственного капитала.

Пусть, далее, вся произведенная в экономике продукция продается на соответствующем (внутреннем или внешнем) рынке. Мы рассмотрим ситуацию, когда рыночная цена (на внутреннем рынке) товара, производимого в первом секторе, может быть легко прогнозируема на произвольно длительном промежутке времени, в то время как рыночная цена товара, производимого во втором секторе, подвержена влиянию внешних факторов, которые не могут быть до конца спрогнозированы.

Пронормируем цену товара, производимого в первом секторе, и будем считать ее постоянной и равной 1. Все расчеты будем вести относительно этой нормированной цены. Пусть в начальный момент времени (относительная) цена товара, произведенного во втором секторе, есть величина $q > 0$. Предположим далее, что имеющиеся долгосрочные прогнозы предсказывают возможность скачкообразного изменения в будущем цены товара, производимого во втором секторе, в результате некоторых внешних событий (например, мирового кризиса или открытия альтернативных источников энергии). Пусть $T > 0$ – (неизвестный нам) момент такого скачкообразного изменения цены товара во втором секторе. Для простоты будем считать, что на промежутке времени $[0, T)$ цена товара, производимого во втором секторе, постоянна и равна ее начальному значению q , а на последующем бесконечном интервале $[T, \infty)$ она равна (постоянной) величине $p > 0$. Тогда при $t \in [0, T)$ текущий (относительный) национальный доход, взятый в денежном выражении, есть $Y_q(t) = A_1 K_1(t) + q A_2 K_2(t)$, а при $t \in [T, \infty)$ он есть $Y_p(t) = A_1 K_1(t) + p A_2 K_2(t)$. Пусть для определенности ² $p < q$, при этом момент T скачкообразного падения цен на товар, производимый во втором секторе, будем трактовать как момент

²Все дальнейшие рассмотрения верны и при $p > q$ с минимальными изменениями (см. [5], [6]).

наступления “кризиса”. Нас будет интересовать оптимизация экономического роста в “докризисный” период $[0, T]$.

Будем считать, что в каждый момент $t \in [0, \infty)$ получаемый национальный доход может быть распределен произвольным образом между потреблением $C(t)$ в доле $u(t) \in (0, 1]$ от общего текущего дохода $Y_{q,p}(t)$ и инвестициями $I_1(t)$ в первый сектор и $I_2(t)$ во второй сектор в долях $v(t)$ и $1 - v(t)$ от оставшейся части дохода³ $(1 - u(t))Y_{q,p}(t)$:

$$\begin{aligned} Y_{q,p}(t) &= C(t) + I_1(t) + I_2(t), \quad C(t) = u(t)Y_{q,p}(t), \quad u(t) \in (0, 1], \\ I_1(t) &= v(t)(1 - u(t))Y_{q,p}(t), \\ I_2(t) &= (1 - v(t))(1 - u(t))Y_{q,p}(t), \quad v(t) \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Здесь $Y_{q,p}(t) = Y_q(t)$ при $t \in [0, T]$ и $Y_{q,p}(t) = Y_p(t)$ при $t \in [T, \infty)$.

В дальнейшем измеримые функции $u: [0, \infty) \rightarrow (0, 1]$ и $v: [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ будем трактовать как допустимые управления, а количества производственного капитала $K_1(\cdot)$ и $K_2(\cdot)$ – как фазовые переменные.

Приращение капитала в каждом секторе на бесконечном интервале $[0, \infty)$ будем описывать стандартным образом:

$$\dot{K}_1(t) = b_1 I_1(t) - \delta K_1(t), \quad \dot{K}_2(t) = b_2 I_2(t) - \delta K_2(t). \quad (6.2)$$

Здесь $1/b_1$ и $1/b_2$ – стоимости единиц капитала в первом и втором секторах экономики, а $\delta > 0$ – коэффициент амортизации (предполагаем, что он один и тот же для обоих секторов).

Определим функционал полезности, оценивающий качество процесса управления на интервале $[0, T]$, $T > 0$, используя логарифмическую функцию мгновенной полезности (см., например, [1], [2]):

$$J_T(C(\cdot), K_1(T), K_2(T)) = \int_0^T e^{-\rho t} \ln C(t) dt + e^{-\rho T} V(K_1(T), K_2(T)). \quad (6.3)$$

Здесь $\rho > 0$ – параметр дисконтирования и

$$V(K_1(T), K_2(T)) = \max_{C(\cdot)} \int_T^\infty e^{-\rho(t-T)} \ln C(t) dt \quad (6.4)$$

– текущая стоимость вектора капитала $(K_1(T), K_2(T))$ в момент T (см. (1.10)). Максимум в (6.4) берется по всем возможным траекториям переменной $C(\cdot)$ в задаче (6.1), (6.2) на интервале времени $[T, \infty)$ при фиксированном начальном значении вектора капитала $(K_1(T), K_2(T))$.

Отметим, что в функционале (6.3) для фигурирующего в интегральном члене текущего потребления справедливо равенство $C(t) = u(t)Y_q(t)$, $t \in [0, T]$, в то время как в терминальном члене текущее потребление определяется равенством $C(t) = u(t)Y_p(t)$, $t \in [T, \infty)$.

³Вариант накопления денежных ресурсов в каком-либо “стабилизационном” фонде мы здесь не рассматриваем.

С помощью несложных вычислений можно найти явный вид величины (6.4):

$$V(K_1(T), K_2(T)) = \frac{1}{\rho} \ln(A_1 K_1(T) + p A_2 K_2(T)) + M, \quad M > 0, \quad (6.5)$$

где M – некоторая не зависящая от T постоянная (подробнее см. [5], [6]).

Предположим теперь, что момент наступления кризиса $T > 0$ является случайной величиной и вероятность его наступления на каждом малом интервале пропорциональна длине этого интервала, т. е. справедлива формула (1.11) с некоторым $\nu > 0$. Тогда случайная величина T имеет экспоненциальные функцию распределения $\Phi(t) = P(T < t)$ и плотность $\varphi(t) = \dot{\Phi}(t)$, $t > 0$ (см. (1.12)).

В данной ситуации предполагаемый центральный планирующий орган сталкивается с задачей оптимального управления экономическим ростом на случайном докризисном интервале планирования $[0, T)$. Поставим эту задачу как задачу максимизации математического ожидания случайной величины (6.3).

Заметим, что максимизация математического ожидания функционала (6.3) означает суммарную максимизацию как всего “докризисного” (т. е. в период сравнительно высокой мировой цены q на природные ресурсы) потребления, отраженного в интегральном члене в (6.3), так и всего потенциального “послекризисного” потребления в последующий период низкой цены p , отраженного в терминальном члене в (6.3). В этом смысле выбор в качестве стратегической цели планирования максимизации математического ожидания функционала (6.3) означает намерение планирующего органа гармонизировать экономическое развитие на всем бесконечном интервале $[0, \infty)$.

Для произвольной пары допустимых управлений $(u(\cdot), v(\cdot))$ в силу (6.3), (6.5), (1.15) имеем⁴

$$\begin{aligned} E(J_T(C(\cdot), K_1(T), K_2(T))) &= \int_0^\infty e^{-(\nu+\rho)t} \left[\ln(u(t)Y_q(t)) + \frac{\nu}{\rho} \ln(A_1 K_1(t) + p A_2 K_2(t)) + \nu M \right] dt \\ &= \frac{\nu M}{\nu + \rho} + \int_0^\infty e^{-(\nu+\rho)t} \ln u(t) dt + \frac{\nu + \rho}{\rho} \int_0^\infty e^{-(\nu+\rho)t} \ln Y_q(t) dt \\ &\quad + \frac{\nu}{\rho} \int_0^\infty e^{-(\nu+\rho)t} \ln \frac{A_1 K_1(t) + p A_2 K_2(t)}{A_1 K_1(t) + q A_2 K_2(t)} dt. \end{aligned} \quad (6.6)$$

После интегрирования по частям второй интеграл в правой части равенства (6.6) может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} \frac{\nu + \rho}{\rho} \int_0^\infty e^{-(\nu+\rho)t} \ln Y_q(t) dt &= \frac{1}{\rho} \ln Y_q(0) - \frac{\delta}{\rho(\nu + \rho)} \\ &\quad + \frac{1}{\rho} \int_0^\infty e^{-(\nu+\rho)t} (1 - u(t))(v(t)b_1 A_1 + q(1 - v(t))b_2 A_2) dt. \end{aligned}$$

⁴Хотя второе условие из (1.14) в данном случае выполнено не для всех допустимых процессов, можно показать, что формула (1.15) остается в силе в том смысле, что либо обе ее части равны $-\infty$, либо обе части конечны и равны между собой.

Следовательно, равенство (6.6) принимает вид

$$\begin{aligned} E(J_T(C(\cdot), K_1(T), K_2(T))) &= \frac{\nu M}{\nu + \rho} + \frac{1}{\rho} \ln Y_q(0) - \frac{\delta}{\rho(\nu + \rho)} \\ &+ \int_0^\infty e^{-(\nu+\rho)t} \left[\ln u(t) + \frac{1}{\rho} (1 - u(t)) (v(t)b_1 A_1 + q(1 - v(t))b_2 A_2) \right] dt \\ &+ \frac{\nu}{\rho} \int_0^\infty e^{-(\nu+\rho)t} \ln \frac{A_1 K_1(t) + p A_2 K_2(t)}{A_1 K_1(t) + q A_2 K_2(t)} dt. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Заметим, что первые три слагаемых в правой части (6.7) являются постоянными; следовательно, их можно не учитывать при максимизации.

Таким образом, собирая вместе соотношения (6.1), (6.2) и (6.7), мы можем сформулировать модель оптимизации докризисного развития рассматриваемой экономики в виде следующей задачи оптимального управления $(\tilde{P})$:

$$\begin{aligned} \dot{K}_1(t) &= v(t)(1 - u(t))b_1 [A_1 K_1(t) + q A_2 K_2(t)] - \delta K_1(t), \\ \dot{K}_2(t) &= (1 - v(t))(1 - u(t))b_2 [A_1 K_1(t) + q A_2 K_2(t)] - \delta K_2(t), \\ K_1(0) &= K_{10} > 0, \quad K_2(0) = K_{20} > 0, \quad u(t) \in (0, 1], \quad v(t) \in [0, 1], \\ J(K_1(\cdot), K_2(\cdot), u(\cdot), v(\cdot)) &= \int_0^\infty e^{-(\nu+\rho)t} \left[\ln u(t) + \frac{1}{\rho} (1 - u(t)) (v(t)b_1 A_1 \right. \\ &\quad \left. + q(1 - v(t))b_2 A_2) + \frac{\nu}{\rho} \ln \frac{A_1 K_1(t) + p A_2 K_2(t)}{A_1 K_1(t) + q A_2 K_2(t)} \right] dt \rightarrow \max. \end{aligned}$$

Введем новую фазовую переменную $x(\cdot)$:

$$x(t) = \frac{A_1 K_1(t) + p A_2 K_2(t)}{A_1 K_1(t) + q A_2 K_2(t)}, \quad t \geq 0. \quad (6.8)$$

Нетрудно видеть, что так определенная фазовая переменная $x(\cdot)$ удовлетворяет условию

$$x(t) \in \left(\frac{p}{q}, 1 \right) \quad \text{для любого } t \geq 0 \quad (6.9)$$

(напомним, что $p < q$). Заметим, что при всех $t \geq 0$ величина $x(t)$ равна $Y_p(t)/Y_q(t)$, если мы определим $Y_p(t)$ при $t \in [0, T]$ той же формулой $Y_p(t) = A_1 K_1(t) + p A_2 K_2(t)$, что и при $t \in [T, \infty)$.

