Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, Автоволновые процессы в цепочках диффузионно связанных уравнений с запаздыванием, *УМН*, 2012, том 67, выпуск 2, 109–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9469>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 18:01:13

УДК 517.926

Автоволновые процессы в цепочках диффузионно связанных уравнений с запаздыванием**А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов**

В настоящей работе вводится в рассмотрение новый математический объект – скалярное нелинейное дифференциально-разностное уравнение с запаздыванием, представляющее собой некоторую модификацию известного уравнения Хатчинсона из экологии. Устанавливается, что в одномерной цепочке диффузионно связанных уравнений такого типа наблюдается известное явление буферности. А именно, при согласованном увеличении числа звеньев рассматриваемой цепочки и уменьшении коэффициента диффузии происходит неограниченный рост количества ее сосуществующих устойчивых периодических движений.

Библиография: 15 названий.

Ключевые слова: модифицированное уравнение Хатчинсона, автоволновые процессы, релаксационный цикл, асимптотика, устойчивость.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение.....	110
2. Модифицированное уравнение Хатчинсона.....	112
2.1. Основной результат.....	112
2.2. Доказательство существования релаксационного цикла.....	114
2.3. Анализ свойств устойчивости.....	120
3. Автоволновые режимы билакальной модели.....	122
3.1. Основные теоремы.....	122
3.2. Обоснование C^1 -сходимости.....	126
3.3. Анализ предельного отображения.....	136
4. Многомерный случай.....	143
4.1. Теорема о C^1 -сходимости.....	143
4.2. Предельный объект.....	145
4.3. Заключение.....	150
Список литературы.....	155

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №05-01-01004, 09-01-00614а) и целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” (государственный контракт №02.740.11.0197).

1. Введение

Теория релаксационных колебаний в многомерных системах обыкновенных дифференциальных уравнений берет свое начало с заметки Л. С. Понтрягина и Е. Ф. Мищенко [1], послужившей основой для последующих работ (см. [2]–[5]). К настоящему времени эта теория приняла достаточно законченный характер и в суммированном виде содержится в монографиях [6], [7]. Необходимо также отметить монографию [8] и статью [9], в которых основные идеи и методы из [6], [7] были перенесены на некоторые классы сингулярно возмущенных дифференциально-разностных уравнений с запаздыванием. Что же касается излагаемых в данной работе результатов, то их можно рассматривать как продолжение начатых в [8], [9] исследований.

Приступим к описанию объектов дальнейшего анализа. В связи с этим обратимся к базовому экологическому уравнению

$$\dot{N} = \lambda[1 - N(t-1)]N, \quad (1.1)$$

где $N(t) \geq 0$ – плотность численности популяции млекопитающих в текущий момент времени, $\lambda = \text{const} > 0$ – мальтузианский коэффициент линейного роста. Это уравнение было предложено в 1948 г. американским биологом Дж. Э. Хатчинсоном [10] и позднее получило его имя.

Как известно (см. [11]–[13]), при всех $\lambda > \pi/2$ уравнение (1.1) имеет медленно осциллирующий цикл $N_*(t, \lambda) > 0$, $N_*(t, \pi/2) \equiv 1$, $N_*(0, \lambda) \equiv 1$, периода $T_*(\lambda)$, $T_*(\pi/2) = 4$ (медленная осцилляция означает, что расстояние между любыми соседними нулями функции $N_*(t, \lambda) - 1$ больше единицы). Упомянутый цикл

Рис. 1.1

Рис. 1.2

рождается из состояния равновесия $N \equiv 1$ при $0 < \lambda - \pi/2 \ll 1$ в результате бифуркации Андронова–Хопфа, а при последующем увеличении λ довольно быстро приобретает релаксационную форму (см. рис. 1.1, где показан график $N_*(t, \lambda)$ при $\lambda = 2.5$). В случае же $\lambda \gg 1$ справедливы следующие асимптоти-

ческие равенства [8]:

$$\max_{0 \leq t \leq T_*} N_*(t, \lambda) = \exp(\lambda - 1) + (2e)^{-1} + O(\exp(-\lambda)), \quad (1.2)$$

$$\min_{0 \leq t \leq T_*} N_*(t, \lambda) = \exp \left[-\exp \lambda + 2\lambda - 1 + \frac{1 + (1 + \lambda) \ln \lambda}{\lambda} + O\left(\frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^2}\right) \right], \quad (1.3)$$

$$T_*(\lambda) = \frac{1 + \exp \lambda}{\lambda} + O\left(\frac{\exp(-\lambda)}{\lambda}\right). \quad (1.4)$$

Добавим еще, что, как показывают численные эксперименты, цикл $N_*(t, \lambda)$ является экспоненциально орбитально устойчивым (в метрике фазового пространства $C[-1, 0]$) при всех $\lambda > \pi/2$. Однако строго доказать этот факт удастся лишь при $0 < \lambda - \pi/2 \ll 1$ и $\lambda \gg 1$.

Из формул (1.2)–(1.4) вытекает, что при больших λ закон $N_*(t, \lambda)$ изменения плотности популяции биологически нереализуем. Действительно, излишне большой период колебаний и излишне глубокий минимум фактически означают, что после первого же всплеска численности произойдет полное вымирание вида и следующий всплеск просто не наступит. В связи с этим возникает необходимость в подходящей модификации уравнения (1.1), улучшающей биологические характеристики его релаксационного цикла. Одна из таких модификаций предлагается в настоящей статье и заключается в следующем.

Рассмотрим вместо (1.1) уравнение вида

$$\dot{N} = \lambda f(N(t-1))N. \quad (1.5)$$

Здесь, как и выше, параметр λ предполагается большим, а бесконечно дифференцируемая на полуоси $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 0\}$ функция $f(x)$ обладает свойствами

$$f(0) = 1, \quad f(x) = -a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{x^k}, \quad x \rightarrow +\infty, \quad a_0 > 0. \quad (1.6)$$

Считаем еще, что фигурирующий в (1.6) асимптотический ряд можно дифференцировать по x любое число раз. Типовым примером такой функции служит

$$f(x) = \frac{1-x}{1+cx}, \quad c = \text{const} > 0. \quad (1.7)$$

Как будет показано ниже, замена уравнения (1.1) на (1.5) приводит к желаемой цели: модифицированное уравнение Хатчинсона (1.5) допускает устойчивый релаксационный цикл $N_*(t, \lambda) > 0$, $N_*(0, \lambda) \equiv 1$ периода $T_*(\lambda)$: $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} T_*(\lambda) = T_0$, $\lambda \rightarrow \infty$, где

$$T_0 = 2 + a_0 + \frac{1}{a_0}. \quad (1.8)$$

Что же касается формул (1.2), (1.3), то теперь их аналоги имеют вид

$$\max_t N_*(t, \lambda) \sim c_1 \exp \lambda, \quad \min_t N_*(t, \lambda) \sim c_2 \exp(-a_0 \lambda), \quad (1.9)$$

где $c_1, c_2 = \text{const} > 0$. Таким образом, налицо требуемое улучшение биологических характеристик релаксационных автоколебаний уравнения (1.5) по сравнению с уравнением (1.1). Более того, сопоставляя рис. 1.1 с графиком цикла $N_*(t, \lambda)$ уравнения (1.5), (1.7) при $\lambda = 2.5$, $c = 0.2$ (см. рис. 1.2), убеждаемся, что это улучшение проявляется даже при $\lambda \sim 1$.

Уравнение (1.5) описывает динамику изменения плотности популяции, обитающей в однородном ареале, когда пищевая база регулярно восстанавливается до некоторого фиксированного уровня, а миграционный фактор столь велик, что пространственные возмущения гаснут. При этих биологических посылках рассмотрим цепочку из m локальных ареалов, соединенных узкими проходами. В результате придем к системе

$$\dot{N}_j = d(N_{j+1} - 2N_j + N_{j-1}) + \lambda f(N_j(t-1))N_j, \quad j = 1, \dots, m, \quad (1.10)$$

где $N_0 = N_1$, $N_{m+1} = N_m$, $\lambda \gg 1$, а параметр d , имеющий порядок единицы, характеризует глубину связи между ареалами.

Система (1.10) допускает, очевидно, так называемый однородный, или синхронный, цикл

$$N_1 \equiv \dots \equiv N_m = N_*(t, \lambda), \quad (1.11)$$

где $N_*(t, \lambda)$ – устойчивое периодическое решение уравнения (1.5). Наш основной результат состоит в том, что при подходящем уменьшении d и при всех $\lambda \gg 1$ эта система наряду с устойчивым циклом (1.11) имеет не менее m экспоненциально орбитально устойчивых неоднородных периодических движений, которые по аналогии с пространственно непрерывным случаем будем называть автоволновыми процессами.

2. Модифицированное уравнение Хатчинсона

2.1. Основной результат. При исследовании вопросов о существовании у уравнения (1.5) релаксационного цикла $N_*(t, \lambda)$ с требуемыми характеристиками (1.9) и об устойчивости этого цикла удобно сделать в (1.5) замену $N = \exp(\lambda x)$. Действительно, указанная замена преобразует интересующее нас уравнение к виду

$$\dot{x} = F(x(t-1), \varepsilon), \quad (2.1)$$

где $F(x, \varepsilon) = f(\exp(x/\varepsilon))$, $\varepsilon = 1/\lambda \ll 1$. Далее, свойства (1.6) функции $f(x)$ позволяют заключить, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(x, \varepsilon) = R(x), \quad R(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x < 0, \\ -a_0 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Таким образом, исходному сингулярно возмущенному уравнению (2.1) ставится в соответствие предельное релейное уравнение с запаздыванием

$$\dot{x} = R(x(t-1)). \quad (2.2)$$

Как и в работе [9], понятие решения уравнения (2.2) определим конструктивно. С этой целью зафиксируем некоторое

$$\sigma_0: 0 < \sigma_0 < a_0, \quad (2.3)$$

Рис. 2.1

рассмотрим множество функций

$$\varphi(t) \in C[-1 - \sigma_0, -\sigma_0], \quad \varphi(t) < 0 \quad \forall t \in [-1 - \sigma_0, -\sigma_0], \quad \varphi(-\sigma_0) = -\sigma_0 \quad (2.4)$$

и обозначим через $x_\varphi(t)$, $t \geq -\sigma_0$, решение уравнения (2.2) с произвольной начальной функцией (2.4). Заметим, далее, что поскольку $\varphi(t - 1) < 0$ при $t \in [-\sigma_0, 1 - \sigma_0]$, то на указанном промежутке времени, согласно (2.2), $x_\varphi(t)$ является решением задачи Коши $\dot{x} = 1$, $x(-\sigma_0) = -\sigma_0$ и, следовательно,

$$x_\varphi(t) = t. \quad (2.5)$$

Ясно также, что формула (2.5) сохраняется до тех пор, пока $x_\varphi(t - 1) < 0$. Тем самым, она справедлива на полуинтервале $-\sigma_0 \leq t < 1$.

При $t = 1$ первый раз происходит переключение, и при $t > 1$ решение $x_\varphi(t)$ определяется уже из задачи Коши $\dot{x} = -a_0$, $x(1) = 1$, т.е. посредством равенства

$$x_\varphi(t) = 1 - a_0(t - 1). \quad (2.6)$$

В свою очередь, формула (2.6) остается в силе, пока $x_\varphi(t - 1) > 0$, т.е. до очередного момента переключения $t = t_0 + 1$, где

$$t_0 = 1 + \frac{1}{a_0}. \quad (2.7)$$

На промежутке же $t_0 + 1 \leq t \leq T_0 - \sigma_0$, где T_0 определено формулой (1.8), функция $x_\varphi(t)$ задается аналогичным (2.5) равенством

$$x_\varphi(t) = -a_0 + t - t_0 - 1. \quad (2.8)$$

Завершая описание построения решения $x_\varphi(t)$, отметим, что в силу условия (2.3) на постоянную σ_0 функция $x_\varphi(t + T_0)$, $-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$, принадлежит исходному начальному множеству (2.4). А это означает, что при $t \geq T_0 - \sigma_0$

весь процесс повторяется. Более того, из (2.6)–(2.8) вытекает, что каждое решение $x_\varphi(t)$ с начальным условием (2.4) при всех $t \geq -\sigma_0$ совпадает с одной и той же T_0 -периодической функцией (см. рис. 2.1)

$$x_0(t) = \begin{cases} t & \text{при } 0 \leq t \leq 1, \\ 1 - a_0(t - 1) & \text{при } 1 \leq t \leq t_0 + 1, \\ -a_0 + t - t_0 - 1 & \text{при } t_0 + 1 \leq t \leq T_0, \end{cases} \quad x_0(t + T_0) \equiv x_0(t). \quad (2.9)$$

Перейдем к вопросу о связи между периодическими решениями уравнений (2.1) и (2.2). Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2.1. *При всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ уравнение (2.1) имеет единственный орбитально экспоненциально устойчивый цикл $x_*(t, \varepsilon)$ периода $T_*(\varepsilon)$, удовлетворяющий тождеству $x_*(-\sigma_0, \varepsilon) \equiv -\sigma_0$ и предельным равенствам*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \max_{0 \leq t \leq T_*(\varepsilon)} |x_*(t, \varepsilon) - x_0(t)| = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_*(\varepsilon) = T_0. \quad (2.10)$$

Доказательство сформулированной теоремы, содержащееся в следующих двух пунктах, опирается на некоторые дополнительные конструкции. Для их описания зафиксируем наряду с константой σ_0 (см. (2.3)) постоянные $q_1 > \sigma_0$, $q_2 \in (0, \sigma_0)$ и обозначим через $S(\sigma_0, q_1, q_2) \subset C[-1 - \sigma_0, -\sigma_0]$ замкнутое, ограниченное и выпуклое множество функций $\varphi(t)$, удовлетворяющих требованиям

$$-q_1 \leq \varphi(t) \leq -q_2, \quad \varphi(-\sigma_0) = -\sigma_0. \quad (2.11)$$

Далее, для произвольной функции $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$ рассмотрим решение $x = x_\varphi(t, \varepsilon)$, $t \geq -\sigma_0$, уравнения (2.1) с начальным условием $\varphi(t)$, $-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$, а через $t = T_\varphi$ обозначим второй положительный корень уравнения $x_\varphi(t - \sigma_0, \varepsilon) = -\sigma_0$ (если он существует). И наконец, зададим оператор $\Pi_\varepsilon: S(\sigma_0, q_1, q_2) \rightarrow C[-1 - \sigma_0, -\sigma_0]$ с помощью равенства

$$\Pi_\varepsilon(\varphi) = x_\varphi(t + T_\varphi, \varepsilon), \quad -1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0. \quad (2.12)$$

План последующих действий таков. Сначала мы установим асимптотические формулы для $x_\varphi(t, \varepsilon)$ на различных промежутках изменения t , из которых будет следовать, что при подходящем выборе параметров σ_0, q_1, q_2 оператор (2.12) определен на множестве $S(\sigma_0, q_1, q_2)$ и преобразует его в себя. Затем проведем анализ уравнения в вариациях на решении $x_\varphi(t, \varepsilon)$ и покажем, что Π_ε является сжимающим.

2.2. Доказательство существования релаксационного цикла. Построение асимптотики функции $x_\varphi(t, \varepsilon)$ начнем с отрезка $-\sigma_0 \leq t \leq 1 - \sigma_0$, на котором согласно (2.1) она является решением задачи Коши

$$\dot{x} = F(\varphi(t - 1), \varepsilon), \quad x|_{t=-\sigma_0} = -\sigma_0.$$

Далее, опираясь на неравенства из (2.11) и свойства (1.6), замечаем, что равномерно по $t \in [-\sigma_0, 1 - \sigma_0]$, $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$

$$F(\varphi(t - 1), \varepsilon) = 1 + O\left(\exp\left(-\frac{q_2}{\varepsilon}\right)\right). \quad (2.13)$$

А отсюда очевидным образом выводим, что

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = t + \Delta_{1,\varphi}(t, \varepsilon), \quad -\sigma_0 \leq t \leq 1 - \sigma_0; \quad (2.14)$$

здесь и далее через $\Delta_{1,\varphi}$, $\Delta_{2,\varphi}$ и т.д. обозначаются остатки, модули которых имеют экспоненциальный порядок малости (т.е. порядок $\exp(-q/\varepsilon)$, $q = \text{const} > 0$) равномерно по φ , t .

На следующем этапе, считая, что

$$\sigma_0 < \frac{1}{2}, \quad (2.15)$$

обратимся к отрезку $1 - \sigma_0 \leq t \leq 1 + \sigma_0$. Так как в силу (2.15) его длина не превосходит единицы, то в этом случае $x_\varphi(t - 1, \varepsilon)$ задается уже известным равенством (2.14) (при замене в нем t на $t - 1$). Тем самым, и здесь имеем дело с задачей Коши

$$\dot{x} = F(t - 1 + \Delta_{1,\varphi}(t - 1, \varepsilon), \varepsilon), \quad x|_{t=1-\sigma_0} = 1 - \sigma_0 + \Delta_{1,\varphi}(1 - \sigma_0, \varepsilon), \quad (2.16)$$

правые части которой известны из предыдущего шага. Что же касается решения этой задачи, то его будем искать в виде

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = 1 + \varepsilon v(\tau)|_{\tau=(t-1)/\varepsilon} + \Delta_{2,\varphi}(t, \varepsilon), \quad 1 - \sigma_0 \leq t \leq 1 + \sigma_0, \quad (2.17)$$

где

$$v(\tau) = \tau + \int_{-\infty}^{\tau} [f(\exp s) - 1] ds, \quad (2.18)$$

а $\Delta_{2,\varphi}$ — подлежащий определению остаток.

Подставляя выражения (2.17), (2.18) в (2.16), для $\Delta_{2,\varphi}$ приходим к задаче Коши

$$\dot{\Delta}_{2,\varphi} = G_\varphi(t, \varepsilon), \quad \Delta_{2,\varphi}|_{t=1-\sigma_0} = g_\varphi(\varepsilon), \quad (2.19)$$

где

$$G_\varphi(t, \varepsilon) = f(x_1) - f(x_2) \quad (2.20)$$

$$\text{при } x_1 = \exp\left(\frac{t-1}{\varepsilon} + \frac{\Delta_{1,\varphi}(t-1, \varepsilon)}{\varepsilon}\right), \quad x_2 = \exp\left(\frac{t-1}{\varepsilon}\right);$$

$$g_\varphi(\varepsilon) = -\sigma_0 - \varepsilon v(\tau)|_{\tau=-\sigma_0/\varepsilon} + \Delta_{1,\varphi}(1 - \sigma_0, \varepsilon). \quad (2.21)$$

Таким образом, доказательство равномерной по φ , t экспоненциальной малости $\Delta_{2,\varphi}$ сводится к проверке аналогичных свойств для функции (2.20) и начального условия (2.21).

Обратимся сначала к анализу $g_\varphi(\varepsilon)$. Учитывая в (2.18) первое из соотношений (1.6), убеждаемся, что

$$v(\tau) = \tau + O(\exp \tau), \quad \tau \rightarrow -\infty, \quad (2.22)$$

и, следовательно,

$$-\sigma_0 - \varepsilon v(\tau)|_{\tau=-\sigma_0/\varepsilon} = O\left(\exp\left(-\frac{\sigma_0}{\varepsilon}\right)\right).$$

А отсюда и из известных свойств $\Delta_{1,\varphi}$ вытекает требуемая экспоненциальная малость величины (2.21).

Для оценки функции (2.20) продифференцируем по x асимптотическое разложение из (1.6). В результате приходим к выводу, что

$$M_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} (1 + x^2) |f'(x)| < \infty.$$

Далее, используя этот факт, нетрудно увидеть, что

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{M_1}{1 + \min(x_1^2, x_2^2)} |x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+. \quad (2.23)$$

Применяя затем свойство (2.23) к правой части из (2.20), получаем неравенство

$$|G_\varphi(t, \varepsilon)| \leq \frac{M_2}{\varepsilon} \exp\left(-\frac{|t-1|}{\varepsilon}\right) |\Delta_{1,\varphi}(t-1, \varepsilon)|, \quad 1 - \sigma_0 \leq t \leq 1 + \sigma_0, \quad (2.24)$$

где M_2 – некоторая универсальная (не зависящая от t , φ , ε) положительная константа. Остается заметить, что из (2.24) равномерная по t , φ экспоненциальная малость $G_\varphi(t, \varepsilon)$ следует уже очевидным образом.

Дальнейший анализ связан с рассмотрением отрезка $1 + \sigma_0 \leq t \leq 2 + \sigma_0$ при условии

$$\sigma_0 < \frac{1}{2a_0}, \quad (2.25)$$

гарантирующем выполнение неравенства $2 + \sigma_0 < t_0 + 1 - \sigma_0$, где, напомним, t_0 – величина (2.7). В этом случае на промежутках $t \in [1 + \sigma_0, 2 - \sigma_0]$ и $t \in [2 - \sigma_0, 2 + \sigma_0]$ функция $x_\varphi(t-1, \varepsilon)$ задается соответственно формулами (2.14) и (2.17) (с заменой в них t на $t-1$). А отсюда, в частности, следует, что

$$x_\varphi(t-1, \varepsilon) \geq q, \quad t \in [1 + \sigma_0, 2 - \sigma_0], \quad (2.26)$$

где q – произвольно фиксированная постоянная из интервала $(0, \sigma_0)$.

Для получения аналогичной (2.26) оценки на отрезке $2 - \sigma_0 \leq t \leq 2 + \sigma_0$ необходимо наряду с (2.22) знать поведение функции (2.18) при $\tau \rightarrow +\infty$. Несложный подсчет показывает, что

$$v(\tau) = -a_0\tau + c_0 + O(\exp(-\tau)), \quad \tau \rightarrow +\infty, \quad (2.27)$$

где

$$c_0 = \int_0^1 \frac{f(u) - 1}{u} du + \int_1^{+\infty} \frac{f(u) + a_0}{u} du. \quad (2.28)$$

Учитывая, далее, соотношения (2.22), (2.27), (2.28), из (2.17) делаем вывод, что

$$x_\varphi(t-1, \varepsilon) \geq q, \quad t \in [2 - \sigma_0, 2 + \sigma_0], \quad (2.29)$$

где теперь $q \in (0, \min(1 - \sigma_0, 1 - a_0\sigma_0))$.

Установленные выше неравенства (2.26), (2.29) и свойства (1.6) функции $f(x)$ позволяют заключить, что равномерно по $t \in [1 + \sigma_0, 2 + \sigma_0]$, $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$ справедливо аналогичное (2.13) асимптотическое представление

$$F(x_\varphi(t-1, \varepsilon), \varepsilon) = -a_0 + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \quad q = \text{const} > 0. \quad (2.30)$$

Подставляя его вместе с формулами (2.17), (2.18), (2.27), (2.28) в интегральное соотношение

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = x_\varphi|_{t=1+\sigma_0} + \int_{1+\sigma_0}^t F(x_\varphi(s-1, \varepsilon), \varepsilon) ds, \quad (2.31)$$

убеждаемся, что

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = 1 - a_0(t-1) + \varepsilon c_0 + \Delta_{3,\varphi}(t, \varepsilon), \quad (2.32)$$

где, как обычно, остаток $\Delta_{3,\varphi}$ равномерно по φ , t экспоненциально мал.

Добавим еще, что на самом деле формула (2.32) сохраняется (вместе с требуемой малостью остатка) и на отрезке $2 + \sigma_0 \leq t \leq t_0 + 1 - \sigma_0$. Обосновать этот факт позволяет так называемый метод шагов, суть которого состоит в следующем. Разобьем указанный отрезок на части длины не более единицы и на очередном промежутке, опираясь на формулу (2.32) (уже установленную на предыдущем участке изменения t), сначала получаем оценку вида $x_\varphi(t-1, \varepsilon) \geq q$ с некоторой универсальной постоянной $q > 0$, а затем распространяем равенство (2.32) на шаг вперед. Ясно, что описанный процесс продолжается до тех пор, пока $1 - a_0(t-2) > 0$. Тем самым, рассуждая подобным образом, мы заведомо добираемся до точки $t = t_0 + 1 - \sigma_0$.