Для упрощения обозначений домножим функционал в задаче $(\tilde{P})$ на постоянную $\rho > 0$ и положим $a = b_1 A_1$, $b = q b_2 A_2$, $c = p b_2 A_2$. Вычисляя производную от правой части равенства (6.8) (см. [5]), мы можем перейти от задачи $(\tilde{P})$ к следующей эквивалентной задаче $(\tilde{P}_0)$, сформулированной в терминах фазовой переменной $x(\cdot)$:

$$\dot{x}(t) = (1 - u(t)) [a v(t) + c(1 - v(t)) - (a v(t) + b(1 - v(t))) x(t)], \quad (6.10)$$

$$x(0) = x_0, \quad u(t) \in (0, 1], \quad v(t) \in [0, 1], \quad (6.11)$$

$$\begin{aligned} J_0(x(\cdot), u(\cdot), v(\cdot)) &= \int_0^\infty e^{-(\nu+\rho)t} [\rho \ln u(t) + (1 - u(t)) (a v(t) + b(1 - v(t))) \\ &\quad + \nu \ln x(t)] dt \rightarrow \max, \end{aligned} \quad (6.12)$$

где $x_0 \in (p/q, 1)$ – заданное положительное число.

Эквивалентность задач $(\tilde{P})$ и $(\tilde{P}_0)$ означает, что допустимая пара управлений $(u_*(\cdot), v_*(\cdot))$ оптимальна в задаче $(\tilde{P})$ тогда и только тогда, когда она оптимальна в задаче $(\tilde{P}_0)$.

Ниже мы формулируем теорему существования и принцип максимума для задачи $(\tilde{P}_0)$. Для доказательства этих результатов мы вводим вспомогательную задачу (точнее, семейство задач, зависящих от малого параметра $0 < \varepsilon \ll 1$) со слегка подправленным функционалом полезности $J_\varepsilon(x(\cdot), u(\cdot), v(\cdot))$ и доказываем сначала существование и принцип максимума для вспомогательной задачи. Затем мы показываем, что оптимальные процессы в исходной и вспомогательной задачах совпадают и, более того, для них совпадают все соотношения принципа максимума.

Для экономии места мы сформулируем теорему существования и принцип максимума сразу и для исходной задачи, и для вспомогательной. Для этого мы сначала сформулируем вспомогательную задачу.

Введем следующую функцию $\mathcal{L}_\varepsilon(\cdot): [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\mathcal{L}_\varepsilon(u) = \begin{cases} \ln \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} (u - \varepsilon), & \text{если } 0 \leq u \leq \varepsilon, \\ \ln u, & \text{если } u > \varepsilon, \end{cases} \quad (6.13)$$

где $\varepsilon < 1$ – некоторое малое положительное число.

Рассмотрим теперь следующую вспомогательную задачу $(\tilde{P}_\varepsilon)$:

$$\dot{x}(t) = (1 - u(t)) [av(t) + c(1 - v(t)) - (av(t) + b(1 - v(t)))x(t)], \quad (6.14)$$

$$x(0) = x_0, \quad u(t) \in [0, 1], \quad v(t) \in [0, 1], \quad (6.15)$$

$$J_\varepsilon(x(\cdot), u(\cdot), v(\cdot)) = \int_0^\infty e^{-(\nu+\rho)t} [\rho \mathcal{L}_\varepsilon(u(t)) + (1 - u(t))(av(t) + b(1 - v(t))) + \nu \ln x(t)] dt \rightarrow \max, \quad (6.16)$$

где $x_0 \in (p/q, 1)$ то же самое, что и в задаче $(\tilde{P}_0)$. Легко видеть, что любой допустимый процесс $(x(\cdot), u(\cdot), v(\cdot))$ в задаче $(\tilde{P}_0)$ является также допустимым и в задаче $(\tilde{P}_\varepsilon)$.

ТЕОРЕМА 6. *При любом $\varepsilon \geq 0$ в задаче $(\tilde{P}_\varepsilon)$ существует оптимальное управление $(u_*(\cdot), v_*(\cdot))$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО для случая $\varepsilon > 0$. Заметим, что построенная задача $(\tilde{P}_\varepsilon)$ не является аффинной по управлению, однако если ввести управляющие переменные $i_1 = v(1 - u)$ и $i_2 = (1 - v)(1 - u)$ со значениями в выпуклом компактном множестве

$$\{i_1, i_2 \in \mathbb{R}^2: i_1 \geq 0, i_2 \geq 0, i_1 + i_2 \leq 1\},$$

то получится эквивалентная $(\tilde{P}_\varepsilon)$ задача с управляемой системой, аффинной по управлению, причем функция мгновенной полезности будет вогнутой по управлению. Следовательно, для преобразованной таким образом задачи выполняются все условия теоремы 1 и в ней, а стало быть, и в задаче $(\tilde{P}_\varepsilon)$ существует оптимальный допустимый процесс $(x_*(\cdot), u_*(\cdot), v_*(\cdot))$.

Доказательство теоремы 6 для задачи $(\tilde{P}_0)$ будет дано ниже.

Положим $G = (p/q, 1)$,

$$f(x, u, v) = (1-u)[av+c(1-v)-(av+b(1-v))x], \quad x \in G, \quad u, v \in [0, 1], \quad (6.17)$$

и

$$g_\varepsilon(x, u, v) = \rho \mathcal{L}_\varepsilon(u) + (1-u)(av+b(1-v)) + \nu \ln x, \quad x \in G, \quad u, v \in [0, 1]. \quad (6.18)$$

Под $g_0(\cdot, \cdot, \cdot)$ будем естественным образом понимать функцию мгновенной полезности в функционале $J_0(x(\cdot), u(\cdot), v(\cdot))$ (6.12). Тогда управляемая система (6.14) и функционал (6.16) запишутся в виде

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), v(t)) \quad (6.19)$$

и

$$J_\varepsilon(x(\cdot), u(\cdot), v(\cdot)) = \int_0^\infty e^{-(\nu+\rho)t} g_\varepsilon(x(t), u(t), v(t)) dt.$$

Текущую функцию Гамильтона–Понтрягина $\mathcal{M}: G \times [0, 1] \times [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и текущий гамильтониан $M: G \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ в нормальной форме для задачи $(\tilde{P}_\varepsilon)$ определим стандартным образом⁵ (см. (3.48), (3.49)):

$$\mathcal{M}(x, u, v, \phi) = f(x, u, v)\phi + g_\varepsilon(x, u, v), \quad (6.20)$$

$$M(x, \phi) = \sup_{u, v \in [0, 1]} \mathcal{M}(x, u, v, \phi). \quad (6.21)$$

Здесь $x \in G$, $u, v \in [0, 1]$ и $\phi \in \mathbb{R}$.

Имеет место следующий вариант принципа максимума для задачи $(\tilde{P}_\varepsilon)$ (сформулированный здесь в терминах текущей сопряженной переменной $\phi(\cdot)$; см. (3.47)).

ТЕОРЕМА 7. Пусть $(x_*(\cdot), u_*(\cdot), v_*(\cdot))$ – оптимальный процесс в задаче $(\tilde{P}_\varepsilon)$, $\varepsilon \geq 0$. Тогда существует текущая сопряженная переменная $\phi: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ (соответствующая тройке $(x_*(\cdot), u_*(\cdot), v_*(\cdot))$) такая, что выполняются следующие условия:

1) процесс $(x_*(\cdot), u_*(\cdot), v_*(\cdot))$ вместе с текущей сопряженной переменной $\phi(\cdot)$ удовлетворяет на интервале $[0, \infty)$ основным соотношениям принципа максимума Понтрягина в нормальной форме:

$$\dot{\phi}(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} (\nu + \rho)\phi(t) - \frac{\partial \mathcal{M}(x_*(t), u_*(t), v_*(t), \phi(t))}{\partial x}, \quad (6.22)$$

$$\mathcal{M}(x_*(t), u_*(t), v_*(t), \phi(t)) \stackrel{\text{п.в.}}{=} M(x_*(t), \phi(t)); \quad (6.23)$$

2) выполняется условие стационарности в нормальной форме

$$M(x_*(t), \phi(t)) = (\nu + \rho)e^{(\nu+\rho)t} \int_t^\infty e^{-(\nu+\rho)s} g_\varepsilon(x_*(s), u_*(s), v_*(s)) ds, \quad t \geq 0; \quad (6.24)$$

⁵Здесь и далее для простоты обозначений мы опускаем индекс ε и пишем $\mathcal{M}$ и M вместо $\mathcal{M}_\varepsilon$ и M_ε .

3) для любого $t \geq 0$ справедливо равенство

$$\phi(t) = e^{(\nu+\rho)t} e^{z(t)} \int_t^\infty e^{-(\nu+\rho)s} e^{-z(s)} \frac{\partial g_\varepsilon(x_*(s), u_*(s), v_*(s))}{\partial x} ds, \quad (6.25)$$

$$\text{где } z(t) = - \int_0^t \frac{\partial f(x_*(s), u_*(s), v_*(s))}{\partial x} ds \geq 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО для случая $\varepsilon > 0$ немедленно вытекает из теоремы 4.

Доказательство теоремы 7 для задачи $(\tilde{P}_0)$ будет дано ниже.

СЛЕДСТВИЕ 7. Текущая сопряженная переменная $\phi(\cdot)$, соответствующая оптимальной тройке $(x_*(\cdot), u_*(\cdot), v_*(\cdot))$ в задаче $(\tilde{P}_\varepsilon)$, $\varepsilon \geq 0$, в силу теоремы 7, удовлетворяет следующему условию:

$$0 < \phi(t) \leq \frac{\nu q}{(\nu + \rho)p}, \quad t \geq 0. \quad (6.26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\partial g_\varepsilon(x, u, v)/\partial x = \nu/x > 0$ при всех $x \in G$ (см. (6.18)), из равенства (6.25) вытекает неравенство $\phi(t) > 0$ при всех $t \geq 0$. С другой стороны, в силу условия (6.9) имеем $\nu/x(t) < \nu q/p$ при всех $t \geq 0$. Кроме того (см. (6.17)), функция $z(\cdot)$ монотонно не убывает на интервале $[0, \infty)$. Отсюда в силу (6.25) вытекает, что для любого $t \geq 0$ текущую сопряженную переменную $\phi(\cdot)$ можно оценить следующим образом:

$$\phi(t) \leq e^{(\nu+\rho)t} e^{z(t)} \int_t^\infty e^{-(\nu+\rho)s} e^{-z(s)} \frac{\nu q}{p} ds = \frac{\nu q}{(\nu + \rho)p}.$$

Следствие доказано.

Заметим, что, поскольку $x(t) \in (p/q, 1)$ при всех $t \geq 0$ (см. (6.9)), неравенство (6.26) влечет выполнение обоих условий трансверсальности (1.16), (1.17) в задаче $(\tilde{P}_\varepsilon)$ (в частности, в задаче $(\tilde{P}_0)$), записанных в терминах текущей сопряженной переменной $\phi(\cdot)$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(\rho+\nu)t} \phi(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(\rho+\nu)t} x_*(t) \phi(t) = 0.$$

ЛЕММА 5. Если существует такой оптимальный процесс $(x_*(\cdot), u_*(\cdot), v_*(\cdot))$ в задаче $(\tilde{P}_\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, что $u_*(t) \geq \varepsilon$ при почти всех $t \in (0, \infty)$, то

- (i) данный процесс является оптимальным в задаче $(\tilde{P}_0)$;
- (ii) для любого другого оптимального в $(\tilde{P}_0)$ процесса $(\tilde{x}_*(\cdot), \tilde{u}_*(\cdot), \tilde{v}_*(\cdot))$ (если такой существует) выполняется неравенство $\tilde{u}_*(t) \geq \varepsilon$ при почти всех $t \in [0, \infty)$ и, таким образом, он является оптимальным и в задаче $(\tilde{P}_\varepsilon)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, утверждение (i) выполняется, поскольку $J_\varepsilon(x(\cdot), u(\cdot), v(\cdot)) \geq J_0(x(\cdot), u(\cdot), v(\cdot))$ для любого процесса $(x(\cdot), u(\cdot), v(\cdot))$ в задаче $(\tilde{P}_0)$ и $J_\varepsilon(x_*(\cdot), u_*(\cdot), v_*(\cdot)) = J_0(x_*(\cdot), u_*(\cdot), v_*(\cdot))$.