На очередном отрезке $t_0 + 1 - \sigma_0 \leq t \leq t_0 + 1 + \sigma_0$ в силу (2.1), (2.32) и оценок (2.15), (2.25) интересующее нас решение $x_\varphi(t, \varepsilon)$ определяется из задачи Коши

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(-a_0(t-t_0-1) + \varepsilon c_0 + \Delta_{3,\varphi}(t-1, \varepsilon), \varepsilon), \\ x|_{t=t_0+1-\sigma_0} &= -a_0(1-\sigma_0) + \varepsilon c_0 + \Delta_{3,\varphi}(t_0+1-\sigma_0, \varepsilon). \end{aligned}$$

В свою очередь, решение получившейся задачи будем искать в виде

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = -a_0 + \varepsilon w(\tau)|_{\tau=(t-t_0-1)/\varepsilon} + \Delta_{4,\varphi}(t, \varepsilon), \quad t_0 + 1 - \sigma_0 \leq t \leq t_0 + 1 + \sigma_0, \quad (2.33)$$

где

$$w(\tau) = -a_0\tau + c_0 + \int_{-\infty}^{\tau} [f(\exp(-a_0s + c_0)) + a_0] ds. \quad (2.34)$$

В результате для очередного остатка $\Delta_{4,\varphi}$ получаем аналогичную (2.19) задачу Коши

$$\dot{\Delta}_{4,\varphi} = G_\varphi(t, \varepsilon), \quad \Delta_{4,\varphi}|_{t=t_0+1-\sigma_0} = g_\varphi(\varepsilon), \quad (2.35)$$

где теперь

$$G_\varphi(t, \varepsilon) = f(x_1) - f(x_2) \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} \text{при } x_1 &= \exp\left(-\frac{a_0(t-t_0-1)}{\varepsilon} + c_0 + \frac{\Delta_{3,\varphi}(t-1, \varepsilon)}{\varepsilon}\right), \\ x_2 &= \exp\left(-\frac{a_0(t-t_0-1)}{\varepsilon} + c_0\right); \end{aligned}$$

$$g_\varphi(\varepsilon) = a_0\sigma_0 + \varepsilon c_0 - \varepsilon w(\tau)|_{\tau=-\sigma_0/\varepsilon} + \Delta_{3,\varphi}(t_0+1-\sigma_0, \varepsilon). \quad (2.37)$$

Оценка правых частей из (2.35) проводится по той же схеме, что и в случае (2.20), (2.21). Действительно, привлекая вытекающее из (2.34) асимптотическое равенство

$$w(\tau) = -a_0\tau + c_0 + O(\exp(a_0\tau)), \quad \tau \rightarrow -\infty, \quad (2.38)$$

приходим к выводу, что

$$a_0\sigma_0 + \varepsilon c_0 - \varepsilon w(\tau)|_{\tau=-\sigma_0/\varepsilon} = O\left(\exp\left(-\frac{a_0\sigma_0}{\varepsilon}\right)\right).$$

А отсюда с учетом уже установленных свойств $\Delta_{3,\varphi}$ следует нужная экспоненциальная малость начального условия (2.37). Что же касается функции (2.36), то проверка ее равномерной по t , φ экспоненциальной малости базируется на неравенстве (2.23) (см. аналогичное место выше).

Перейдем, далее, к отрезку $t_0+1+\sigma_0 \leq t \leq \min(t_0+2+\sigma_0, T_0+\sigma_0)$. Поскольку его длина не превосходит единицы, то при указанных t функция $x_\varphi(t-1, \varepsilon)$ уже известна и задается равенствами (2.32) или (2.33) (при замене в них t на $t-1$). В обоих случаях, однако, справедлива оценка вида

$$x_\varphi(t-1, \varepsilon) \leq -q \quad (2.39)$$

с некоторой универсальной положительной константой q .

Действительно, при тех значениях t , когда работает формула (2.32), в качестве q в (2.39) можно взять любое число из интервала $(0, a_0\sigma_0)$. В случае же, когда имеем дело с формулой (2.33), для оценки q кроме свойства (2.38) необходимо знать асимптотическое поведение функции (2.34) при $\tau \rightarrow +\infty$. Соответствующую асимптотическую формулу легко вывести, исходя из представления

$$\begin{aligned} w(\tau) &= \tau - \frac{c_0}{a_0} + \int_{-\infty}^{c_0/a_0} [f(\exp(-a_0s + c_0)) + a_0] ds \\ &\quad + \int_{c_0/a_0}^{+\infty} [f(\exp(-a_0s + c_0)) - 1] ds - \int_{\tau}^{+\infty} [f(\exp(-a_0s + c_0)) - 1] ds. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Для этого достаточно заметить, что последнее слагаемое в (2.40) при $\tau \rightarrow +\infty$ имеет порядок $\exp(-a_0\tau)$, а сумма

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{c_0/a_0} [f(\exp(-a_0s + c_0)) + a_0] ds + \int_{c_0/a_0}^{+\infty} [f(\exp(-a_0s + c_0)) - 1] ds \\ &= \frac{1}{a_0} \left(\int_0^1 \frac{f(u) - 1}{u} du + \int_1^{+\infty} \frac{f(u) + a_0}{u} du \right) \end{aligned}$$

в силу (2.28) совпадает с c_0/a_0 . Таким образом, из (2.40) окончательно получаем

$$w(\tau) = \tau + O(\exp(-a_0\tau)), \quad \tau \rightarrow +\infty. \quad (2.41)$$

Возвратимся к оценке (2.39). Из (2.33), (2.38), (2.41) следует, что в случае, когда $x_\varphi(t-1, \varepsilon)$ задается с помощью формулы (2.33), в качестве q в (2.39) можно взять любое число из интервала $(0, \min(a_0 - \sigma_0, a_0 - a_0\sigma_0))$.

Установленное выше неравенство (2.39) и свойства (1.6) приводят к асимптотическому представлению

$$F(x_\varphi(t-1, \varepsilon), \varepsilon) = 1 + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \quad q = \text{const} > 0, \quad (2.42)$$

которое, как и аналогичные ему соотношения (2.13), (2.30), справедливо равномерно по φ, t . Дальнейший же способ действий стандартен: подставляем (2.42) вместе с формулами (2.33), (2.34), (2.41) в аналогичное (2.31) интегральное уравнение

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = x_\varphi|_{t=t_0+1+\sigma_0} + \int_{t_0+1+\sigma_0}^t F(x_\varphi(s-1, \varepsilon), \varepsilon) ds \quad (2.43)$$

и после несложных выкладок приходим к очередному асимптотическому равенству

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = t - T_0 + \Delta_{5,\varphi}(t, \varepsilon), \quad (2.44)$$

где остаток $\Delta_{5,\varphi}$ обладает требуемой экспоненциальной малостью.

В случае, когда $t_0 + 2 < T_0$, отдельному рассмотрению подлежит еще отрезок $t_0 + 2 + \sigma_0 \leq t \leq T_0 + \sigma_0$. Однако здесь не возникают новые моменты, так как при указанных t сохраняется априорная оценка (2.39) (см. аналогичное место при обосновании формулы (2.32)). Тем самым, асимптотическое представление (2.44) оказывается пригодным на всем отрезке $t_0 + 1 + \sigma_0 \leq t \leq T_0 + \sigma_0$.

Подведем некоторый итог. Из (2.42)–(2.44) очевидным образом следует, что интересующий нас корень $t = T_\varphi$ уравнения $x_\varphi(t - \sigma_0, \varepsilon) = -\sigma_0$ определяется однозначно, причем равномерно по $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$

$$T_\varphi = T_0 + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \quad q = \text{const} > 0. \quad (2.45)$$

Далее, объединяя все полученные выше асимптотические представления для решения $x_\varphi(t, \varepsilon)$ (см. (2.14), (2.17), (2.32), (2.33), (2.44)), приходим к выводу, что

$$\max_{-\sigma_0 \leq t \leq T_0 + \sigma_0} |x_\varphi(t, \varepsilon) - x_0(t)| = O(\varepsilon), \quad (2.46)$$

где $x_0(t)$ – функция (2.9), а остаток равномерен по $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$.

Формулы (2.45), (2.46) свидетельствуют о том, что оператор (2.12) действительно определен на множестве $S(\sigma_0, q_1, q_2)$ и равномерно по φ

$$\max_{-1-\sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0} |x_\varphi(t + T_\varphi, \varepsilon) - x_0(t)| = O(\varepsilon). \quad (2.47)$$

Что же касается требуемого включения $\Pi_\varepsilon(S(\sigma_0, q_1, q_2)) \subset S(\sigma_0, q_1, q_2)$, то в силу (2.47) оно будет заведомо выполняться при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ при условии

$$x_0(t) \in \widehat{S}(\sigma_0, q_1, q_2), \quad (2.48)$$

где $\widehat{S}(\sigma_0, q_1, q_2)$ – множество функций, получающееся из $S(\sigma_0, q_1, q_2)$ при замене в (2.11) нестрогих неравенств строгими. Напомним, далее, что на параметр σ_0 нами уже наложено ограничение (2.3), обеспечивающее свойства $x_0(-\sigma_0) = -\sigma_0$ и $x_0(t) < 0$ при $-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$. Поэтому справедливости включения (2.48) добиваемся за счет имеющихся в запасе параметров q_1, q_2 , предполагая, что

$$q_1 > -\min_{-1-\sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0} x_0(t), \quad 0 < q_2 < -\max_{-1-\sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0} x_0(t). \quad (2.49)$$

Итак, оператор Π_ε , очевидным образом являющийся компактным, при выполнении условий (2.3), (2.15), (2.25), (2.49) на параметры σ_0, q_1, q_2 преобразует в себя замкнутое, ограниченное и выпуклое множество $S(\sigma_0, q_1, q_2)$. А отсюда в соответствии с известным принципом Шаудера заключаем, что этот оператор имеет в $S(\sigma_0, q_1, q_2)$ по крайней мере одну неподвижную точку $\varphi = \varphi_*(t, \varepsilon)$. Ясно также, что решение $x_*(t, \varepsilon)$ уравнения (2.1) с начальной функцией $\varphi_*(t, \varepsilon)$, $-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$, оказывается периодическим с периодом $T_*(\varepsilon) = T_\varphi|_{\varphi=\varphi_*}$ и в силу (2.45)–(2.47) удовлетворяет требуемым свойствам (2.10).

2.3. Анализ свойств устойчивости. Перейдем теперь ко второй части обоснования теоремы 2.1, т.е. к доказательству единственности и устойчивости релаксационного цикла $x_*(t, \varepsilon)$ с нулевым приближением (2.9). Из явной формулы (2.12) для оператора Π_ε вытекает, что он непрерывно дифференцируем по φ , а его производная Фреше $\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi)$ задается равенством

$$\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi)g_0 = g(t + T_\varphi, \varepsilon) - l(g_0)\dot{x}_\varphi(t + T_\varphi, \varepsilon), \quad -1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0. \quad (2.50)$$

Здесь функция $g_0(t)$ представляет собой произвольный элемент пространства

$$C_0 = \{g_0(t) \in C[-1 - \sigma_0, -\sigma_0], g_0(-\sigma_0) = 0\},$$

через $g(t, \varepsilon)$, $-\sigma_0 \leq t \leq T_\varphi - \sigma_0$, обозначено решение линейного уравнения

$$\dot{g} = A(t, \varepsilon)g(t - 1), \quad A(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} (f'(\exp x) \exp x) \Big|_{x=x_\varphi(t-1, \varepsilon)/\varepsilon} \quad (2.51)$$

с начальной функцией $g_0(t)$, $-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$, а линейный функционал $l: C_0 \rightarrow \mathbb{R}$ определен формулой

$$l(g_0) = \frac{g(T_\varphi - \sigma_0, \varepsilon)}{\dot{x}_\varphi(T_\varphi - \sigma_0, \varepsilon)}. \quad (2.52)$$

Из соотношений (2.50), (2.52) следует, что проблема оценки нормы линейного оператора $\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi)$ в пространстве C_0 с нормой $\|g_0\| = \max_{-1-\sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0} |g_0(t)|$ сводится к анализу введенного выше решения $g(t, \varepsilon)$ уравнения (2.51). Покажем, что для этого решения выполняется неравенство вида

$$\max_{-\sigma_0 \leq t \leq T_\varphi - \sigma_0} |g(t, \varepsilon)| \leq M \exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right) \|g_0\| \quad (2.53)$$

с некоторыми универсальными (не зависящими от $\varepsilon, \varphi, g_0$) положительными постоянными M, q .