Далее, если $(\tilde{x}(\cdot), \tilde{u}(\cdot), \tilde{v}(\cdot))$ – такой допустимый процесс в задаче $(\tilde{P}_0)$, что $\tilde{u}(t) < \varepsilon$ на некотором множестве положительной меры, то

$$\begin{aligned} J_0(\tilde{x}(\cdot), \tilde{u}(\cdot), \tilde{v}(\cdot)) &< J_\varepsilon(\tilde{x}(\cdot), \tilde{u}(\cdot), \tilde{v}(\cdot)) \leq J_\varepsilon(x_*(\cdot), u_*(\cdot), v_*(\cdot)) \\ &= J_0(x_*(\cdot), u_*(\cdot), v_*(\cdot)) \end{aligned}$$

и этот процесс не может быть оптимальным в задаче $(\tilde{P}_0)$. Утверждение (ii) доказано. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 6 и 7 для задачи $(\tilde{P}_0)$. Пусть $0 < \varepsilon < \frac{\rho p}{aq + bp}$.

В силу теоремы 6, доказанной выше для $\varepsilon > 0$, в задаче $(\tilde{P}_\varepsilon)$ существует оптимальный процесс $(x_*(\cdot), u_*(\cdot), v_*(\cdot))$. В силу теоремы 7, доказанной выше для $\varepsilon > 0$, для этого оптимального процесса и соответствующей ему текущей сопряженной переменной $\phi(\cdot)$ выполнено условие максимума (6.23). Так как

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{M}(x, u, v, \phi)}{\partial u} &= -[av + c(1 - v) - (av + b(1 - v))x]\phi + \rho \mathcal{L}'_\varepsilon(u) - (av + b(1 - v)) \\ &\geq -a \left(1 - \frac{p}{q}\right) \frac{\nu q}{(\nu + \rho)p} + \rho \mathcal{L}'_\varepsilon(u) - a - b \\ &> \rho \mathcal{L}'_\varepsilon(u) - a \frac{q}{p} - b > \rho \mathcal{L}'_\varepsilon(u) - \frac{\rho}{\varepsilon} \end{aligned}$$

при $u, v \in [0, 1]$, $x \in \left(\frac{p}{q}, 1\right)$, $0 < \phi \leq \frac{\nu q}{(\nu + \rho)p}$ и $\mathcal{L}'_\varepsilon(u) = \frac{1}{\varepsilon}$ при $u \leq \varepsilon$ (см. (6.13)), то из (6.23) и (6.26) имеем $u_*(t) > \varepsilon$ при почти всех $t > 0$. Из леммы 5 следует, что тогда этот процесс будет оптимальным и в задаче $(\tilde{P}_0)$. Это доказывает существование оптимального процесса в задаче $(\tilde{P}_0)$.

В силу той же леммы 5 неравенство $u_*(\cdot) \stackrel{\text{п.в.}}{\geq} \varepsilon$ будет выполнено для любого оптимального процесса в задаче $(\tilde{P}_0)$ и этот процесс будет также оптимальным в задаче $(\tilde{P}_\varepsilon)$. По теореме 7, доказанной выше для $\varepsilon > 0$, существует текущая сопряженная переменная $\phi(\cdot)$ (для задачи $(\tilde{P}_\varepsilon)$), для которой выполнены все соотношения принципа максимума 1)–3) из теоремы 7. В силу неравенства $u_*(\cdot) \stackrel{\text{п.в.}}{\geq} \varepsilon$ в этих соотношениях g_ε можно заменить на g_0 . Кроме того, так как $g_\varepsilon(x, u, v) \geq g_0(x, u, v)$ при всех $x \in G$, $u, v \in [0, 1]$, $u \neq 0$, то аналогичное неравенство справедливо и для текущих функций Гамильтона–Понтрягина для задач $(\tilde{P}_\varepsilon)$ и $(\tilde{P}_0)$. Таким образом, все утверждения 1)–3) теоремы 7 для задачи $(\tilde{P}_0)$ вытекают из аналогичных утверждений для задачи $(\tilde{P}_\varepsilon)$. Теоремы 6 и 7 доказаны.

Полученные соотношения принципа максимума (теорема 7) являются основным инструментом нахождения всех оптимальных режимов в задаче $(\tilde{P}_0)$. Оказывается, что для любого начального состояния $x_0 \in G$ существует единственная допустимая тройка $(x_*(\cdot), u_*(\cdot), v_*(\cdot))$, удовлетворяющая условиям теоремы 7. В силу существования оптимального управления в задаче $(\tilde{P}_0)$ эта тройка $(x_*(\cdot), u_*(\cdot), v_*(\cdot))$ является единственным допустимым оптимальным процессом в задаче $(\tilde{P}_0)$. Подробно этот анализ см. в [5], [6]. Ниже мы приведем только ключевые элементы.

Рассмотрим условие максимума (6.23). Поскольку текущая функция Гамильтона–Понтрягина $\mathcal{M}(x, u, \cdot, \phi)$ (см. (6.20)) аффинна по переменной v , ее максимальное значение по $v \in [0, 1]$ при произвольных фиксированных $x \in G$, $u \in [0, 1]$ и $\phi > 0$ достигается либо при $v = 0$, либо при $v = 1$, либо во всех точках $v \in [0, 1]$ одновременно.

Рис. 1. Множества Γ_0 и Γ_1 , а также одна из возможных форм множества $\Gamma_{u=1}$. Стрелки указывают направление движения траекторий гамильтоновой системы вдоль координаты x .

При $x > 0$, $u \in [0, 1]$, $\phi > 0$ положим

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_0(x, u, \phi) &= \mathcal{M}(x, u, 0, \phi) = (1 - u)[c - bx]\phi + \rho \ln u + (1 - u)b + \nu \ln x, \\ \mathcal{M}_1(x, u, \phi) &= \mathcal{M}(x, u, 1, \phi) = (1 - u)[a - ax]\phi + \rho \ln u + (1 - u)a + \nu \ln x.\end{aligned}$$

Очевидно, что $\mathcal{M}_0(x, 1, \phi) \equiv \mathcal{M}_1(x, 1, \phi)$ при всех $x \in G$, $\phi > 0$. Определим функцию $\phi_0: G \rightarrow \mathbb{R}$ равенством

$$\phi_0(x) = \frac{b - a}{bx - c + a - ax}, \quad x \in G. \quad (6.27)$$

Заметим, что, так как $p/q < x < 1$, знаменатель в формуле (6.27) положителен.

Введем множество $\Gamma = \{(x, \phi) \in \mathbb{R}^2: x \in G, \phi > 0\}$ допустимых значений переменных x и ϕ . График $\text{gr } \phi_0 = \{(x, \phi) \in \Gamma: \phi = \phi_0(x)\}$ функции $\phi_0(\cdot)$ (если только он не пуст) делит множество Γ на две части (см. рис. 1):

$$\begin{aligned}\Gamma_0 &= \{(x, \phi) \in \Gamma: \mathcal{M}_0(x, u, \phi) > \mathcal{M}_1(x, u, \phi) \text{ при } u < 1\}, \\ \Gamma_1 &= \{(x, \phi) \in \Gamma: \mathcal{M}_0(x, u, \phi) < \mathcal{M}_1(x, u, \phi) \text{ при } u < 1\}.\end{aligned}$$

Множество Γ_0 лежит ниже графика $\phi_0(\cdot)$ (или пусто, если $\text{gr } \phi_0 = \emptyset$), а множество Γ_1 лежит выше графика $\phi_0(\cdot)$ (или совпадает с Γ , если $\text{gr } \phi_0 = \emptyset$).

Положим

$$u_i(x, \phi) = \arg \max_{u \in [0, 1]} \mathcal{M}_i(x, u, \phi), \quad (x, \phi) \in \Gamma_i \cup \text{gr } \phi_0, \quad i = 0, 1.$$

Тогда

$$u_0(x, \phi) = \begin{cases} 1 & \text{при } \rho \geq b + (c - bx)\phi, \\ \frac{\rho}{b + (c - bx)\phi} & \text{при } \rho < b + (c - bx)\phi, \end{cases} \quad (6.28)$$

если $(x, \phi) \in \Gamma_0 \cup \text{gr } \phi_0$, и

$$u_1(x, \phi) = \begin{cases} 1 & \text{при } \rho \geq a + a(1-x)\phi, \\ \frac{\rho}{a + a(1-x)\phi} & \text{при } \rho < a + a(1-x)\phi, \end{cases} \quad (6.29)$$

если $(x, \phi) \in \Gamma_1 \cup \text{gr } \phi_0$.

Отдельно рассмотрим множество $\Gamma_{u=1}$ тех точек (x, ϕ) , в которых либо $u_0(x, \phi) = 1$, либо $u_1(x, \phi) = 1$ (см. рис. 1):

$$\Gamma_{u=1} = \{(x, \phi) \in \Gamma_0 \cup \text{gr } \phi_0 : \rho \geq b + (c - bx)\phi\} \cup \{(x, \phi) \in \Gamma_1 : \rho \geq a + a(1-x)\phi\}. \quad (6.30)$$

В множестве $\Gamma_{u=1}$ в силу условия (6.23) гамильтонова система принципа максимума для задачи $(\tilde{P}_0)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 0, \\ \dot{\phi}(t) &= (\nu + \rho)\phi(t) - \frac{\nu}{x(t)}. \end{aligned} \quad (6.31)$$

В множестве $\Gamma_0 \setminus \Gamma_{u=1}$ гамильтонова система принципа максимума для задачи $(\tilde{P}_0)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \left(1 - \frac{\rho}{b + (c - bx(t))\phi(t)}\right)(c - bx(t)), \\ \dot{\phi}(t) &= (\nu + \rho)\phi(t) + b\left(1 - \frac{\rho}{b + (c - bx(t))\phi(t)}\right)\phi(t) - \frac{\nu}{x(t)}, \end{aligned} \quad (6.32)$$

а в множестве $\Gamma_1 \setminus \Gamma_{u=1}$ – вид

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \left(1 - \frac{\rho}{a + a(1-x(t))\phi(t)}\right)a(1-x(t)), \\ \dot{\phi}(t) &= (\nu + \rho)\phi(t) + a\left(1 - \frac{\rho}{a + a(1-x(t))\phi(t)}\right)\phi(t) - \frac{\nu}{x(t)}. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Заметим, что

$$\Gamma = \Gamma_{u=1} \sqcup (\Gamma_0 \setminus \Gamma_{u=1}) \sqcup (\Gamma_1 \setminus \Gamma_{u=1}) \sqcup (\text{gr } \phi_0 \setminus \Gamma_{u=1}).$$

При этом на кривой $\text{gr } \phi_0 \setminus \Gamma_{u=1}$ в действительности мы имеем дифференциальное включение, правая часть которого есть множество всех выпуклых линейных комбинаций предельных значений векторных полей, определенных в Γ_0 и Γ_1 правыми частями систем (6.32) и (6.33) соответственно.

В дальнейшем систему (6.31)–(6.33) будем называть (S)-системой.