Обратимся сначала к отрезку $-\sigma_0 \leq t \leq 1 - \sigma_0$, на котором, в силу (2.51), для $g(t, \varepsilon)$ имеем явную формулу

$$g(t, \varepsilon) = \int_{-\sigma_0}^t A(s, \varepsilon) g_0(s - 1) ds, \quad -\sigma_0 \leq t \leq 1 - \sigma_0. \quad (2.54)$$

Напомним, далее, что при рассматриваемых t решение $x_\varphi(t - 1, \varepsilon)$ совпадает с функцией $\varphi(t - 1)$, удовлетворяющей условиям (2.11). А отсюда и из свойств (1.6) функции $f(x)$ следует, что фигурирующий в (2.51) коэффициент $A(t, \varepsilon)$ допускает оценку вида

$$\max_{-\sigma_0 \leq t \leq 1 - \sigma_0} |A(t, \varepsilon)| \leq M \exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right). \quad (2.55)$$

И наконец, учитывая (2.55) в (2.54), убеждаемся, что

$$\max_{-\sigma_0 \leq t \leq 1 - \sigma_0} |g(t, \varepsilon)| \leq M \exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right) \|g_0\|. \quad (2.56)$$

Для распространения оценки (2.56) на оставшийся отрезок $[1 - \sigma_0, T_\varphi - \sigma_0]$ изменения t воспользуемся методом шагов. А именно, разобьем указанный промежуток времени на отрезки $[1 - \sigma_0 + k, 2 - \sigma_0 + k]$, $k = 0, 1, \dots, k_0$, и $[2 - \sigma_0 + k_0, T_\varphi - \sigma_0]$, где $k_0 = \lfloor T_\varphi - 2 \rfloor$, $\lfloor * \rfloor$ – целая часть. Опираясь, далее, на равномерную по $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$ асимптотическую формулу

$$\max_{1 - \sigma_0 \leq t \leq T_\varphi - \sigma_0} |A(t, \varepsilon)| = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right),$$

замечаем, что из неравенства

$$|g(t, \varepsilon)| \leq |g(1 - \sigma_0 + k, \varepsilon)| + \int_{1 - \sigma_0 + k}^t |A(s, \varepsilon)| \cdot |g(s - 1, \varepsilon)| ds, \quad t \geq 1 - \sigma_0 + k,$$

и из уже полученной оценки вида (2.56) на $(k - 1)$ -м отрезке вытекает требуемая оценка на k -м отрезке изменения t .

Возвращаясь к оператору Π_ε и учитывая в (2.50), (2.52) установленное выше неравенство (2.53), приходим к выводу, что

$$\sup_{\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)} \|\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi)\|_{C_0 \rightarrow C_0} \leq M \exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right). \quad (2.57)$$

Остается добавить, что оценка (2.57) обеспечивает как сжимаемость оператора Π_ε (а значит, единственность его неподвижной точки $\varphi = \varphi_*(t, \varepsilon)$ в множестве $S(\sigma_0, q_1, q_2)$), так и экспоненциальную орбитальную устойчивость соответствующего цикла $x_*(t, \varepsilon)$. Последнее обстоятельство обусловлено тем, что согласно (2.57) спектральный радиус оператора $\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi_*)$ экспоненциально мал. Таким образом, все мультипликаторы μ цикла $x_*(t, \varepsilon)$, являющиеся (за исключением простого единичного) собственными значениями упомянутого оператора, лежат в круге $\{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| \leq M \exp(-q/\varepsilon)\}$. Теорема 2.1 полностью доказана.

В дополнение к установленной теореме отметим, что релаксационный цикл

$$N_*(t, \lambda) = \exp\left(\frac{x_*(t, \varepsilon)}{\varepsilon}\right)\Big|_{\varepsilon=1/\lambda} \quad (2.58)$$

исходного уравнения (1.5) в силу (2.46) обладает требуемыми асимптотическими характеристиками (1.9), а для его периода $T_*(\lambda)$ справедлива вытекающая из (2.45) формула

$$T_*(\lambda) = T_0 + O(\exp(-q\lambda)), \quad q = \text{const} > 0. \quad (2.59)$$

3. Автоволновые режимы билакальной модели

3.1. Основные теоремы. Изучение аттракторов диффузионной цепочки (1.10) начнем с ее частного случая

$$\begin{aligned} \dot{N}_1 &= d(N_2 - N_1) + \lambda f(N_1(t-1))N_1, \\ \dot{N}_2 &= d(N_1 - N_2) + \lambda f(N_2(t-1))N_2, \end{aligned} \quad (3.1)$$

называемого билакальной моделью. Точнее говоря, последующий анализ будем проводить для системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \varepsilon d\left(\exp\left(\frac{x_2 - x_1}{\varepsilon}\right) - 1\right) + f\left(\exp\left(\frac{x_1(t-1)}{\varepsilon}\right)\right), \\ \dot{x}_2 &= \varepsilon d\left(\exp\left(\frac{x_1 - x_2}{\varepsilon}\right) - 1\right) + f\left(\exp\left(\frac{x_2(t-1)}{\varepsilon}\right)\right), \end{aligned} \quad (3.2)$$

получающейся из (3.1) при $N_j = \exp(x_j/\varepsilon)$, $j = 1, 2$, $\varepsilon = 1/\lambda$.

Система (3.2) имеет, очевидно, однородный цикл $x_1 = x_2 = x_*(t, \varepsilon)$, где $x_*(t, \varepsilon)$ – релаксационный цикл уравнения (2.1), доставляемый теоремой 2.1. Ниже будет установлено, что, во-первых, этот цикл экспоненциально орбитально устойчив при любом фиксированном $d > 0$ и при $\varepsilon \ll 1$; во-вторых, при надлежащем уменьшении параметра d в билакальной модели (3.2) наряду с однородным циклом существуют и другие аттракторы. Таковыми являются два ее неоднородных цикла, переходящие друг в друга в результате замены

$$(x_1, x_2) \rightarrow (x_2, x_1). \quad (3.3)$$

По ряду технических причин, которые проявятся в последующем, отыскание автоволновых процессов системы (3.2) будем проводить при дополнительном условии

$$a_0 > 1, \quad (3.4)$$

когда свойства релаксационного цикла модифицированного уравнения Хатчинсона (1.5) наиболее близки к свойствам цикла оригинального уравнения (1.1). Кроме того, для удобства дальнейшего асимптотического анализа перейдем в (3.2) к новым переменным $x = x_1$, $y = (x_2 - x_1)/\varepsilon$. В результате интересующая нас система примет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon d(\exp y - 1) + F(x(t-1), \varepsilon), \\ \dot{y} &= -2d \operatorname{sh} y + G(x(t-1), y(t-1), \varepsilon), \end{aligned} \quad (3.5)$$

где функция $F(x, \varepsilon)$ та же самая, что и в (2.1), а $G(x, y, \varepsilon)$ задается формулой

$$G(x, y, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \left\{ f\left(\exp\left(\frac{x}{\varepsilon} + y\right)\right) - f\left(\exp\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) \right\}. \quad (3.6)$$

Зафиксируем постоянную σ_0 , подчиненную требованиям $0 < \sigma_0 < a_0 - 1$, и рассмотрим банахово пространство $\mathcal{F}$ непрерывных при $-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$ начальных вектор-функций $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ с нормой

$$\|\varphi\|_{\mathcal{F}} = \max_j \left(\max_{-1-\sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0} |\varphi_j(t)| \right). \quad (3.7)$$

Всюду ниже нас будут интересовать решения системы (3.5) с начальными условиями из множества

$$S = \{\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) : \varphi_1 \in S_1, \varphi_2 \in S_2\} \subset \mathcal{F}. \quad (3.8)$$

Здесь через S_1 обозначена введенная при доказательстве теоремы 2.1 совокупность непрерывных функций $S(\sigma_0, q_1, q_2)$, параметры q_1, q_2 в которой удовлетворяют неравенствам (2.49), а в качестве S_2 взято произвольное замкнутое и ограниченное подмножество пространства $C[-1 - \sigma_0, -\sigma_0]$.

Формулировка строгих результатов об автоволновых режимах системы (3.5) требует некоторых подготовительных построений. В связи с этим введем в рассмотрение решение $(x_\varphi(t, \varepsilon), y_\varphi(t, \varepsilon))$, $t \geq -\sigma_0$, упомянутой системы, отвечающее произвольному начальному условию $\varphi(t) \in S$. Рассмотрим также второй положительный корень $t = T_\varphi$ уравнения $x_\varphi(t - \sigma_0, \varepsilon) = -\sigma_0$ (в случае, когда он существует) и на множестве (3.8) определим оператор $\Pi_\varepsilon : S \rightarrow \mathcal{F}$ посредством аналогичного (2.12) равенства

$$\Pi_\varepsilon(\varphi) = (x_\varphi(t + T_\varphi, \varepsilon), y_\varphi(t + T_\varphi, \varepsilon)), \quad -1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0. \quad (3.9)$$

Помимо (3.9) нам потребуется еще оператор $\Pi_0 : S \rightarrow \mathcal{F}$, который зададим формулой

$$\Pi_0(\varphi) = (x_0(t), y_0(t + T_0, z))|_{z=\varphi_2(-\sigma_0)}, \quad -1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0. \quad (3.10)$$

Здесь, как и ранее, T_0 – величина (1.8), а $x_0(t)$ – периодическая функция (2.9). Что же касается компоненты $y_0(t, z)$, $z \in \mathbb{R}$, то при $-\sigma_0 \leq t \leq T_0 - \sigma_0$ она является решением задачи Коши

$$\dot{y} = -2d \operatorname{sh} y, \quad y|_{t=-\sigma_0} = z, \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} y(1+0) &= y(1-0) - (1+a_0)y(0), \\ y(t_0+1+0) &= y(t_0+1-0) - \left(1 + \frac{1}{a_0}\right)y(t_0). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Подчеркнем, что задача (3.11), (3.12) относится к так называемым системам с импульсным воздействием. Это означает, что в моменты времени $t = 1$ и $t = t_0 + 1$, где t_0 – величина (2.7), ее решение $y_0(t, z)$ претерпевает конечные скачки, вычисляемые по правилам (3.12). Однако в силу неравенства (3.4)

и оценки $\sigma_0 < a_0 - 1$ функция $y_0(t + T_0, z)$ оказывается непрерывной на нужном отрезке $-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$. Тем самым, условие (3.4) гарантирует выполнение требуемого включения $\Pi_0(\varphi) \in \mathcal{F}$ при всех $\varphi \in S$.

Завершая описание подготовительной части, рассмотрим производные Фреше $\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi)$, $\partial_\varphi \Pi_0(\varphi)$ операторов (3.9), (3.10) по переменной φ . Проводя соответствующий подсчет, убеждаемся, что в данном случае эти производные представляют собой линейные операторы, действующие в пространстве

$$\mathcal{F}_0 = \{g_0(t) = (g_{1,0}(t), g_{2,0}(t)) \in \mathcal{F} : g_{1,0}(-\sigma_0) = 0\} \quad (3.13)$$

с нормой (3.7), а результаты их применения к произвольному элементу $g_0(t) \in \mathcal{F}_0$ задаются соответственно равенствами

$$\begin{aligned} \partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi)g_0 = & (g_1(t + T_\varphi, \varepsilon), g_2(t + T_\varphi, \varepsilon)) \\ & - l(g_0)(\dot{x}_\varphi(t + T_\varphi, \varepsilon), \dot{y}_\varphi(t + T_\varphi, \varepsilon)), \quad -1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0; \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\partial_\varphi \Pi_0(\varphi)g_0 = \left(0, \frac{\partial y_0}{\partial z}(t + T_0, z) \Big|_{z=\varphi_2(-\sigma_0)}\right) g_{2,0}(-\sigma_0), \quad -1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0. \quad (3.15)$$

Здесь $g(t, \varepsilon) = (g_1(t, \varepsilon), g_2(t, \varepsilon))$, $-\sigma_0 \leq t \leq T_\varphi - \sigma_0$, – решение линейной системы

$$\begin{aligned} \dot{g}_1 &= a_{11}(t, \varepsilon)g_1(t - 1) + a_{12}(t, \varepsilon)g_2, \\ \dot{g}_2 &= a_{21}(t, \varepsilon)g_1(t - 1) + a_{22}(t, \varepsilon)g_2 + a_{23}(t, \varepsilon)g_2(t - 1) \end{aligned} \quad (3.16)$$

с коэффициентами

$$a_{11} = \frac{\partial F}{\partial x}(x, \varepsilon) \Big|_{x=x_\varphi(t-1, \varepsilon)}, \quad a_{12} = \varepsilon d \exp(y_\varphi(t, \varepsilon)), \quad (3.17)$$

$$a_{21} = \frac{\partial G}{\partial x}(x, y, \varepsilon) \Big|_{x=x_\varphi(t-1, \varepsilon), y=y_\varphi(t-1, \varepsilon)}, \quad a_{22} = -2d \operatorname{ch}(y_\varphi(t, \varepsilon)), \quad (3.18)$$

$$a_{23} = \frac{\partial G}{\partial y}(x, y, \varepsilon) \Big|_{x=x_\varphi(t-1, \varepsilon), y=y_\varphi(t-1, \varepsilon)} \quad (3.19)$$

и начальной функцией $g_0(t)$ из пространства (3.13), а функционал $l: \mathcal{F}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ определен аналогичным (2.52) соотношением

$$l(g_0) = \frac{g_1(T_\varphi - \sigma_0, \varepsilon)}{\dot{x}_\varphi(T_\varphi - \sigma_0, \varepsilon)}. \quad (3.20)$$

Зададимся естественно возникающим вопросом о связи между операторами (3.9) и (3.10). Ответ на него содержится в следующем утверждении.

ТЕОРЕМА 3.1 (о C^1 -сходимости). Пусть выполнено условие (3.4) и множество S выбрано описанным выше способом. Тогда найдется такое достаточно малое $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(S) > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ оператор Π_ε определен на S и удовлетворяет предельным равенствам

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\varphi \in S} \|\Pi_\varepsilon(\varphi) - \Pi_0(\varphi)\|_{\mathcal{F}} = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\varphi \in S} \|\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi) - \partial_\varphi \Pi_0(\varphi)\|_{\mathcal{F}_0 \rightarrow \mathcal{F}_0} = 0. \quad (3.21)$$

Обоснованию данной теоремы посвятим отдельный пункт. Здесь же остановимся на одном важном следствии из C^1 -сходимости, касающемся существования и устойчивости периодических решений системы (3.5).

Заметим, что в силу (3.11), (3.12) предельный оператор (3.10) является надстройкой над соответствующим одномерным отображением

$$z \rightarrow \Phi(z) \stackrel{\text{def}}{=} y_0(t, z)|_{t=T_0-\sigma_0}, \quad (3.22)$$

где $z = \varphi_2(-\sigma_0)$. Действительно, любой неподвижной точке $z = z_*$ этого отображения соответствует неподвижная точка

$$\varphi_*(t) = (\varphi_1^*(t), \varphi_2^*(t)): \quad \varphi_1^*(t) = x_0(t), \quad \varphi_2^*(t) = y_0(t+T_0, z_*), \quad -1-\sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0,$$

оператора Π_0 (при условии, конечно, что $\varphi_2^*(t)$ принадлежит множеству S_2 из (3.8)). Последнее же требование не является ограничением, поскольку, как уже говорилось выше, S_2 можно считать произвольным замкнутым и ограниченным подмножеством пространства $C[-1-\sigma_0, -\sigma_0]$.

Верно и обратное утверждение: если $\varphi_*(t) = (\varphi_1^*(t), \varphi_2^*(t)) \in S$ есть неподвижная точка оператора Π_0 , то с необходимостью $\varphi_1^*(t) = x_0(t)$, а величина $z_* = \varphi_2^*(-\sigma_0)$ такова, что $\Phi(z_*) = z_*$. Кроме того, в силу (3.15) спектр линейного оператора $\partial_\varphi \Pi_0(\varphi_*)$ состоит из двух точек: собственного значения $\mu = 0$ бесконечной кратности и простого собственного значения $\mu = \Phi'(z_*)$.

Суммируя изложенные факты, приходим к выводу, что справедлив следующий результат.

ТЕОРЕМА 3.2 (о соответствии). *Каждой неподвижной точке $z = z_*$, $|\Phi'(z_*)| \neq 1$ отображения (3.22) соответствует релаксационный цикл системы (3.5), существующий при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ и являющийся экспоненциально орбитально устойчивым (неустойчивым) в случае $|\Phi'(z_*)| < 1$ (> 1).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обратимся сначала к вопросу о существовании релаксационного цикла. В связи с этим обозначим через $\varphi_*(t) \in S$ неподвижную точку оператора (3.10), отвечающую неподвижной точке $z = z_*$ отображения (3.22). Рассмотрим, далее, уравнение

$$\Pi_\varepsilon(\varphi) - \varphi = 0 \quad (3.23)$$

и заметим, что в силу предельных равенств (3.21) и отмеченных выше спектральных свойств оператора $\partial_\varphi \Pi_0(\varphi_*)$ к данному уравнению в точке $(\varphi, \varepsilon) = (\varphi_*(t), 0)$ пространства $\mathcal{F} \times \mathbb{R}$ применима теорема о неявном отображении по переменной φ . Таким образом, из (3.23) однозначно определяется неподвижная точка

$$\varphi = \varphi_*^\varepsilon(t) \in S, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\varphi_*^\varepsilon(t) - \varphi_*(t)\|_{\mathcal{F}} = 0,$$

оператора (3.9), а отвечающее ей решение $(x_\varphi(t, \varepsilon), y_\varphi(t, \varepsilon))|_{\varphi=\varphi_*^\varepsilon}$ системы (3.5) будет, очевидно, периодическим с периодом $T = T_\varphi|_{\varphi=\varphi_*^\varepsilon}$.

Перейдем теперь к вопросу об устойчивости найденного периодического решения. Из проделанных выше построений следует, что все его мультипликаторы (за исключением простого единичного) являются собственными значениями

оператора $\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi_*^\varepsilon)$. Последний же в силу вытекающего из (3.21) равенства

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi_*^\varepsilon) - \partial_\varphi \Pi_0(\varphi_*)\|_{\mathcal{T}_0 \rightarrow \mathcal{T}_0} = 0$$

имеет одно простое собственное значение, асимптотически близкое к $\Phi'(z_*)$, а остальной его спектр лежит в круге $\{\mu \in \mathbb{C}: |\mu| \leq r_0\}$ асимптотически малого по ε радиуса $r_0 = r_0(\varepsilon)$. Таким образом, свойства устойчивости рассматриваемого цикла совпадают с аналогичными свойствами неподвижной точки $z = z_*$ отображения (3.22). Теорема 3.2 доказана.

Установленная теорема сводит интересующую нас проблему автоволновых процессов системы (3.5) к поиску неподвижных точек одномерного отображения (3.22). Вопрос же о количестве и устойчивости последних будет изучен отдельно в п. 3.3.

3.2. Обоснование C^1 -сходимости. Доказательство соотношений (3.21) базируется на построении равномерной по $\varphi \in S$ асимптотики введенного выше решения $(x_\varphi(t, \varepsilon), y_\varphi(t, \varepsilon))$ системы (3.5). Как и в предыдущем разделе, соответствующий анализ начнем с отрезка $-\sigma_0 \leq t \leq 1 - \sigma_0$, на котором в силу условий (2.11), наложенных на $\varphi_1(t)$, и свойств (1.6) функции $f(x)$ справедливы равномерные по $\varphi \in S$ асимптотические представления

$$\begin{aligned} F(\varphi_1(t-1), \varepsilon) &= 1 + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \\ G(\varphi_1(t-1), \varphi_2(t-1), \varepsilon) &= O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \\ q &= \text{const} > 0. \end{aligned}$$

Учитывая эти равенства, из (3.5) выводим, что при рассматриваемых t с экспоненциальной по ε точностью

$$(x_\varphi(t, \varepsilon), y_\varphi(t, \varepsilon)) = (\tilde{x}(t, z, \varepsilon), \tilde{y}(t, z, \varepsilon)), \quad (3.24)$$

где функции $\tilde{x}, \tilde{y}$, определяемые из задачи Коши

$$\dot{x} = \varepsilon d(\exp y - 1) + 1, \quad \dot{y} = -2d \operatorname{sh} y, \quad x|_{t=-\sigma_0} = -\sigma_0, \quad y|_{t=-\sigma_0} = z, \quad (3.25)$$

имеют вид

$$\tilde{x} = t + \varepsilon d \int_{-\sigma_0}^t [\exp(y_0(s, z)) - 1] ds, \quad \tilde{y} = y_0(t, z). \quad (3.26)$$

Добавим еще, что здесь и ниже параметр z задан равенством $z = \varphi_2(-\sigma_0)$, а значит, меняется на некотором компактном подмножестве числовой оси.

На следующем этапе фиксируем постоянную $\delta \in (0, 1)$ и рассмотрим отрезок $1 - \sigma_0 \leq t \leq 1 - \varepsilon^\delta$. Разбивая его, если это необходимо, на части длины не более единицы и применяя метод шагов (см. комментарий после формулы (2.32)), убеждаемся в пригодности равенств (3.24) вплоть до точки $t = 1 - \varepsilon^\delta$. Однако в отличие от предыдущего случая здесь в силу оценки $x_\varphi(t-1, \varepsilon) \leq -M\varepsilon^\delta$,

$M = \text{const} > 0$, имеющей место при значениях t , близких к $t = 1 - \varepsilon^\delta$, указанные равенства выполняются с точностью до $O(\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta}))$, $q = \text{const} > 0$.

Обратимся, далее, к отрезку $1 - \varepsilon^\delta \leq t \leq 1 + \varepsilon^\delta$. Нетрудно увидеть, что на этом промежутке времени интересующее нас решение $(x_\varphi(t, \varepsilon), y_\varphi(t, \varepsilon))$ системы (3.5) совпадает (с точностью до величин порядка $\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta})$, $q = \text{const} > 0$) с решением задачи Коши

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon d(\exp y - 1) + F_z(t, \varepsilon), & \dot{y} &= -2d \operatorname{sh} y + G_z(t, \varepsilon), \\ x|_{t=1-\varepsilon^\delta} &= x_z(\varepsilon), & y|_{t=1-\varepsilon^\delta} &= y_z(\varepsilon), \end{aligned} \quad (3.27)$$

где

$$\begin{aligned} F_z &= F(\tilde{x}(t-1, z, \varepsilon), \varepsilon), & G_z &= G(\tilde{x}(t-1, z, \varepsilon), \tilde{y}(t-1, z, \varepsilon), \varepsilon), \\ x_z(\varepsilon) &= \tilde{x}(1 - \varepsilon^\delta, z, \varepsilon), & y_z(\varepsilon) &= \tilde{y}(1 - \varepsilon^\delta, z, \varepsilon), \end{aligned} \quad (3.28)$$

а $\tilde{x}, \tilde{y}$ — функции из (3.24).

Асимптотический анализ задачи (3.27) будем проводить в переменных $v_1 = (x-1)/\varepsilon$, $v_2 = y$, $\tau = (t-1)/\varepsilon$, после перехода к которым она принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{dv_1}{d\tau} &= \varepsilon d(\exp v_2 - 1) + H_1(\tau, z, \varepsilon), & \frac{dv_2}{d\tau} &= -2\varepsilon d \operatorname{sh} v_2 + H_2(\tau, z, \varepsilon), \\ v_1|_{\tau=-\varepsilon^{\delta-1}} &= \bar{v}_1(z, \varepsilon), & v_2|_{\tau=-\varepsilon^{\delta-1}} &= \bar{v}_2(z, \varepsilon). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Здесь $\bar{v}_1 = (x_z(\varepsilon) - 1)/\varepsilon$, $\bar{v}_2 = y_z(\varepsilon)$, переменная τ меняется на асимптотически большом отрезке $J(\varepsilon) = [-\varepsilon^{\delta-1}, \varepsilon^{\delta-1}]$, а функции H_1, H_2 задаются следующими равенствами:

$$\begin{aligned} H_1 &= f(x) \quad \text{при } x = \exp\left(\frac{\tilde{x}(\varepsilon\tau, z, \varepsilon)}{\varepsilon}\right), \\ H_1 + H_2 &= f(x) \quad \text{при } x = \exp\left(\frac{\tilde{x}(\varepsilon\tau, z, \varepsilon)}{\varepsilon} + \tilde{y}(\varepsilon\tau, z, \varepsilon)\right). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Обозначим через $(v_1(\tau, z, \varepsilon), v_2(\tau, z, \varepsilon))$, $\tau \in J(\varepsilon)$, решение задачи (3.29). Для отыскания главных членов его асимптотики положим в уравнениях из (3.29) $\varepsilon = 0$ и учтем формулы (3.26), (3.30). В результате приходим к системе

$$\frac{dv_1}{d\tau} = f(\exp(\tau + \kappa_1)), \quad \frac{dv_2}{d\tau} = f(\exp(\tau + \kappa_2)) - f(\exp(\tau + \kappa_1)), \quad (3.31)$$

где функции $\kappa_j = \kappa_j(z)$, $j = 1, 2$, имеют вид

$$\kappa_1 = d \int_{-\sigma_0}^0 [\exp(y_0(s, z)) - 1] ds, \quad \kappa_2 = \kappa_1 + y_0(0, z). \quad (3.32)$$

Нетрудно проверить, что система (3.31) допускает решение $(v_1^0(\tau, z), v_2^0(\tau, z))$ с компонентами

$$v_1^0 = v(\tau + \kappa_1) + \kappa_3, \quad v_2^0 = v(\tau + \kappa_2) - v(\tau + \kappa_1) + \kappa_4, \quad (3.33)$$

где $v(\tau)$ – функция (2.18), а $\varkappa_3(z)$, $\varkappa_4(z)$ определяются аналогичными (3.32) равенствами

$$\varkappa_3 = d \int_0^1 [\exp(y_0(s, z)) - 1] ds, \quad \varkappa_4 = y_0(1 - 0, z) - y_0(0, z). \quad (3.34)$$