В силу следствия 7 интерес представляют только ограниченные траектории. Оказывается, что для любого начального состояния x_0 существует единственная ограниченная траектория $(x(\cdot), \phi(\cdot))$ (S)-системы, удовлетворяющая начальному условию $x(0) = x_0$ и лежащая в Γ при всех $t \geq 0$. Поэтому эта траектория определяет единственный оптимальный процесс $(x_*(\cdot), u_*(\cdot), v_*(\cdot))$ в задаче $(\tilde{P}_0)$ (а стало быть, и в $(\tilde{P})$) с начальным условием $x_*(0) = x_0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Для любой траектории $(x(\cdot), \phi(\cdot))$ (S)-системы имеем $\dot{x}(t) > 0$ при $(x(t), \phi(t)) \in \Gamma_1 \setminus \Gamma_{u=1}$ и $\dot{x}(t) < 0$ при $(x(t), \phi(t)) \in \Gamma_0 \setminus \Gamma_{u=1}$. Если $(x(t), \phi(t)) \in \Gamma_{u=1}$, то $\dot{x}(t) = 0$.

Из замечания 4 вытекает, что неподвижные точки (S)-системы могут находиться только на графике функции $\phi_0(\cdot)$ или лежать в множестве $\Gamma_{u=1}$. При этом неподвижная точка на $\text{gr } \phi_0 \setminus \Gamma_{u=1}$ — это точка, в которой правая часть упомянутого выше дифференциального включения содержит нулевой вектор. В такой точке нет единственности решения (S)-системы, поскольку траектория может прийти в эту неподвижную точку за конечное время, может оставаться в ней сколь угодно долго и может выйти из нее в любой момент.

В множестве $\Gamma_{u=1}$ неподвижные точки заполняют весь отрезок графика функции

$$\phi_1(x) = \frac{\nu}{(\nu + \rho)x}, \quad (6.34)$$

лежащий в $\Gamma_{u=1}$, если этот график пересекает $\Gamma_{u=1}$; т. е. в $\Gamma_{u=1}$ множество неподвижных точек есть множество $\Gamma_{u=1} \cap \text{gr } \phi_1$.

В множестве $\Gamma \setminus \Gamma_{u=1}$ (S)-система либо не имеет неподвижных точек, либо имеет единственную неподвижную точку $(\bar{x}, \phi_0(\bar{x}))$, где

$$\bar{x} = \frac{\nu(a-c)^2}{(b-a)[a(b-c) - \nu(a-c)]}. \quad (6.35)$$

Заметим, что $\bar{x}$ является решением уравнения

$$P(x) := (b-a)[a(b-c) - \nu(a-c)]x - \nu(a-c)^2 = 0, \quad (6.36)$$

причем $P(x) \neq 0$. Так как $P(0) \leq 0$, то точка $(\bar{x}, \phi_0(\bar{x}))$ принадлежит множеству Γ тогда и только тогда, когда $P(p/q) < 0$ и $P(1) > 0$, т. е. $c(b-a) < \nu(a-c) < a(b-a)$.

ЛЕММА 6 (см. [6]). Пусть $(x(\cdot), \phi(\cdot))$ — такая траектория (S)-системы, что $(x(t), \phi(t)) \in \text{gr } \phi_0 \setminus \Gamma_{u=1}$ для любого t из некоторого интервала $[t_0, t_1]$, $t_1 > t_0$. Тогда $(x(t), \phi(t)) \equiv (\bar{x}, \phi_0(\bar{x}))$ для любого $t \in [t_0, t_1]$.

Если траектория (S)-системы достигает кривой $\text{gr } \phi_0 \setminus \Gamma_{u=1}$ в некоторой точке $(\bar{x}, \bar{\phi}) \neq (\bar{x}, \phi_0(\bar{x}))$, то такая траектория обязательно пересекает кривую $\text{gr } \phi_0$ (т. е. переходит с одной стороны кривой на другую), причем направление пересечения определяется знаком многочлена $P(\cdot)$ в точке $\bar{x}$: если $P(\bar{x}) < 0$, то траектория пересекает кривую $\text{gr } \phi_0$ сверху вниз, а если $P(\bar{x}) > 0$, то снизу вверх.

В частности (с учетом замечания 4), ни одна траектория (S)-системы не может пересечь кривую $\text{gr } \phi_0$ дважды (в двух различных точках).

Заметим, что векторное поле, определенное правой частью (S)-системы, непрерывно продолжается на замыкание множества Γ . Поэтому любая ограниченная траектория (S)-системы стремится либо к неподвижной точке, лежащей в Γ , либо к “бесконечной” неподвижной точке, лежащей на границе Γ (замечание 4 и лемма 6 исключают наличие циклов).

Дальнейший анализ качественного поведения траекторий (S)-системы распадается на рассмотрение различных случаев, имеющих место при различных соотношениях между параметрами задачи. Здесь мы ограничимся только описанием итоговой картины. Полный анализ приведен в [6].

Рис. 2. Траектории (S)-системы в случае I. Ограниченные траектории показаны жирными линиями.

В целом картина распадается на следующие три случая.

- I. $\Gamma_{u=1} = \emptyset$, что эквивалентно неравенству $\rho \leq a$.
- II. $\text{gr } \phi_0 \subset \Gamma_{u=1} \neq \emptyset$ (случай $\text{gr } \phi_0 = \emptyset$ не исключается), или $\rho > a$ и $\rho \geq b$.
- III. $\Gamma_{u=1} \neq \emptyset$ и $\text{gr } \phi_0 \setminus \Gamma_{u=1} \neq \emptyset$, что эквивалентно неравенству $a < \rho < b$.

Случай I. Если $\nu(a - c) \leq c(b - a)$, то единственная ограниченная траектория лежит в Γ_0 и стремится к положению равновесия $(\bar{x}_0, \bar{\phi}_0) := (p/q, \nu q/(p(\nu + b))) \in \partial\Gamma_0$. Остальные траектории либо неограничены, либо покидают множество Γ за конечное время (рис. 2, а)), так что не могут соответствовать никакому оптимальному процессу в задаче $(\tilde{P}_0)$.

Если $\nu(a - c) \geq a(b - a)$, то, аналогично, единственная ограниченная траектория лежит в Γ_1 и стремится к положению равновесия $(1, \nu/(\nu + a)) \in \partial\Gamma_1$ (рис. 2, б)).

Если же $c(b - a) < \nu(a - c) < a(b - a)$, то $(\bar{x}, \phi_0(\bar{x})) \in \Gamma$ и при $x_0 < \bar{x}$ единственная ограниченная траектория $(x(\cdot), \phi(\cdot))$ с начальным условием $x(0) = x_0$ целиком лежит выше графика $\text{gr } \phi_0$, достигает положения $(\bar{x}, \phi_0(\bar{x}))$ за конечное время и затем остается в $(\bar{x}, \phi_0(\bar{x}))$, а при $x_0 > \bar{x}$ она целиком лежит ниже графика $\text{gr } \phi_0$, достигает положения равновесия $(\bar{x}, \phi_0(\bar{x}))$ за конечное время и затем опять же остается в нем. Если $x_0 = \bar{x}$, то единственной ограниченной траекторией с начальным условием $x(0) = x_0$ является стационарная траектория $x(t) \equiv \bar{x}$, $\phi(t) \equiv \phi_0(\bar{x})$ (рис. 2, в)).

Случай II. Если $a(\nu b + \rho c) \leq c\rho(\nu + \rho)$, то траектории (S)-системы выглядят, как показано на рис. 3, а), и для любого $x_0 \in G$ единственной ограниченной траекторией с начальным условием $x(0) = x_0$ является стационарная траектория $x(t) \equiv x_0$, $\phi(t) \equiv \nu/((\nu + \rho)x_0)$.

Если же $a(\nu b + \rho c) > c\rho(\nu + \rho)$, то траектории (S)-системы выглядят, как показано на рис. 3, б). Если при этом $x_0 < \hat{x} := \nu a/(\rho(\nu + \rho - a))$, то единственная ограниченная траектория с начальным условием $x(0) = x_0$ лежит в $\Gamma_1 \setminus \Gamma_{u=1}$ и стремится к положению равновесия $(\hat{x}, \hat{\phi}) \in \partial\Gamma_{u=1}$, где $\hat{\phi} = \nu/((\nu + \rho)\hat{x})$. А если $\hat{x} \leq x_0 < 1$, то единственной ограниченной траекторией с начальным условием

Рис. 3. Траектории (S)-системы в случае II. Ограниченные траектории исчерпываются стационарными точками на кривой $\phi = \nu/((\nu + \rho)x)$ в $\Gamma_{u=1}$ и траекторией в множестве $\Gamma \setminus \Gamma_{u=1}$, показанной жирной линией в случае b).

$x(0) = x_0$ является стационарная траектория $x(t) \equiv x_0$, $\phi(t) \equiv \nu/((\nu + \rho)x_0)$, лежащая в $\Gamma_{u=1}$.

Случай III. В этом случае

$$\Gamma_{u=1} = \left\{ (x, \phi) \in \Gamma : \frac{b - \rho}{bx - c} \leq \phi \leq \frac{\rho - a}{a(1 - x)} \right\}.$$

Именно этот случай был показан на рис. 1.

Точка пересечения границы $\partial\Gamma_{u=1}$ с графиком $\text{gr } \phi_0$ (она же точка пересечения двух криволинейных участков границы $\Gamma_{u=1}$) имеет координаты

$$\hat{x} := \frac{a(b - \rho) + c(\rho - a)}{\rho(b - a)}, \quad \hat{\phi} := \frac{\rho(b - a)}{a(b - c)}.$$

Дальнейший анализ распадается на следующие подслучаи:

- (а) все положения равновесия (конечные или “бесконечные”) (S)-системы лежат справа от точки $(\hat{x}, \hat{\phi})$ (следовательно, они лежат в $\Gamma_{u=1}$) $\Leftrightarrow a(b - c) < (\nu + \rho)(a - c)$;
- (б) $(\hat{x}, \hat{\phi}) = (\bar{x}, \phi_0(\bar{x})) \Leftrightarrow a(b - c) = (\nu + \rho)(a - c)$;
- (в) $(\bar{x}, \phi_0(\bar{x})) \in \text{gr } \phi_0 \setminus \Gamma_{u=1}$ и $\text{gr } \phi_1 \cap \Gamma_{u=1} = \emptyset \Leftrightarrow a(b - c) > (\nu + \rho)(a - c)$, $\nu(a - c) > c(b - a)$, $b\rho + c\nu \geq \rho(\nu + \rho)$;
- (г) $(\bar{x}, \phi_0(\bar{x})) \in \text{gr } \phi_0 \setminus \Gamma_{u=1}$ и $\text{gr } \phi_1 \cap \Gamma_{u=1} \neq \emptyset \Leftrightarrow a(b - c) > (\nu + \rho)(a - c)$, $\nu(a - c) > c(b - a)$, $b\rho + c\nu < \rho(\nu + \rho)$;
- (д) $(\bar{x}_0, \bar{\phi}_0) = (p/q, \nu q/(p(\nu + b))) \in \partial\Gamma_0$ и $\text{gr } \phi_1 \cap \Gamma_{u=1} = \emptyset \Leftrightarrow \nu(a - c) \leq c(b - a)$, $b\rho + c\nu \geq \rho(\nu + \rho)$;
- (е) $(\bar{x}_0, \bar{\phi}_0) = (p/q, \nu q/(p(\nu + b))) \in \partial\Gamma_0$ и $\text{gr } \phi_1 \cap \Gamma_{u=1} \neq \emptyset \Leftrightarrow \nu(a - c) \leq c(b - a)$, $b\rho + c\nu < \rho(\nu + \rho)$,

где функция $\phi_1(\cdot)$ определена равенством (6.34).