Как оказывается, именно это решение и является искомым. Точнее говоря, справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 3.1. *Равномерно по $\tau \in J(\varepsilon)$ и по параметру z выполняются асимптотические равенства*

$$v_j(\tau, z, \varepsilon) = v_j^0(\tau, z) + O(\varepsilon^\delta), \quad \frac{\partial v_j}{\partial z}(\tau, z, \varepsilon) = \frac{\partial v_j^0}{\partial z}(\tau, z) + O(\varepsilon^\delta), \quad j = 1, 2. \quad (3.35)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставляя в (3.29) соотношения $v_j = v_j^0 + h_j$, $j = 1, 2$, для h_1 , h_2 приходим к задаче Коши

$$\begin{aligned} \frac{dh_1}{d\tau} &= \varepsilon d(\exp(v_2^0(\tau, z) + h_2) - 1) \\ &\quad + H_1(\tau, z, \varepsilon) - H_1(\tau, z, 0), \quad h_1|_{\tau=-\varepsilon^{\delta-1}} = \omega_1(z, \varepsilon), \\ \frac{dh_2}{d\tau} &= -2\varepsilon d \operatorname{sh}(v_2^0(\tau, z) + h_2) \\ &\quad + H_2(\tau, z, \varepsilon) - H_2(\tau, z, 0), \quad h_2|_{\tau=-\varepsilon^{\delta-1}} = \omega_2(z, \varepsilon), \end{aligned} \quad (3.36)$$

где

$$\omega_j(z, \varepsilon) = \bar{v}_j(z, \varepsilon) - v_j^0(\tau, z)|_{\tau=-\varepsilon^{\delta-1}}, \quad j = 1, 2. \quad (3.37)$$

Далее, полагая $h_3 = \partial h_1 / \partial z$, $h_4 = \partial h_2 / \partial z$, дополним (3.36) соответствующими уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{dh_3}{d\tau} &= \varepsilon d \exp(v_2^0(\tau, z) + h_2) \left(\frac{\partial v_2^0}{\partial z} + h_4 \right) + \frac{\partial H_1}{\partial z}(\tau, z, \varepsilon) - \frac{\partial H_1}{\partial z}(\tau, z, 0), \\ \frac{dh_4}{d\tau} &= -2\varepsilon d \operatorname{ch}(v_2^0(\tau, z) + h_2) \left(\frac{\partial v_2^0}{\partial z} + h_4 \right) + \frac{\partial H_2}{\partial z}(\tau, z, \varepsilon) - \frac{\partial H_2}{\partial z}(\tau, z, 0) \end{aligned} \quad (3.38)$$

и начальными условиями

$$h_3|_{\tau=-\varepsilon^{\delta-1}} = \frac{\partial \omega_1}{\partial z}(z, \varepsilon), \quad h_4|_{\tau=-\varepsilon^{\delta-1}} = \frac{\partial \omega_2}{\partial z}(z, \varepsilon). \quad (3.39)$$

И наконец, перейдем от получившейся задачи Коши (3.36)–(3.39) к эквивалентной системе интегральных уравнений

$$\begin{aligned} h_1 &= \omega_1 + \int_{-\varepsilon^{\delta-1}}^{\tau} \Psi_1(s, z, \varepsilon, h_2) ds, & h_2 &= \omega_2 + \int_{-\varepsilon^{\delta-1}}^{\tau} \Psi_2(s, z, \varepsilon, h_2) ds, \\ h_3 &= \frac{\partial \omega_1}{\partial z} + \int_{-\varepsilon^{\delta-1}}^{\tau} \Psi_3(s, z, \varepsilon, h_2, h_4) ds, & h_4 &= \frac{\partial \omega_2}{\partial z} + \int_{-\varepsilon^{\delta-1}}^{\tau} \Psi_4(s, z, \varepsilon, h_2, h_4) ds, \end{aligned} \quad (3.40)$$

где для краткости через Ψ_j , $j = 1, \dots, 4$, обозначены правые части соответствующих дифференциальных уравнений из (3.36), (3.38).

Остановимся на некоторых свойствах функций $\omega_j(z, \varepsilon)$, $H_j(\tau, z, \varepsilon)$, $j = 1, 2$, и $v_2^0(\tau, z)$, необходимых для анализа системы (3.40). Учитывая в (3.37) явный вид начальных условий $\bar{v}_j(z, \varepsilon)$, $j = 1, 2$, из (3.29) и опираясь на формулы (3.32)–(3.34), (2.18), (2.22), приходим к выводу, что равномерно по z

$$\omega_j(z, \varepsilon) = O(\varepsilon^\delta), \quad \frac{\partial \omega_j}{\partial z}(z, \varepsilon) = O(\varepsilon^\delta), \quad j = 1, 2. \quad (3.41)$$

Перейдем теперь к функциям H_1 , H_2 . Из явных формул (3.30) и оценки (2.23) вытекают неравенства вида

$$|H_j(\tau, z, \varepsilon) - H_j(\tau, z, 0)| \leq M\varepsilon^\delta \exp(-|\tau|), \quad \tau \in J(\varepsilon), \quad j = 1, 2; \quad (3.42)$$

здесь и ниже одной и той же буквой M обозначаются различные универсальные (не зависящие от ε , τ , z) положительные постоянные, точные значения которых несущественны.

Обоснование аналогичных (3.42) оценок для $\partial H_j / \partial z$, $j = 1, 2$, базируется на асимптотическом разложении из (1.6). Дифференцируя его два раза подряд, последовательно убеждаемся, что

$$\begin{aligned} |f'(x) + xf''(x)| &\leq \frac{M}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \\ |x_1 f'(x_1) - x_2 f'(x_2)| &\leq \frac{M}{1 + \min(x_1^2, x_2^2)} |x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Применяя затем второе неравенство (3.43) к формулам, получающимся из соотношений (3.30) после дифференцирования по z , приходим к выводу, что

$$\left| \frac{\partial H_j}{\partial z}(\tau, z, \varepsilon) - \frac{\partial H_j}{\partial z}(\tau, z, 0) \right| \leq M\varepsilon^\delta \exp(-|\tau|), \quad \tau \in J(\varepsilon), \quad j = 1, 2. \quad (3.44)$$

Обратим внимание, что в правые части уравнений из (3.36), (3.38) входят функции v_2^0 и $\partial v_2^0 / \partial z$. А так как отрезок $J(\varepsilon)$, на котором рассматривается система (3.40), асимптотически велик, то в дальнейшем нам потребуется информация о поведении этих функций при $\tau \rightarrow \pm\infty$. Для ее получения учтем в (3.33) известные асимптотические формулы (2.22), (2.27). В результате имеем равномерные по z предельные равенства

$$\begin{aligned} v_2^0 &= y_0(1-0, z) + O(\exp \tau), \quad \frac{\partial v_2^0}{\partial z} = \frac{\partial y_0}{\partial z}(1-0, z) + O(\exp \tau), \quad \tau \rightarrow -\infty; \\ v_2^0 &= y_0(1+0, z) + O(\exp(-\tau)), \quad \frac{\partial v_2^0}{\partial z} = \frac{\partial y_0}{\partial z}(1+0, z) + O(\exp(-\tau)), \quad \tau \rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (3.45)$$

где $y_0(1+0, z)$ и $y_0(1-0, z)$ связаны требуемым соотношением из (3.12). Добавим еще, что свойства (3.45) гарантируют равномерную по τ , z ограниченность указанных функций.

Приступим непосредственно к исследованию системы (3.40). В связи с этим обозначим через $V(h)$, $h = (h_1, h_2, h_3, h_4)$, оператор, порожденный ее правыми частями в пространстве $C(J(\varepsilon); \mathbb{R}^4)$ с нормой $\|h\| = \max_j (\max_{\tau \in J(\varepsilon)} |h_j|)$. Объединяя свойства (3.41) с оценками (3.42), (3.44) и используя факт ограниченности по τ , z функций v_2^0 , $\partial v_2^0 / \partial z$, убеждаемся, что данный оператор преобразует

в себя замкнутый шар пространства $C(J(\varepsilon); \mathbb{R}^4)$ с центром в нуле и радиусом вида $r = M\varepsilon^\delta$ и оказывается сжимающим (с константой сжатия вида $M\varepsilon^\delta$). Таким образом, он имеет в упомянутом шаре единственную неподвижную точку, компоненты $h_j(\tau, z, \varepsilon)$, $j = 1, \dots, 4$, которой являются одновременно и компонентами решения задачи Коши (3.36)–(3.39). Лемма 3.1 доказана.

Возвращаясь к исходному решению $(x_\varphi(t, \varepsilon), y_\varphi(t, \varepsilon))$, отметим, что в силу (3.35) для его компонент равномерно по $t \in [1 - \varepsilon^\delta, 1 + \varepsilon^\delta]$, $\varphi \in S$ справедливы асимптотические представления

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = 1 + \varepsilon v_1^0(\tau, z)|_{\tau=(t-1)/\varepsilon} + O(\varepsilon^{1+\delta}), \quad y_\varphi(t, \varepsilon) = v_2^0(\tau, z)|_{\tau=(t-1)/\varepsilon} + O(\varepsilon^\delta). \quad (3.46)$$

Из этих формул, в частности, следует, что на рассматриваемом асимптотически малом промежутке изменения t компонента $y_\varphi(t, \varepsilon)$ меняется существенно. А именно, из (3.45), (3.46) вытекает, что $y_\varphi(1 - \varepsilon^\delta, \varepsilon) \rightarrow y_0(1 - 0, z)$, $y_\varphi(1 + \varepsilon^\delta, \varepsilon) \rightarrow y_0(1 + 0, z)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Тем самым, придерживаясь принятой в теории релаксационных колебаний терминологии, данный отрезок будем называть участком быстрых движений.

Установленные выше равенства (3.24), (3.46) гарантируют выполнение на очередном отрезке $1 + \varepsilon^\delta \leq t \leq 2 + \varepsilon^\delta$ оценки вида $x_\varphi(t - 1, \varepsilon) \geq M\varepsilon^\delta$, $M = \text{const} > 0$. А отсюда и из известных свойств функции $f(x)$ (см. (1.6)) заключаем, что при указанных t после отбрасывания добавок, обладающих равномерно по $\varphi \in S$ порядком малости $\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta})$, $q = \text{const} > 0$, для $x_\varphi(t, \varepsilon)$, $y_\varphi(t, \varepsilon)$ получаются аналогичные (3.24) формулы

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = \tilde{x}(t, z, \varepsilon), \quad y_\varphi(t, \varepsilon) = \tilde{y}(t, z, \varepsilon), \quad (3.47)$$

где теперь $(\tilde{x}, \tilde{y})$ – решение аналогичной (3.25) задачи Коши

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon d(\exp y - 1) - a_0, & \dot{y} &= -2d \operatorname{sh} y, \\ x|_{t=1+\varepsilon^\delta} &= 1 + \varepsilon v_1(\tau, z, \varepsilon)|_{\tau=\varepsilon^\delta-1}, & y|_{t=1+\varepsilon^\delta} &= v_2(\tau, z, \varepsilon)|_{\tau=\varepsilon^\delta-1}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Остановимся на асимптотических свойствах правых частей из (3.47). Учитывая в (3.48) асимптотические представления (3.35) и характер поведения при $\tau \rightarrow +\infty$ функций (3.33) (см. (2.27), (3.45)), после несложных преобразований приходим к выводу, что равномерно по t, z

$$\tilde{x} = 1 - a_0(t - 1) + \varepsilon d \int_1^t [\exp(y_0(s, z)) - 1] ds + \varepsilon c(z) + O(\varepsilon^{1+\delta}), \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial \tilde{x}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\varepsilon d \int_1^t [\exp(y_0(s, z)) - 1] ds + \varepsilon c(z) \right) + O(\varepsilon^{1+\delta});$$

$$\tilde{y} = y_0(t, z) + O(\varepsilon^\delta), \quad \frac{\partial \tilde{y}}{\partial z} = \frac{\partial y_0}{\partial z}(t, z) + O(\varepsilon^\delta), \quad (3.50)$$

где

$$c(z) = d \int_{-\sigma_0}^1 [\exp(y_0(s, z)) - 1] ds - (1 + a_0) d \int_{-\sigma_0}^0 [\exp(y_0(s, z)) - 1] ds + c_0, \quad (3.51)$$

а c_0 – постоянная (2.28).

Необходимо отметить, что равенства (3.47), установленные нами при $t \in [1 + \varepsilon^\delta, 2 + \varepsilon^\delta]$, на самом деле сохраняются (вместе со свойствами (3.49)–(3.51)) на более широком промежутке $1 + \varepsilon^\delta \leq t \leq t_0 + 1 - \varepsilon^\delta$. Связано это с тем, что при указанных t остается в силе оценка вида $x_\varphi(t-1, \varepsilon) \geq M\varepsilon^\delta$, $M = \text{const} > 0$, справедливость которой проверяется методом шагов.