Качественная картина поведения траекторий (S)-системы в каждом из перечисленных подслучаев показана на рис. 4 (подробный разбор каждого подслучая см. в [6]). Как и в случае II, через $(\hat{x}, \hat{\phi})$ обозначена точка пересечения

Рис. 4. Траектории (S)-системы в случае III ($\alpha = (\hat{x}, \hat{\phi})$, $\beta = (\hat{x}, \hat{\phi})$, $\gamma = (\bar{x}, \phi_0(\bar{x}))$). Ограниченные траектории исчерпываются положениями равновесия, заполняющими кривую $\phi = \nu/((\nu + \rho)x)$ в множестве $\Gamma_{u=1}$, и выделенными траекториями, лежащими в $\Gamma \setminus \Gamma_{u=1}$.

кривой $gr \phi_1$ с криволинейной границей множества $\Gamma_{u=1}$. Случаи (а), (б) аналогичны похожим ситуациям в случае II, а случаи (в), (д) – похожим ситуациям в случае I. Наибольшую трудность в случаях (г), (е) представляет доказательство того, что траектория, стремящаяся к положению равновесия $(\bar{x}, \phi_0(\bar{x}))$ или $(\bar{x}_0, \bar{\phi}_0)$, выходит в точности из $(\hat{x}, \hat{\phi})$.

Таким образом, для любых соотношений между параметрами задачи $(\tilde{P}_0)$ существует единственная ограниченная траектория $(x_*(\cdot), \phi_*(\cdot))$ (S)-системы, удовлетворяющая начальному условию $x(0) = x_0$. В силу теоремы 7 эта траектория определяет единственный оптимальный процесс $(x_*(\cdot), u_*(\cdot), v_*(\cdot))$ в задаче $(\tilde{P}_0)$.

Отметим, что траектория $(x_*(\cdot), \phi_*(\cdot))$ целиком лежит либо в множестве $\Gamma_{u=1}$, либо в $(\Gamma_0 \cup \{(\bar{x}, \phi_0(\bar{x}))\}) \setminus \Gamma_{u=1}$, либо в $(\Gamma_1 \cup \{(\bar{x}, \phi_0(\bar{x}))\}) \setminus \Gamma_{u=1}$. В каждом случае функция $x_*(\cdot)$ монотонно не возрастает или не убывает. Поэтому функции $\phi_*(\cdot)$, $u_*(\cdot)$ и $v_*(\cdot)$ могут быть рассмотрены как функции переменной x . Управление $v_*(t)$ равно 1 при $(x(t), \phi(t)) \in \Gamma_1 \setminus \Gamma_{u=1}$ и равно 0 при

$(x(t), \phi(t)) \in \Gamma_0 \setminus \Gamma_{u=1}$, а при $(x(t), \phi(t)) = (\bar{x}, \phi_0(\bar{x}))$ определяется условием

$$v_*(t) \equiv v_* = \frac{b\bar{x} - c}{b\bar{x} - c + a - a\bar{x}} = \frac{\nu(a - c) - c(b - a)}{(a - c)(b - a)}$$

нахождения траектории в стационарной точке $(\bar{x}, \phi_0(\bar{x}))$. Если $(x(t), \phi(t)) \in \Gamma_{u=1}$, управление $v_*(t)$ не участвует в процессе управления (оно может быть определено любым допустимым образом).

Управление $u_*(t)$ равно 1 при $(x(t), \phi(t)) \in \Gamma_{u=1}$ и определяется условиями (6.28), (6.29) при $(x(t), \phi(t)) \in \Gamma \setminus \Gamma_{u=1}$. К сожалению, явный вид оптимального синтеза $u_*(x)$ вряд ли может быть найден, поэтому приведем одно из наиболее важных свойств этой функции.

ЛЕММА 7 [6]. *Функция $u_*(\cdot)$ является неубывающей функцией x на G и возрастающей функцией при всех x таких, что $u_*(x) < 1$.*

Суммируем описание оптимального синтеза в задаче $(\tilde{P}_0)$.

ТЕОРЕМА 8. *Оптимальный синтез $u_*(\cdot)$, $v_*(\cdot)$ в задаче $(\tilde{P}_0)$ для $x \in G$ определяется следующим образом:*

$$u_*(x) = \begin{cases} u_1(x) & \text{при } x < \min\{\bar{x}, \hat{x}\}, \\ u_* & \text{при } x = \bar{x} < \hat{x}, \\ u_0(x) & \text{при } \bar{x} < x < \hat{x}, \\ 1 & \text{при } x \geq \hat{x}, \end{cases} \quad v_*(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x < \min\{\bar{x}, \hat{x}\}, \\ v_* & \text{при } x = \bar{x} < \hat{x}, \\ 0 & \text{при } \bar{x} < x < \hat{x} \end{cases}$$

($v_*(x)$ не участвует в управлении при $x \geq \hat{x}$ и в этом случае может быть определено произвольным образом), где

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \begin{cases} \frac{\nu(a - c)^2}{(b - a)[a(b - c) - \nu(a - c)]}, & \text{если } (b - a)[a(b - c) - \nu(a - c)] > 0, \\ +\infty, & \text{если } (b - a)[a(b - c) - \nu(a - c)] \leq 0, \end{cases} \\ \hat{x} &= \begin{cases} \max\left\{\frac{\nu a}{\rho(\nu + \rho - a)}, \frac{\nu c}{\rho(\nu + \rho - b)}\right\}, & \text{если } \nu + \rho > \max\{a, b\}, \\ +\infty, & \text{если } \nu + \rho \leq \max\{a, b\}, \end{cases} \\ u_* &= \frac{\rho(a - c)}{a(b - c) - \nu(a - c)}, \quad v_* = \frac{\nu(a - c) - c(b - a)}{(a - c)(b - a)} \quad \text{при } \bar{x} \in G, \\ u_0(x) &= \frac{\rho}{b + (c - bx)\phi}, \quad u_1(x) = \frac{\rho}{a + a(1 - x)\phi} \quad \text{при } x \in G, \quad x < \hat{x}, \end{aligned}$$

где ϕ – ордината точки (x, ϕ) , лежащей на описанной выше единственной ограниченной траектории (S)-системы.

Если $\bar{x} \in G$ и $x, \bar{x} < \hat{x}$, то $u_0(x)$ и $u_1(x)$ могут быть найдены как решения следующих задач Коши:

$$\begin{aligned} \frac{du_0(x)}{dx} &= \frac{u_0(x)(\nu + \rho)(bu_0(x) - \rho) - \nu b(u_0(x))^2 + \nu c(u_0(x))^2 x^{-1}}{\rho(1 - u_0(x))(c - bx)}, \quad u_0(\bar{x}) = u_*, \\ \frac{du_1(x)}{dx} &= \frac{u_1(x)(\nu + \rho)(au_1(x) - \rho) - \nu a(u_1(x))^2 + \nu a(u_1(x))^2 x^{-1}}{\rho(1 - u_1(x))a(1 - x)}, \quad u_1(\bar{x}) = u_*. \end{aligned}$$

Заметим, что теорема 8 сформулирована в терминах переменной $x(\cdot)$, имеющих в каждый момент $t \geq 0$ своими значениями $x(t)$ отношения “виртуального” национального дохода $Y_p(t) = A_1 K_1(t) + p A_2 K_2(t)$ (который рассматриваемая экономика получила бы в момент t , если бы кризис произошел именно в этот момент времени) к “реальному” доходу $Y_q(t) = A_1 K_1(t) + q A_2 K_2(t)$ (который экономика получает в каждый момент t до наступления кризиса):

$$x(t) = \frac{A_1 K_1(t) + p A_2 K_2(t)}{A_1 K_1(t) + q A_2 K_2(t)}.$$

Однако теорема 8 может быть переформулирована и в стандартных экономических терминах отношения величин производственного капитала, имеющегося в первом и втором секторах экономики. Действительно, рассмотрим переменную x как функцию отношения $y = K_1/K_2$:

$$x = \frac{A_1 K_1 + p A_2 K_2}{A_1 K_1 + q A_2 K_2} = \frac{A_1 y + p A_2}{A_1 y + q A_2}, \quad y \in (0, \infty).$$

Так как $p < q$, это монотонно возрастающая функция переменной $y \in (0, \infty)$. Следовательно, существует обратная функция

$$y = \frac{A_2}{A_1} \frac{qx - p}{1 - x}, \quad x \in \left(\frac{p}{q}, 1 \right),$$

которая в свою очередь является монотонно возрастающей функцией переменной $x \in (p/q, 1)$.

В заключение заметим, что в случае $\nu + \rho > \max\{b_1 A_1, q b_2 A_2\}$ в силу теоремы 8 (см. определения параметров a , b и выражение для $\hat{x}$ в формулировке теоремы 8) может случиться, что для некоторых начальных состояний x_0 (т. е. для некоторых отношений $y_0 = K_{10}/K_{20}$ величин начального капитала) оптимальная политика инвестирования нулевая: она заключается в полном потреблении всего произведенного продукта (см. рис. 3 и 4). Если такое происходит, то оптимальное отношение величин капитала $y_*(t) = K_1^*(t)/K_2^*(t)$, $t \geq 0$, остается постоянным, хотя в силу амортизации в абсолютном выражении производственные мощности в обоих секторах экспоненциально падают.

В противоположном случае, когда $\nu + \rho \leq \max\{b_1 A_1, q b_2 A_2\}$, оптимальная инвестиционная стратегия ненулевая по крайней мере в одном из экономических секторов (см. формулировку теоремы 8). Качественно эта оптимальная стратегия инвестирования аналогична стратегии, описанной в [5] в случае фиксированной доли $u \equiv \text{const} > 0$ национального дохода, направляемой на потребление (см. рис. 2).

Отметим, что экономический смысл условия $\nu + \rho > \max\{b_1 A_1, q b_2 A_2\}$ очевиден, поскольку величины $b_1 A_1$ и $q b_2 A_2$ суть нормы доходности капитала в первом и втором секторах (до наступления кризиса).

7. Экономическая интерпретация принципа максимума

Впервые экономическая интерпретация соотношений принципа максимума была дана Р. Дорфманом в 60-х годах прошлого века (см. [28]). Данная интерпретация основана на отождествлении значений $V(\xi, T)$ функции оптимального

значения $V(\cdot, \cdot)$ (см. (1.10)) в задаче (1.7)–(1.9) с текущей *внутренней стоимостью*⁶ (net value) вектора производственного капитала $\xi \in G$ в момент $T \geq 0$ и на использовании известной связи между принципом максимума Понтрягина [44] и методом динамического программирования Беллмана [19]. Напомним (см. раздел 1), что в задаче (1.7)–(1.9) функция оптимального значения $V(\cdot, \cdot)$ инвариантна по времени, т. е. $V(\xi, T) \equiv V(\xi)$, $\xi \in G$, $T \geq 0$.

Известно, что в предположении дважды непрерывной дифференцируемости функции $V(\cdot)$ соотношения принципа максимума (3.40)–(3.42) в нормальной форме (при $\psi^0 = 1$) для задачи (P) (см. (2.1)–(2.3)) могут быть получены посредством метода динамического программирования (см., например, [10; разд. 5]). При этом сопряженная переменная $\psi(\cdot)$, соответствующая оптимальной допустимой паре $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ в задаче (P), определяется равенством

$$\psi(t) = e^{-\rho t} \frac{\partial V(x_*(t))}{\partial x}, \quad t \geq 0. \quad (7.1)$$

Соотношение (7.1) позволяет придать содержательный смысл координатам сопряженной переменной $\psi(t)$ как *переходным* (marginal) или, как их еще называют, *невидимым* (shadow) ценам видов производственного капитала, соответствующих координатам вектора $x_*(t)$.⁷

Действительно, при увеличении вектора капитала $x_*(t)$ в момент $t \geq 0$ на малый положительный вектор Δx прирост его текущей внутренней стоимости (с точностью до величины более высокого порядка малости по $\|\Delta x\|$) составляет

$$V(x_*(t) + \Delta x) - V(x_*(t)) \approx \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(x_*(t))}{\partial x^i} \Delta x^i.$$

Поэтому координаты вектора

$$\phi(t) = \frac{\partial V(x_*(t))}{\partial x}, \quad t \geq 0, \quad (7.2)$$

имеют смысл *текущих* (current value) переходных цен для видов капитала, соответствующих координатам вектора $x_*(t)$. Отсюда вытекает (см. (7.1) и (7.2)), что значения координат сопряженной переменной (см. (3.47))

$$\psi(t) = e^{-\rho t} \phi(t), \quad t \geq 0, \quad (7.3)$$

суть *приведенные* переходные цены (или просто переходные цены) координат вектора капитала $x_*(t)$, т. е. переходные цены, но пересчитанные на момент времени 0 (взятые с учетом дисконтирования).

⁶В отличие от “рыночной” стоимости, т. е. его стоимости на соответствующем реальном рынке производственного капитала, внутренняя стоимость $V(\xi, T)$ вектора $\xi \in G$ есть величина виртуальная: она равна гипотетической суммарной дисконтированной прибыли, которая может быть получена на интервале $[T, \infty)$ исходя из вектора капитала ξ в момент T , если процесс управления этим капиталом будет организован оптимальным образом.

⁷В русскоязычной экономической литературе часто используется термин “маргинальные” (или “теневые”) цены. Нам представляется такая терминология не вполне удачной: будучи калькой с английского, она не отражает сути этого фундаментального в экономике понятия.

Таким образом, подход Р. Дорфмана, основанный на использовании метода динамического программирования, позволяет придать сопряженной переменной $\psi(\cdot)$ содержательный экономический смысл и тем самым дать экономическую интерпретацию соотношениям принципа максимума (подробнее см., например, [10; разд. 5], [1; гл. 7] и [25; гл. 8]). Заметим, что данный подход предполагает существование некоторого воображаемого центрального планирующего органа, целенаправленно осуществляющего оптимальное в смысле задачи (P) управление производственным капиталом на всем интервале $[0, \infty)$.

Однако соотношения принципа максимума Понтрягина для задачи (P) могут быть “получены” и из чисто экономических соображений, например исходя из идей популярной в последнее десятилетие “поведенческой экономической теории” (см. [18]), объясняющей различные экономические явления “локальными” текущими действиями экономических агентов. Ниже мы рассмотрим такой вывод соотношений принципа максимума в случае абстрактного развивающегося предприятия (конкретный пример модели этого типа см. в [11; разд. 4]). Изложение будет вестись на “экономическом” уровне строгости.

Представим себе некоторое развивающееся предприятие, горизонт существования которого неопределен (руководство предприятия не рассматривает возможности закрытия производства). Эту неопределенность отразим в предположении, что предприятие функционирует бесконечно долго, т. е. на временном интервале $[0, \infty)$.

Для простоты производственный капитал будем считать однородным, а его размер в момент времени $t \geq 0$ будем обозначать через $x(t)$; иначе говоря, $x(t)$ – это количество единиц оборудования, используемое на предприятии в момент $t \geq 0$ для производства продукции. Пренебрегая дискретным характером величины $x(t)$, будем считать ее действительным положительным числом: $x(t) \in G$, $G = (0, \infty)$, $t \geq 0$. Пусть $x_0 \in G$ – заданный начальный размер производственного капитала:

$$x(0) = x_0. \quad (7.4)$$

Обозначим через $u(t)$ числовое значение *управляющего решения*, принимаемого руководством предприятия в момент $t \geq 0$. Для определенности будем считать, что величина $u(t)$ есть размер текущих инвестиций в развитие предприятия. Руководство предприятия выбирает управляющее решение $u(t)$ в пределах некоторого множества допустимых значений управления $U \subset \mathbb{R}$.

Предположим, что скорость приращения производственного капитала в момент $t \geq 0$ однозначно определяется его текущим размером $x(t)$ и управленческим решением $u(t)$ в этот момент:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad u(t) \in U, \quad (7.5)$$

где $f: G \times U \rightarrow \mathbb{R}$ – заданная функция двух переменных.

Наконец, предположим, что в качестве своей долгосрочной цели руководство предприятия определило максимизацию суммарной прибыли предприятия за все время его существования. Прибыль будет исчисляться с учетом инфляции в денежном выражении и извлекаться за счет продаж производимой продукции на рынке. Продажи, как и производство продукции, будут происходить

в каждый момент времени $t \geq 0$. Пусть $g(x(t), u(t))$ – скорость прироста прибыли в момент $t \geq 0$ при условии, что в этот момент размер производственного капитала равен $x(t)$ и принято управленческое решение $u(t)$. Иначе говоря, $g(x(t), u(t))$ – это размер прибыли, которую можно получить в единицу времени, следующую за моментом t , при неизменных значениях $x(t)$ и $u(t)$. Будем считать функцию $g: G \times U \rightarrow \mathbb{R}$ заранее заданной.

Тогда интегральное представление для суммарной прибыли предприятия с учетом инфляции на интервале $[0, \infty)$ при сценарии $u(\cdot)$ управленческих решений и отвечающей ему траектории $x(\cdot)$ роста производственного капитала определяется значением

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_0^\infty e^{-\rho t} g(x(t), u(t)) dt. \quad (7.6)$$

Здесь $\rho > 0$ – величина инфляции (т. е. удельная скорость обесценивания используемой денежной единицы).

Объединяя соотношения (7.4)–(7.6), получаем в качестве модели оптимального управления производственным капиталом нашего абстрактного предприятия задачу оптимального управления вида (P).

Итак, в начальный момент времени руководство предприятия декларировало в качестве своей стратегической цели максимизацию всей суммарной дисконтированной прибыли $J(x(\cdot), u(\cdot))$. По сути дела эта декларация, как уже отмечено, означает не что иное, как установку на решение описанной выше задачи оптимального управления вида (P). Однако, помня в общих чертах о стратегической установке, руководство предприятия обычно не следует ей в своих практических действиях. Текущее управление, как правило, осуществляется “локально”, с оглядкой на складывающуюся обстановку. Предположим, что руководство предприятия при выработке текущих управленческих решений решило придерживаться правила, которое интуитивно кажется самым практичным и надежным – правила максимизации скорости прироста текущего совокупного денежного капитала.

Рассмотрим это правило более внимательно. Пусть в текущий момент $t \geq 0$ предприятие имеет производственный капитал $x_*(t)$. Предстоит выбрать текущее управленческое решение $u_*(t)$. Возьмем какое-нибудь (пока произвольное) управленческое решение $u(t) \in U$. Оценим соответствующий ему прирост текущего совокупного денежного капитала предприятия на малом интервале $[t, t + \Delta t]$, $\Delta t > 0$. Этот прирост складывается из двух величин – денежной прибыли от продаж и прироста стоимости производственного капитала. Размер денежной прибыли на интервале $[t, t + \Delta t]$ (в текущих ценах) оценим как $g(x_*(t), u(t))\Delta t$ (здесь и далее мы пренебрегаем величинами более высокого порядка малости по Δt). Прирост производственного капитала за это время в единицах оборудования равен $\dot{x}_*(t)\Delta t$. Если $\phi(t)$ – текущая цена оборудования, то текущая денежная стоимость прироста производственного капитала за время от t до $t + \Delta t$ равна $\phi(t)\dot{x}_*(t)\Delta t$. Таким образом, прирост текущего совокупного денежного капитала предприятия на интервале $[t, t + \Delta t]$ есть $\phi(t)\dot{x}_*(t)\Delta t + g(x_*(t), u(t))\Delta t$. Деля на $\Delta t > 0$ и устремляя Δt к нулю, находим мгновенную скорость прироста текущего совокупного денежного капитала

предприятия в момент t :

$$\mathcal{M}(x_*(t), u(t), \phi(t)) = f(x_*(t), u(t))\phi(t) + g(x_*(t), u(t)). \quad (7.7)$$

В экономических приложениях теории оптимального управления последнее выражение возникает в связи с задачей оптимального управления (P). Величину $\mathcal{M}(\cdot, \cdot, \cdot)$ рассматривают как функцию от переменных $x > 0$, $u \in U$ и $\phi \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{M}(x, u, \phi) = f(x, u)\phi + g(x, u)$$

и называют текущей функцией Гамильтона–Понтрягина (см. (3.48)), а функцию $M(\cdot, \cdot)$ переменных $x > 0$ и $\phi \in \mathbb{R}$, определенную равенством

$$M(x, \phi) = \sup_{u \in U} \{f(x, u)\phi + g(x, u)\},$$

называют текущим гамильтонианом рассматриваемой задачи (см. (3.49)).

Выбирая различные $u \in U$, будем получать разные значения $\mathcal{M}(x_*(t), u, \phi(t))$ (см. (7.7)). Руководствуясь правилом максимизации скорости прироста текущего совокупного денежного капитала, будем выбирать в каждый момент $t \geq 0$ то управленческое решение $u_*(t) \in U$, при котором величина $\mathcal{M}(x_*(t), u_*(t), \phi(t))$ текущей скорости прироста совокупного денежного капитала максимальна:

$$\mathcal{M}(x_*(t), u_*(t), \phi(t)) = \max_{u \in U} \mathcal{M}(x_*(t), u, \phi(t)). \quad (7.8)$$

Для того чтобы найти это управленческое решение из условия (7.8), нужно знать текущую цену $\phi(t)$ оборудования (см. (7.7)). Заметим, что это не та цена, по которой оборудование можно приобрести на реальном рынке оборудования. Цена $\phi(t)$ отражает, скорее, “внутреннюю” стоимость единицы оборудования – его ценность с точки зрения руководства предприятия. По этой цене руководство предприятия оценивает эффективность работы производственного капитала, его способность приносить прибыль. Данный факт отражен в таком названии цены $\phi(t)$, как текущая невидимая (или переходная, см. (7.2)) цена. Расчет этой цены – неочевидная задача. Конечно, руководство предприятия может определить текущую невидимую цену приблизительно, эмпирически, руководствуясь теми или иными здравыми соображениями, что вполне допустимо в рамках рабочей практики, если дело не доходит до продажи предприятия. Мы, однако, пойдем дальше и рассмотрим способ расчета текущей невидимой цены.

В расчете будем учитывать текущую покупательную способность используемой денежной единицы. Напомним, что в силу инфляции в начальный момент 0 покупательная способность денежной единицы в $e^{\rho t}$ раз выше, чем в любой другой момент $t > 0$. Поэтому текущая невидимая цена, значение которой в момент t есть $\phi(t)$, при пересчете ее в цены на момент 0 имеет в $e^{\rho t}$ раз меньшую величину. Обозначая последнее значение через $\psi(t)$, запишем $\psi(t) = e^{-\rho t}\phi(t)$, $t \geq 0$.

Величину $\psi(t)$ будем называть приведенной невидимой ценой или просто невидимой ценой капитала в момент t . Умножая текущую мгновенную скорость $\mathcal{M}(x_*(t), u_*(t), \phi(t))$ (см. (7.7)) прироста совокупного денежного капитала

в момент $t \geq 0$ на $e^{-\rho t}$, пересчитаем ее в ценах начального момента 0:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(x_*(t), t, u_*(t), \phi(t)) &= e^{-\rho t} \mathcal{M}(x_*(t), u_*(t), \phi(t)) \\ &= f(x_*(t), u_*(t))\psi(t) + e^{-\rho t} g(x_*(t), u_*(t)).\end{aligned}\quad (7.9)$$

В теории оптимального управления функция $\mathcal{H}: G \times [0, \infty) \times U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathcal{H}(x, t, u, \psi) = e^{-\rho t} \mathcal{M}(x, u, \psi) = f(x, u)\psi + e^{-\rho t} g(x, u),$$

представляет собой нормальную форму ($\psi^0 = 1$) функции Гамильтона–Понтрягина (см. (3.36)), а функция $H: G \times [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, определяемая равенством

$$H(x, t, \psi) = e^{-\rho t} M(x, \psi) = \sup_{u \in U} \mathcal{H}(x, t, u, \psi),$$

является стандартным гамильтонианом рассматриваемой задачи в нормальной форме (см. (3.37)). Величина $\psi \in \mathbb{R}$ (см. (7.3)) выступает как сопряженная переменная.