Последующий анализ вполне аналогичен описанному выше. Действительно, на очередном участке быстрых движений, т. е. при $t_0 + 1 - \varepsilon^\delta \leq t \leq t_0 + 1 + \varepsilon^\delta$, с точностью до $O(\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta}))$, $q = \text{const} > 0$, решение $(x_\varphi(t, \varepsilon), y_\varphi(t, \varepsilon))$ совпадает с решением задачи Коши, получающейся из (3.27), (3.28) в результате замены начального момента времени $t = 1 - \varepsilon^\delta$ на $t = t_0 + 1 - \varepsilon^\delta$, а функций $\tilde{x}, \tilde{y}$ – на соответствующие функции из (3.47). Далее, в переменных $w_1 = (x + a_0)/\varepsilon$, $w_2 = y$, $\tau = (t - t_0 - 1)/\varepsilon$ упомянутая задача принимает аналогичный (3.29) вид

$$\begin{aligned} \frac{dw_1}{d\tau} &= \varepsilon d(\exp w_2 - 1) + H_1(\tau, z, \varepsilon), & \frac{dw_2}{d\tau} &= -2\varepsilon d \operatorname{sh} w_2 + H_2(\tau, z, \varepsilon), \\ w_1|_{\tau=-\varepsilon^{\delta-1}} &= \bar{w}_1(z, \varepsilon), & w_2|_{\tau=-\varepsilon^{\delta-1}} &= \bar{w}_2(z, \varepsilon). \end{aligned} \quad (3.52)$$

Здесь $\bar{w}_1 = (\tilde{x}(t_0 + 1 - \varepsilon^\delta, z, \varepsilon) + a_0)/\varepsilon$, $\bar{w}_2 = \tilde{y}(t_0 + 1 - \varepsilon^\delta, z, \varepsilon)$, переменная τ по-прежнему меняется на отрезке $J(\varepsilon)$, а добавки H_1, H_2 определены равенствами (3.30), в которых, естественно, вместо функций (3.26) фигурируют их аналоги из (3.47).

Как и выше, наряду с (3.52) рассмотрим соответствующую предельную систему. Из соотношений (3.30), (3.49)–(3.51) вытекает, что в данном случае эта система записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{dw_1}{d\tau} &= f(\exp(-a_0\tau + c_0 + \theta_1)), \\ \frac{dw_2}{d\tau} &= f(\exp(-a_0\tau + c_0 + \theta_2)) - f(\exp(-a_0\tau + c_0 + \theta_1)), \end{aligned} \quad (3.53)$$

где функции $\theta_j = \theta_j(z)$, $j = 1, 2$, задаются формулами

$$\begin{aligned} \theta_1 &= d \int_{-\sigma_0}^{t_0} [\exp(y_0(s, z)) - 1] ds \\ &\quad - (1 + a_0)d \int_{-\sigma_0}^0 [\exp(y_0(s, z)) - 1] ds, & \theta_2 &= \theta_1 + y_0(t_0, z). \end{aligned} \quad (3.54)$$

Непосредственная проверка показывает, что система (3.53) имеет решение с компонентами

$$w_1^0(\tau, z) = w\left(\tau - \frac{\theta_1}{a_0}\right) + \theta_3, \quad w_2^0(\tau, z) = w\left(\tau - \frac{\theta_2}{a_0}\right) - w\left(\tau - \frac{\theta_1}{a_0}\right) + \theta_4, \quad (3.55)$$

где

$$\theta_3 = d \int_{t_0}^{t_0+1} [\exp(y_0(s, z)) - 1] ds, \quad \theta_4 = y_0(t_0 + 1 - 0, z) - y_0(t_0, z), \quad (3.56)$$

а $w(\tau)$ – функция (2.34). Как и в предыдущем случае, выбор именно этого решения продиктован двумя обстоятельствами: оно с точностью до $O(\varepsilon^\delta)$

удовлетворяет начальным условиям из (3.52) и обладает аналогичными (3.45) свойствами

$$\begin{aligned} w_2^0 &= y_0(t_0 + 1 - 0, z) + O(\exp(a_0\tau)), & \tau \rightarrow -\infty; \\ \frac{\partial w_2^0}{\partial z} &= \frac{\partial y_0}{\partial z}(t_0 + 1 - 0, z) + O(\exp(a_0\tau)), & \tau \rightarrow -\infty; \\ w_2^0 &= y_0(t_0 + 1 + 0, z) + O(\exp(-a_0\tau)), & \tau \rightarrow +\infty; \\ \frac{\partial w_2^0}{\partial z} &= \frac{\partial y_0}{\partial z}(t_0 + 1 + 0, z) + O(\exp(-a_0\tau)), & \tau \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Более того, справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 3.2. *Для решения $(w_1(\tau, z, \varepsilon), w_2(\tau, z, \varepsilon))$ задачи Коши (3.52) равномерно по $\tau \in J(\varepsilon)$ и по параметру z выполняются асимптотические равенства*

$$w_j(\tau, z, \varepsilon) = w_j^0(\tau, z) + O(\varepsilon^\delta), \quad \frac{\partial w_j}{\partial z}(\tau, z, \varepsilon) = \frac{\partial w_j^0}{\partial z}(\tau, z) + O(\varepsilon^\delta), \quad j = 1, 2, \quad (3.58)$$

где w_j^0 , $j = 1, 2$, – функции, определяемые формулами (3.54)–(3.57).

На доказательстве этой леммы не останавливаемся, поскольку оно с существенными изменениями повторяет обоснование леммы 3.1. Приведем сразу вытекающие из (3.58) итоговые формулы

$$\begin{aligned} x_\varphi(t, \varepsilon) &= -a_0 + \varepsilon w_1^0(\tau, z)|_{\tau=(t-t_0-1)/\varepsilon} + O(\varepsilon^{1+\delta}), \\ y_\varphi(t, \varepsilon) &= w_2^0(\tau, z)|_{\tau=(t-t_0-1)/\varepsilon} + O(\varepsilon^\delta), \end{aligned} \quad (3.59)$$

равномерные по $t \in [t_0 + 1 - \varepsilon^\delta, t_0 + 1 + \varepsilon^\delta]$, $\varphi \in S$.

Заключительный этап построения асимптотики решения $(x_\varphi(t, \varepsilon), y_\varphi(t, \varepsilon))$ связан с рассмотрением отрезка $t_0 + 1 + \varepsilon^\delta \leq t \leq T_0 + \varepsilon^\delta$. Применяя уже неоднократно упоминавшийся метод шагов, последовательно убеждаемся, что при указанных t имеют место оценки $x_\varphi(t - 1, \varepsilon) \leq -M\varepsilon^\delta$, $M = \text{const} > 0$, и соответствующие формулы (с точностью до $O(\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta}))$, $q = \text{const} > 0$)

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = \tilde{x}(t, z, \varepsilon), \quad y_\varphi(t, \varepsilon) = \tilde{y}(t, z, \varepsilon), \quad (3.60)$$

где $(\tilde{x}, \tilde{y})$ – решение задачи Коши

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon d(\exp y - 1) + 1, & \dot{y} &= -2d \operatorname{sh} y, \\ x|_{t=t_0+1+\varepsilon^\delta} &= -a_0 + \varepsilon w_1(\tau, z, \varepsilon)|_{\tau=\varepsilon^\delta-1}, & y|_{t=t_0+1+\varepsilon^\delta} &= w_2(\tau, z, \varepsilon)|_{\tau=\varepsilon^\delta-1}. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Несложный анализ задачи (3.61), опирающийся на равенства (3.58), приводит к асимптотическим представлениям

$$\tilde{x} = t - T_0 + \varepsilon d \int_{t_0+1}^t [\exp(y_0(s, z)) - 1] ds + \varepsilon \left(\theta_3(z) - \frac{\theta_1(z)}{a_0} \right) + O(\varepsilon^{1+\delta}), \quad (3.62)$$

$$\tilde{y} = y_0(t, z) + O(\varepsilon^\delta), \quad (3.63)$$

справедливым равномерно по t, z и допускающим дифференцирование по переменной z .

Подведем промежуточный итог. Из формул (3.60), (3.62) и очевидного равенства $\dot{x}_\varphi(t, \varepsilon) = 1 + O(\varepsilon)$, равномерного по $t \in [t_0 + 1 + \varepsilon^\delta, T_0 + \varepsilon^\delta]$, $\varphi \in S$, заключаем, что требуемый корень $t = T_\varphi$ уравнения $x_\varphi(t - \sigma_0, \varepsilon) = -\sigma_0$ находится однозначно и допускает равномерную по $\varphi \in S$ асимптотику

$$T_\varphi = T_0 + O(\varepsilon), \quad (3.64)$$

где T_0 – величина (1.8). А отсюда, в свою очередь, вытекает, что оператор (3.9) заведомо определен на множестве S при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, где $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(S) > 0$ достаточно мало.

На следующем этапе просуммируем всю установленную выше информацию об асимптотическом поведении решения $(x_\varphi(t, \varepsilon), y_\varphi(t, \varepsilon))$ (см. (3.24), (3.26), (3.46), (3.47), (3.49)–(3.51), (3.59), (3.60), (3.62), (3.63)). В результате убеждаемся, что равномерно по $\varphi \in S$

$$\begin{aligned} \max_{-\sigma_0 \leq t \leq T_\varphi - \sigma_0} |x_\varphi(t, \varepsilon) - x_0(t)| &= O(\varepsilon), \\ \max_{t \in \Sigma(\varepsilon)} |y_\varphi(t, \varepsilon) - y_0(t, z)|_{z=\varphi_2(-\sigma_0)} &= O(\varepsilon^\delta), \end{aligned} \quad (3.65)$$

где $x_0(t)$ – функция (2.9), $y_0(t, z)$ – решение задачи (3.11), (3.12), а множество $\Sigma(\varepsilon)$ представляет собой отрезок $[-\sigma_0, T_\varphi - \sigma_0]$ с выброшенными интервалами $(1 - \varepsilon^\delta, 1 + \varepsilon^\delta)$, $(t_0 + 1 - \varepsilon^\delta, t_0 + 1 + \varepsilon^\delta)$. И наконец, объединяя формулы (3.64), (3.65), приходим к выводу о справедливости первого предельного равенства из (3.21).

Доказательство второго предельного соотношения из (3.21) помимо уже установленных асимптотических свойств решения $(x_\varphi(t, \varepsilon), y_\varphi(t, \varepsilon))$ требует знания асимптотики при $-\sigma_0 \leq t \leq T_\varphi - \sigma_0$ решения $(g_1(t, \varepsilon), g_2(t, \varepsilon))$ линейной системы (3.16) с произвольной начальной функцией $g_0(t)$ из пространства $\mathcal{F}_0$. Соответствующий анализ приводится ниже.

Как обычно, начнем с промежутка $-\sigma_0 \leq t \leq 1 - \sigma_0$. Учитывая в коэффициентах (3.17)–(3.19) явный вид функций F, G (см. (2.1), (3.6)) и формулы (3.24), (3.26), приходим к выводу, что равномерно по $t \in [-\sigma_0, 1 - \sigma_0]$, $\varphi \in S$

$$\begin{aligned} a_{11} &= O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), & a_{12} &= \varepsilon d \exp(\tilde{y}(t, z, \varepsilon)) + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \\ a_{21} &= O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), & a_{22} &= -2d \operatorname{ch}(\tilde{y}(t, z, \varepsilon)) + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \\ a_{23} &= O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), & q &= \operatorname{const} > 0. \end{aligned} \quad (3.66)$$

А отсюда, в свою очередь, следует, что на рассматриваемом отрезке

$$g_1 = \frac{\partial \tilde{x}}{\partial z}(t, z, \varepsilon) g_{2,0}(-\sigma_0) + \tilde{g}_1(t, \varepsilon), \quad g_2 = \frac{\partial \tilde{y}}{\partial z}(t, z, \varepsilon) g_{2,0}(-\sigma_0) + \tilde{g}_2(t, \varepsilon), \quad (3.67)$$

где $(\tilde{x}, \tilde{y})$ – решение задачи Коши (3.25), а добавки $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2$ удовлетворяют оценкам вида

$$\max_t |\tilde{g}_j(t, \varepsilon)| \leq M \exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right) \|g_0\|_{\mathcal{F}_0}, \quad j = 1, 2, \quad (3.68)$$

с некоторыми универсальными (не зависящими от ε , φ , g_0) положительными постоянными M и q .