Правило (7.8) выбора управленческого решения $u_*(t)$ в момент $t \geq 0$ перепишем в эквивалентной форме:

$$\mathcal{H}(x_*(t), t, u_*(t), \psi(t)) = \max_{u \in U} \mathcal{H}(x_*(t), t, u, \psi(t)). \quad (7.10)$$

В теории оптимального управления данное условие хорошо известно как условие максимума – центральное соотношение принципа максимума Понтрягина (см. (3.41)).

Будем предполагать, что значение $u_*(t)$, решающее максимизационную задачу (7.10) в момент $t \geq 0$, не принадлежит границе множества допустимых значений управленческих решений U (заметим, что граничные, “аварийные” решения в общем не характерны для экономических задач). Тогда в точке $u_*(t)$ производная по u максимизируемой в (7.10) функции $\mathcal{H}(x_*(t), t, \cdot, \psi(t))$ обращается в нуль:

$$\frac{\partial f(x_*(t), u_*(t))}{\partial u} \psi(t) + e^{-\rho t} \frac{\partial g(x_*(t), u_*(t))}{\partial u} = 0. \quad (7.11)$$

Рассмотрим совокупный денежный капитал предприятия (выраженный в ценах на начальный момент времени 0) как функцию времени $C(\cdot)$ на интервале $[0, \infty)$. Как говорилось выше (см. (7.9)), мгновенная скорость прироста совокупного денежного капитала в момент $t \geq 0$ есть $\mathcal{H}(x_*(t), t, u_*(t), \psi(t))$:

$$\dot{C}(t) = \mathcal{H}(x_*(t), t, u_*(t), \psi(t)). \quad (7.12)$$

Теперь посмотрим на величину $\dot{C}(t)$ с другой стороны. Рассмотрим будущую по отношению к моменту $t \geq 0$ суммарную прибыль предприятия $V(x_*(t))$ в ценах на этот момент t . В силу (1.10) справедливо следующее выражение для этой прибыли на момент $t \geq 0$:

$$V(x_*(t)) = \int_t^\infty e^{-\rho(s-t)} g(x_*(s), u_*(s)) ds. \quad (7.13)$$

Заметим, что в интеграле в правой части равенства (7.13) стоит будущий сценарий управленческих решений $u_*(\cdot)$ и отвечающая ему будущая траектория роста производственного капитала $x_*(\cdot)$ на интервале $[t, \infty)$. Предположим, что нам каким-то образом удалось одномоментно (в момент t) конвертировать предприятие в эту будущую прибыль – лишиться предприятия (“израсходовать” его) и взамен получить всю будущую прибыль $V(x_*(t))$. Допустим, что полученную сумму $V(x_*(t))$ можно поместить на банковский депозит и в последующем получать прибыль в качестве процента от вклада по установленной ставке.

Идеализируя ситуацию, примем, что банковская ставка соответствует величине инфляции ρ : в единицу времени банк выплачивает клиенту долю ρ от вложенной суммы. Тогда в момент $t \geq 0$ мгновенная скорость прироста прибыли от вложенной суммы $V(x_*(t))$ составит $\rho V(x_*(t))$. Естественно предположить, что в случае оптимального сценария управленческих решений $u_*(\cdot)$ скорость $\rho V(x_*(t))$ прироста нашей (виртуальной) прибыли от (виртуального) размещения всей будущей прибыли на банковский депозит в каждый момент $t \geq 0$ не отличается от скорости $\dot{C}(t)$ прироста (реального) совокупного денежного капитала, получаемого в процессе производства и продаж. В этом случае, пересчитав сумму $V(x_*(t))$ в цены на момент 0, получаем следующую характеристику “правильного” сценария управленческих решений:

$$\dot{C}(t) = \rho e^{-\rho t} V(x_*(t)), \quad t \geq 0.$$

Обращаясь к (7.12), перепишем это равенство в виде

$$\mathcal{H}(x_*(t), t, u_*(t), \psi(t)) = \rho e^{-\rho t} V(x_*(t)), \quad t \geq 0. \quad (7.14)$$

В силу (7.13) полученное соотношение (7.14) есть в точности условие стационарности (3.42) (при $\psi^0 = 1$).

Будем считать, что реализуемый нами сценарий $u_*(\cdot)$ управленческих решений “правильный”, так что равенство (7.14) выполнено в каждый момент $t \geq 0$. Отсюда извлечем две важные характеристики невидимых цен $\psi(t)$, $t \geq 0$.

Первая характеристика связана с асимптотическим поведением величины $\psi(t)$ при $t \rightarrow \infty$. В силу (7.13) и (7.14) имеем $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{H}(x_*(t), t, u_*(t), \psi(t)) = 0$, откуда в силу (7.9) вытекает равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [f(x_*(t), u_*(t))\psi(t) + e^{-\rho t} g(x_*(t), u_*(t))] = 0. \quad (7.15)$$

Считая, что функция $g(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ ограничена, получаем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\rho t} g(x_*(t), u_*(t)) = 0.$$

Поэтому из условия (7.15) вытекает равенство $\lim_{t \rightarrow \infty} f(x_*(t), u_*(t))\psi(t) = 0$. Отсюда, полагая, что функция $f(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ принимает значения в области, отделенной от нуля, заключаем, что выполняется первый из двух “стандартных” вариантов условия трансверсальности на бесконечности (см. (1.16)):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = 0. \quad (7.16)$$

Экономический смысл этого условия состоит в том, что в оптимальном режиме исходная “ценность” единицы капитала полностью исчерпывается на бесконечности.

Заметим, что альтернативный вариант условия трансверсальности на бесконечности (см. (1.17))

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_*(t)\psi(t) = 0 \quad (7.17)$$

также может быть получен простыми “экономическими” рассуждениями, если предположить, что при всех достаточно больших значениях $t > 0$ единица производственного капитала не может быть “переоценена” (подробнее см. [10; разд. 5]).

Вторая характеристика невидимых цен, извлекаемая из (7.14), – их динамика. Продифференцируем тождество (7.14) по времени:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H}(x_*(t), t, u_*(t), \psi(t)) = \rho \frac{d}{dt} [e^{-\rho t} V(x_*(t))], \quad t > 0. \quad (7.18)$$

Вычислим производные в обеих частях этого равенства. Для левой части в силу (7.9) имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{H}(x_*(t), t, u_*(t), \psi(t)) &= \frac{\partial f(x_*(t), u_*(t))}{\partial x} \dot{x}_*(t)\psi(t) + \frac{\partial f(x_*(t), u_*(t))}{\partial u} \dot{u}_*(t)\psi(t) \\ &+ f(x_*(t), u_*(t))\dot{\psi}(t) - \rho e^{-\rho t} g(x_*(t), u_*(t)) \\ &+ e^{-\rho t} \frac{\partial g(x_*(t), u_*(t))}{\partial x} \dot{x}_*(t) + e^{-\rho t} \frac{\partial g(x_*(t), u_*(t))}{\partial u} \dot{u}_*(t). \end{aligned}$$

Отсюда в силу (7.5) и (7.11) получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{H}(x_*(t), t, u_*(t), \psi(t)) &= \frac{\partial f(x_*(t), u_*(t))}{\partial x} \dot{x}_*(t)\psi(t) + \dot{x}_*(t)\dot{\psi}(t) \\ &+ e^{-\rho t} \frac{\partial g(x_*(t), u_*(t))}{\partial x} \dot{x}_*(t) - \rho e^{-\rho t} g(x_*(t), u_*(t)). \end{aligned} \quad (7.19)$$

В силу (7.13) дифференцирование правой части (7.18) дает

$$\rho \frac{d}{dt} [e^{-\rho t} V(x_*(t))] = -\rho e^{-\rho t} g(x_*(t), u_*(t)). \quad (7.20)$$

Приравняв теперь на основании (7.18) правые части (7.19) и (7.20), получаем

$$\dot{x}_*(t)\dot{\psi}(t) + \frac{\partial f(x_*(t), u_*(t))}{\partial x} \dot{x}_*(t)\psi(t) + e^{-\rho t} \frac{\partial g(x_*(t), u_*(t))}{\partial x} \dot{x}_*(t) = 0, \quad t \geq 0.$$

Отсюда при $\dot{x}_*(t) = f(x_*(t), u_*(t)) \neq 0$ для любого $t \geq 0$ вытекает равенство

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial f(x_*(t), u_*(t))}{\partial x} \psi(t) - e^{-\rho t} \frac{\partial g(x_*(t), u_*(t))}{\partial x}. \quad (7.21)$$

Последнее соотношение выполняется для всех $t \geq 0$ и, таким образом, представляет собой дифференциальное уравнение для невидимой цены (описывает динамику невидимой цены). В терминологии оптимального управления (7.21) –

сопряженная система в нормальной форме для рассматриваемой задачи (см. (3.40)).

Из сделанного анализа вытекает, что для окончательного вычисления функции невидимой цены $\psi(\cdot)$ и “правильного” управленческого решения $u_*(\cdot)$ следует решить так называемую *краевую задачу принципа максимума* – систему дифференциальных уравнений (7.5), (7.21), соединенных условием максимума (7.10), при краевых условиях (7.4) и (7.16) (или (7.17)) (подробнее об этой краевой задаче см., например, [10; разд. 4]).

Таким образом, путем экономически “правдоподобных” рассуждений мы вывели набор условий, характеризующих “правильные” $\equiv$ оптимальные управленческие решения и соответствующие им невидимые цены: сопряженное уравнение (7.21), условие максимума (7.10) и условие трансверсальности (7.16) (или (7.17)).

Суммируем сказанное: наши управленческие решения $u_*(t)$, $t \geq 0$, основанные на идее максимизации скорости прироста текущего совокупного денежного капитала, будут “правильны” в обозначенном выше эмпирическом смысле (он отражен в равенстве (7.14)) лишь тогда, когда эти управленческие решения вместе с соответствующими им невидимыми ценами $\psi(t)$ подчиняются условиям принципа максимума Понтрягина.

Список литературы

- [1] D. Acemoglu, *Introduction to modern economic growth*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2009, xviii+990 pp.
- [2] P. Aghion, P. Howitt, *Endogenous growth theory*, MIT Press, Cambridge, MA, 1998, 708 pp.
- [3] K. J. Arrow, “Applications of control theory to economic growth”, *Mathematics of the Decision Sciences*, Part 2, Lectures Appl. Math., **12**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1968, 85–119.
- [4] K. J. Arrow, M. Kurz, *Public investment, the rate of return, and optimal fiscal policy*, Johns Hopkins Press, Baltimore, MD, 1970, 218 pp.
- [5] S. Aseev, K. Besov, S.-E. Ollus, T. Palokangas, “Optimal economic growth with a random environmental shock”, *Dynamic systems, economic growth, and the environment*, Dyn. Model. Econom. Econ. Finance, **12**, eds. J. C. Cuaresma, T. Palokangas, A. Tarasyev, Springer, Berlin, 2010, 109–137.
- [6] S. Aseev, K. Besov, S.-E. Ollus, T. Palokangas, “Optimal growth in a two-sector economy facing an expected random shock”, *Труды ИММ УрО РАН*, **17:2** (2011), 271–299.
- [7] S. Aseev, G. Hutschenreiter, A. Kryazhinskii, *A dynamic model of optimal allocation of resources to R&D*, IIASA Interim Report IR-02-016, Laxenburg, Austria, 2002, 45 pp., <http://www.iiasa.ac.at/Admin/PUB/Documents/IR-02-016.pdf>.
- [8] S. M. Aseev, A. V. Kryazhinskiy, “The Pontryagin maximum principle and transversality conditions for a class of optimal control problems with infinite time horizons”, *SIAM J. Control Optim.*, **43:3** (2004), 1094–1119.
- [9] С. М. Асеев, А. В. Кряжковский, “Принцип максимума Понтрягина для задачи оптимального управления с функционалом, заданным несобственным интегралом”, *Докл. РАН*, **394:5** (2004), 583–585; англ. пер.: S. M. Aseev, A. V. Kryazhinskii, “The Pontryagin maximum principle for an optimal control problem with a functional specified by an improper integral”, *Dokl. Math.*, **69:1** (2004), 89–91.

- [10] С. М. Асеев, А. В. Кряжковский, “Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста”, Тр. МИАН, **257**, Наука, М., 2007, 3–271; англ. пер.: S. M. Aseev, A. V. Kryazhinskii, “The Pontryagin maximum principle and problems of optimal economic growth”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **257** (2007), 1–255.
- [11] С. М. Асеев, А. В. Кряжковский, “Об одном классе задач оптимального управления, возникающих в математической экономике”, *Оптимальное управление, Сборник статей. К 60-летию со дня рождения профессора Виктора Ивановича Благодатских*, Тр. МИАН, **262**, МАИК, М., 2008, 16–31; англ. пер.: S. M. Aseev, A. V. Kryazhinskii, “On a class of optimal control problems arising in mathematical economics”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **262** (2008), 10–25.
- [12] S. Aseev, A. Kryazhinskii, A. Tarasyev, *First order necessary optimality conditions for a class of infinite horizon optimal control problems*, IIASA Interim Report IR-01-007, Laxenburg, Austria, 2001, 17 pp., <http://www.iiasa.ac.at/Admin/PUB/Documents/IR-01-007.pdf>.
- [13] С. М. Асеев, А. В. Кряжковский, А. М. Тарасьев, “Принцип максимума Понтрягина и условия трансверсальности для одной задачи оптимального управления на бесконечном интервале”, *Дифференциальные уравнения. Некоторые математические задачи оптимального управления*, Сборник статей, Тр. МИАН, **233**, Наука, М., 2001, 71–88; англ. пер.: S. M. Aseev, A. V. Kryazhinskij, A. M. Tarasyev, “The Pontryagin maximum principle and transversality conditions for an optimal control problem with infinite time interval”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **233** (2001), 64–80.
- [14] S. M. Aseev, V. M. Veliov, “Maximum principle for infinite-horizon optimal control problems with dominating discount”, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Ser. B: Applications & Algorithms*, **19** (2012), 43–63; Research Report 2011-06, ORCOS, Institute of Mathematical Methods in Economics, Vienna University of Technology, 2011, 21 pp., http://orcos.tuwien.ac.at/fileadmin/t/orcos/Research_Reports/2011-06.pdf.
- [15] J. P. Aubin, F. H. Clarke, “Shadow prices and duality for a class of optimal control problems”, *SIAM J. Control Optim.*, **17**:5 (1979), 567–586.
- [16] E. J. Balder, “An existence result for optimal economic growth problems”, *J. Math. Anal. Appl.*, **95**:1 (1983), 195–213.
- [17] Р. Дж. Барро, Х. Сала-и-Мартин, *Экономический рост*, Бином. Лаборатория знаний, М., 2010, 824 с.; 1-е англ. изд.: R. J. Barro, X. Sala-i-Martin, *Economic growth*, New York, McGraw-Hill, 1995, 539 pp.
- [18] *Behavioral economics and its applications*, eds. P. Diamond, H. Vartiainen, Princeton Univ. Press, Oxford, 2007, xvi+312 pp.
- [19] Р. Беллман, *Динамическое программирование*, ИЛ, М., 1960, 400 с.; пер. с англ.: R. Bellman, *Dynamic programming*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1957, xxv+342 pp.
- [20] L. M. Benveniste, J. A. Scheinkman, “Duality theory for dynamic optimization models of economics: the continuous time case”, *J. Econom. Theory*, **27**:1 (1982), 1–19.
- [21] В. И. Благодатских, А. Ф. Филиппов, “Дифференциальные включения и оптимальное управление”, *Топология, обыкновенные дифференциальные уравнения, динамические системы*, Сборник обзорных статей. 2. К 50-летию института, Тр. МИАН СССР, **169**, 1985, 194–252; англ. пер.: V. I. Blagodatskikh, A. F. Filippov, “Differential inclusions and optimal control”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **169** (1986), 199–259.
- [22] D. A. Carlson, A. B. Haurie, A. Leizarowitz, *Infinite horizon optimal control. Deterministic and stochastic systems*, Springer-Verlag, Berlin, 1991, xvi+332 pp.

- [23] D. Cass, "Optimum growth in an aggregative model of capital accumulation", *Rev. Econ. Stud.*, **32**:3 (1965), 233–240.
- [24] L. Cesari, *Optimization – theory and applications. Problems with ordinary differential equations*, Appl. Math. (N. Y.), **17**, Springer-Verlag, New York, 1983, xiv+542 pp.
- [25] A. C. Chiang, *Elements of dynamic optimization*, McGraw-Hill, Singapore, 1992, 327 pp.
- [26] Б. П. Демидович, *Лекции по математической теории устойчивости*, Наука, М., 1967, 472 с.
- [27] А. В. Дмитриук, Н. В. Кузькина, "Теорема существования оптимального управления на бесконечном интервале времени", *Матем. заметки*, **78**:4 (2005), 503–518; "Письмо в редакцию", *Матем. заметки*, **80**:2 (2006), 320; англ. пер.: A. V. Dmitruk, N. V. Kuz'kina, "Existence theorem in the optimal control problem on an infinite time interval", *Math. Notes*, **78**:4 (2005), 466–480.
- [28] R. Dorfman, "An economic interpretation of optimal control theory", *Amer. Econ. Rev.*, **59** (1969), 817–831.
- [29] I. Ekeland, "Some variational problems arising from mathematical economics", *Mathematical economics* (Montecatini Terme, 1986), Lectures Notes in Math., **1330**, Springer, Berlin, 1988, 1–18.
- [30] А. Ф. Филиппов, "О некоторых вопросах теории оптимального регулирования", *Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., мех., астрон., физ., хим.*, 1959, № 2, 25–32.
- [31] А. Ф. Филиппов, *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью*, Наука, М., 1985, 224 с.; англ. пер.: A. F. Filippov, *Differential equations with discontinuous right-hand sides*, Mathematics and Its Applications: Soviet Series, **18**, Kluwer, Dordrecht, 1988, x+304 pp.
- [32] Р. В. Гамкредидзе, "О скользящих оптимальных режимах", *ДАН СССР*, **143**:6 (1962), 1243–1245; англ. пер.: R. V. Gamkrelidze, "Optimal sliding states", *Soviet Math. Dokl.*, **3** (1962), 559–562.
- [33] R. V. Gamkrelidze, *Principles of optimal control theory*, Math. Concepts Methods Sci. Engrg., **7**, Plenum Press, New York–London, 1978, xii+175 pp.
- [34] Р. В. Гамкредидзе, "Скользящие режимы в теории оптимального управления", *Топология, обыкновенные дифференциальные уравнения, динамические системы, Сборник обзорных статей. 2. К 50-летию института*, Тр. МИАН СССР, **169**, 1985, 180–193.
- [35] Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, 2-е изд., Наука, М., 1966, 576 с.; англ. пер. 1-го изд.: F. R. Gantmacher, *The theory of matrices*, **1, 2**, Chelsea, New York, 1959, x+374, ix+276 pp.
- [36] Б. В. Гнеденко, *Курс теории вероятностей*, УРСС, М., 2001, 320 с.
- [37] D. Grass, J. P. Caulkins, G. Feichtinger, G. Tragler, D. A. Behrens, *Optimal control of nonlinear processes. With applications in drugs, corruption, and terror*, Springer-Verlag, Berlin, 2008, xx+551 pp.
- [38] G. M. Grossman, E. Helpman, *Innovation and growth in the global economy*, MIT Press, Cambridge, MA, 1991, 375 pp.
- [39] H. Halkin, "Necessary conditions for optimal control problems with infinite horizons", *Econometrica*, **42**:2 (1974), 267–272.
- [40] Ф. Хартман, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1970, 720 с.; пер. с англ.: Ph. Hartman, *Ordinary differential equations*, John Wiley & Sons, Inc., New York–London–Sydney, 1964, xiv+612 pp.
- [41] T. Kamihigashi, "Necessity of transversality conditions for infinite horizon problems", *Econometrica*, **69**:4 (2001), 995–1012.
- [42] A. Liapounoff, *Problème général de la stabilité du mouvement*, Ann. of Math. Stud., **17**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ; Oxford Univ. Press, London, 1947,

- iv+272 pp.; пер. с рус.: А. Ляпунов, *Общая задача об устойчивости движения*, Изд-во Харьк. матем. общ., Харьков, 1892, 250 с.; А. Ляпунов, “К вопросу об устойчивости движения”, *Сообщ. Харьк. матем. общ.*, **3**:6 (1893), 265–272.
- [43] Ph. Michel, “On the transversality condition in infinite horizon optimal problems”, *Econometrica*, **50**:4 (1982), 975–985.
- [44] Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкредидзе, Е. Ф. Мищенко, *Математическая теория оптимальных процессов*, Физматлит, М., 1961, 391 с.; англ. пер.: L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, E. F. Mishchenko, *The mathematical theory of optimal processes*, Interscience Publishers John Wiley & Sons, Inc., New York–London, 1962, viii+360 pp.
- [45] F. P. Ramsey, “A mathematical theory of saving”, *Econ. J.*, **38**:152 (1928), 543–559.
- [46] A. Seierstad, “Necessary conditions for nonsmooth, infinite-horizon optimal control problems”, *J. Optim. Theory Appl.*, **103**:1 (1999), 201–229.
- [47] A. Seierstad, K. Sydsæter, *Optimal control theory with economic applications*, Adv. Textbooks Econom., **24**, North-Holland, Amsterdam, 1987, xvi+445 pp.
- [48] S. P. Sethi, G. L. Thompson, *Optimal control theory. Applications to management science and economics*, 2nd ed., Kluwer, Boston, MA, 2000, xviii+505 pp.
- [49] K. Shell, “Applications of Pontryagin’s maximum principle to economics”, *Mathematical systems theory and economics*, I, Proc. Internat. Summer School (Varenna, 1967), Lect. Notes Oper. Res. Math. Econ., **11**, Springer, Berlin, 1969, 241–292.
- [50] G. V. Smirnov, “Transversality condition for infinite-horizon problems”, *J. Optim. Theory Appl.*, **88**:3 (1996), 671–688.
- [51] Дж. Варга, *Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями*, Наука, М., 1977, 623 с.; пер. с англ.: J. Warga, *Optimal control of differential and functional equations*, Academic Press, New York–London, 1972, xiii+531 pp.
- [52] M. L. Weitzman, *Income, wealth, and the maximum principle*, Harvard Univ. Press, Cambridge, MA, 2003, viii+341 pp.
- [53] J. J. Ye, “Nonsmooth maximum principle for infinite-horizon problems”, *J. Optim. Theory Appl.*, **76**:3 (1993), 485–500.

С. М. Асеев (S. M. Aseev)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН;
International Institute for Applied Systems Analysis,
Laxenburg, Austria
E-mail: aseev@mi.ras.ru

Поступила в редакцию
18.11.2011

К. О. Бесов (K. O. Besov)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: kbesov@mi.ras.ru

А. В. Кряжковский (A. V. Kryazhimskiy)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН;
International Institute for Applied Systems Analysis,
Laxenburg, Austria
E-mail: kryazhim@iiasa.ac.at