Обратимся, далее, к отрезку $1 - \sigma_0 \leq t \leq 1 - \varepsilon^\delta$. Снова опираясь на асимптотические представления (3.24), (3.26), замечаем, что на нем формулы (3.66) сохраняются, но с остатками порядка $\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta})$, $q = \text{const} > 0$. А это означает, что при указанных t сохраняются и асимптотические равенства (3.67). Однако теперь для соответствующих добавок $\tilde{g}_j(t, \varepsilon)$, $j = 1, 2$, вместо (3.68) справедливы оценки вида

$$\max_t |\tilde{g}_j(t, \varepsilon)| \leq M \exp\left(-\frac{q}{\varepsilon^{1-\delta}}\right) \|g_0\|_{\mathcal{F}_0}, \quad j = 1, 2. \quad (3.69)$$

На очередном отрезке $1 - \varepsilon^\delta \leq t \leq 1 + \varepsilon^\delta$ функции $g_j(t - 1, \varepsilon)$, $j = 1, 2$, задаются уже известными равенствами (3.67). Учитывая данное обстоятельство и опираясь на установленные ранее асимптотические представления для $x_\varphi(t - 1, \varepsilon)$, $y_\varphi(t - 1, \varepsilon)$, $y_\varphi(t, \varepsilon)$ (см. (3.24), (3.26), (3.46)), приходим к выводу, что при $t \in [1 - \varepsilon^\delta, 1 + \varepsilon^\delta]$ с точностью до величин порядка $\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta})$, $q = \text{const} > 0$, компоненты $g_1(t, \varepsilon)$, $g_2(t, \varepsilon)$ определяются из задачи Коши

$$\begin{aligned} \dot{g}_1 &= \varepsilon d \exp\{v_2(\tau, z, \varepsilon)|_{\tau=(t-1)/\varepsilon}\} g_2 + g_{2,0}(-\sigma_0) \frac{\partial}{\partial z}(F_z(t, \varepsilon)), \\ \dot{g}_2 &= -2d \operatorname{ch}\{v_2(\tau, z, \varepsilon)|_{\tau=(t-1)/\varepsilon}\} g_2 + g_{2,0}(-\sigma_0) \frac{\partial}{\partial z}(G_z(t, \varepsilon)), \\ g_1|_{t=1-\varepsilon^\delta} &= g_{2,0}(-\sigma_0) \frac{\partial}{\partial z}(x_z(\varepsilon)), \quad g_2|_{t=1-\varepsilon^\delta} = g_{2,0}(-\sigma_0) \frac{\partial}{\partial z}(y_z(\varepsilon)), \end{aligned} \quad (3.70)$$

где F_z , G_z , $x_z(\varepsilon)$, $y_z(\varepsilon)$ – функции (3.28), $v_2(\tau, z, \varepsilon)$ – компонента решения задачи Коши (3.29). А отсюда и из того факта, что (3.70) представляет собой “продифференцированную по z ” задачу (3.27), окончательно получаем:

$$\begin{aligned} g_1 &= \varepsilon \frac{\partial v_1}{\partial z}(\tau, z, \varepsilon) \Big|_{\tau=(t-1)/\varepsilon} \cdot g_{2,0}(-\sigma_0) + \tilde{g}_1(t, \varepsilon), \\ g_2 &= \frac{\partial v_2}{\partial z}(\tau, z, \varepsilon) \Big|_{\tau=(t-1)/\varepsilon} \cdot g_{2,0}(-\sigma_0) + \tilde{g}_2(t, \varepsilon), \end{aligned} \quad (3.71)$$

где, как и ранее, остатки $\tilde{g}_j$, $j = 1, 2$, допускают оценки (3.69).

Дальнейший анализ приводит к аналогичным результатам. А именно, рассуждая как выше, последовательно убеждаемся, что, во-первых, при $t \in [1 + \varepsilon^\delta, t_0 + 1 - \varepsilon^\delta]$ сохраняют силу соотношения (3.67), (3.69), в которых $(\tilde{x}, \tilde{y})$ – решение задачи Коши (3.48); во-вторых, на отрезке $t_0 + 1 - \varepsilon^\delta \leq t \leq t_0 + 1 + \varepsilon^\delta$ справедливы формулы, получающиеся из (3.71) при $\tau = (t - t_0 - 1)/\varepsilon$ и при замене функций v_1 , v_2 компонентами w_1 , w_2 решения задачи Коши (3.52); в-третьих, на оставшемся промежутке времени $t_0 + 1 + \varepsilon^\delta \leq t \leq T_0 + \varepsilon^\delta$ вновь имеем дело с равенствами (3.67), в которых теперь $(\tilde{x}, \tilde{y})$ – решение задачи Коши (3.61), а добавки $\tilde{g}_j$, $j = 1, 2$, по-прежнему удовлетворяют оценкам (3.69).

Полученная информация позволяет уже достаточно просто завершить обоснование теоремы о C^1 -сходимости. Действительно, при $T_\varphi - \sigma_0 - 1 \leq t \leq T_\varphi - \sigma_0$ в силу неравенства $T_\varphi - \sigma_0 - 1 > t_0 + 1 + \varepsilon^\delta$ (вытекающего из (3.4), (3.64)

и из условия $\sigma_0 < a_0 - 1$) для $g_1(t, \varepsilon)$, $g_2(t, \varepsilon)$ работают асимптотические представления (3.67), в которых, в свою очередь, функции $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ задаются асимптотическими формулами (3.62), (3.63). А отсюда очевидным образом имеем

$$\begin{aligned} \max_{-1-\sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0} |g_1(t + T_\varphi, \varepsilon)| &\leq M_1 \varepsilon \|g_0\|_{\mathcal{F}_0}, \\ \max_{-1-\sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0} \left| g_2(t + T_\varphi, \varepsilon) - g_{2,0}(-\sigma_0) \frac{\partial y_0}{\partial z}(t + T_0, z) \right|_{z=\varphi_2(-\sigma_0)} &\leq M_2 \varepsilon^\delta \|g_0\|_{\mathcal{F}_0}, \end{aligned} \quad (3.72)$$

где постоянные $M_1, M_2 > 0$ не зависят от ε , φ , g_0 . И наконец, применяя оценки (3.72) непосредственно к оператору $\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi)$, задающемуся формулами (3.14), (3.20), убеждаемся в справедливости второго предельного равенства из (3.21). Теорема 3.1 полностью доказана.

Завершая обсуждение асимптотических свойств решения $(x_\varphi(t, \varepsilon), y_\varphi(t, \varepsilon))$, приведем два следствия из теоремы 3.1. В связи с этим рассмотрим аналогичную (3.11), (3.12) импульсную систему

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -2d \operatorname{sh} y, \\ y(t_{2k-1} + 0) &= y(t_{2k-1} - 0) - (1 + a_0)y(t_{2k-1} - 1), \quad k = 1, 2, \dots, \\ y(t_{2k} + 0) &= y(t_{2k} - 0) - (1 + 1/a_0)y(t_{2k} - 1), \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (3.73)$$

где

$$t_{2k-1} = 1 + (k-1)T_0, \quad t_{2k} = t_0 + 1 + (k-1)T_0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Решение данной системы на полуоси $t \in [-\sigma_0, +\infty)$ с начальным условием $y|_{t=-\sigma_0} = z$, $z \in \mathbb{R}$, как и ранее, обозначим через $y_0(t, z)$.

СЛЕДСТВИЕ 3.1.1. При любом фиксированном $T > 0$ равномерно по $\varphi \in S$ выполняются предельные равенства

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \max_{-\sigma_0 \leq t \leq T - \sigma_0} |x_\varphi(t, \varepsilon) - x_0(t)| &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \max_{t \in \Sigma_\varepsilon(T)} |y_\varphi(t, \varepsilon) - y_0(t, z)|_{z=\varphi_2(-\sigma_0)} &= 0. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Здесь множество $\Sigma_\varepsilon(T)$ – отрезок $-\sigma_0 \leq t \leq T - \sigma_0$ с выброшенными интервалами вида $(t_{2k-1} - \varepsilon^\delta, t_{2k-1} + \varepsilon^\delta)$, $(t_{2k} - \varepsilon^\delta, t_{2k} + \varepsilon^\delta)$, $k = 1, 2, \dots$, $\delta = \operatorname{const} \in (0, 1)$.

Обращаем внимание, что при $T = T_\varphi$ справедливость равенств (3.74) уже установлена (см. (3.65)). В общем же случае разработанный выше алгоритм построения асимптотики решения $(x_\varphi(t, \varepsilon), y_\varphi(t, \varepsilon))$ необходимо применить к отрезку $-\sigma_0 \leq t \leq T - \sigma_0$.

Заслуживает внимания вопрос о справедливости аналога теоремы 3.1 при $a_0 < 1$. Для формулировки соответствующего результата зафиксируем постоянную $\sigma_0 : 0 < \sigma_0 < a_0$ и обозначим через $(x_z(t, \varepsilon), y_z(t, \varepsilon))$, $t \geq -\sigma_0$, решение системы (3.5) с начальными функциями $x_z(t, \varepsilon) \equiv -\sigma_0$, $y_z(t, \varepsilon) \equiv z$ при $-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$, где $z = \operatorname{const} \in \mathbb{R}$. Далее, введем в рассмотрение второй положительный корень $t = T_z$ уравнения $x_z(t - \sigma_0, \varepsilon) = -\sigma_0$ и оператор

$$\tilde{\Pi}_\varepsilon(\varphi) = (x_z(t + T_z, \varepsilon), y_z(t + T_z, \varepsilon))|_{z=\varphi_2(-\sigma_0)}, \quad -1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0,$$

действующий из множества (3.8) в пространство $\mathcal{F}$ и являющийся в некотором смысле аналогом предельного оператора (3.10). Предпринятый выше асимптотический анализ приводит к следующему утверждению.

СЛЕДСТВИЕ 3.1.2. *Имеют место аналогичные (3.21) предельные равенства*

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\varphi \in S} \|\Pi_\varepsilon(\varphi) - \tilde{\Pi}_\varepsilon(\varphi)\|_{\mathcal{F}} &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\varphi \in S} \|\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi) - \partial_\varphi \tilde{\Pi}_\varepsilon(\varphi)\|_{\mathcal{F}_0 \rightarrow \mathcal{F}_0} &= 0. \end{aligned}$$

Подчеркнем, что приведенные равенства отражают так называемый эффект забывания начальных условий: асимптотика решений системы (3.5) с точностью до величин порядка $\exp(-q/\varepsilon)$, $q = \text{const} > 0$, не зависит от конкретного вида начального условия $\varphi \in S$, а определяется лишь значением функционала $z = \varphi_2(-\sigma_0)$. Тем самым, эти равенства справедливы при любом $a_0 > 0$. В случае же $a_0 > 1$ оператор $\tilde{\Pi}_\varepsilon(\varphi)$, в свою очередь, сходится при $\varepsilon \rightarrow 0$ к $\Pi_0(\varphi)$ (в C^1 -метрике) и мы можем перейти к более простым соотношениям (3.21).

При $a_0 < 1$, хотя упомянутый выше переход и невозможен, тем не менее, аналог теоремы 3.2 о соответствии остается в силе. Причина этого в том, что “предельный” оператор $\tilde{\Pi}_\varepsilon(\varphi)$ является надстройкой (точный смысл этому термину придан в п. 3.1) над соответствующим одномерным отображением $z \rightarrow y_z(t, \varepsilon)|_{t=T_z-\sigma_0}$, где $z = \varphi_2(-\sigma_0)$. Последнее же при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремится (в C^1 -метрике на любом конечном отрезке изменения z) к введенному выше отображению (3.22).

3.3. Анализ предельного отображения. В данном пункте обратимся к актуальному в связи с теоремой 3.2 вопросу о количестве и устойчивости неподвижных точек отображения (3.22).

Заметим в первую очередь, что интересующее нас отображение представляет собой оператор сдвига по траекториям системы (3.73) с T_0 -периодическим импульсным воздействием за отрезок времени $-\sigma_0 \leq t \leq T_0 - \sigma_0$. А это означает, что его можно записать в инвариантной форме, заменяя указанный выше отрезок не зависящим от σ_0 промежутком $0 \leq t \leq T_0$.

Действительно, введем в рассмотрение оператор сдвига

$$P^t(z) = \ln \frac{1 + \text{th}(z/2) \exp(-2dt)}{1 - \text{th}(z/2) \exp(-2dt)}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad P^0(z) = z \quad (3.75)$$

по решениям скалярного уравнения $\dot{y} = -2d \text{sh } y$ и положим $\bar{z} = \Phi(z)$. Тогда отображение (3.22) может быть представлено в виде

$$\bar{z} = (P^{T_0-t_0-1-\sigma_0} \circ P_2 \circ P^{t_0} \circ P_1 \circ P^{1+\sigma_0})(z),$$

где через P_1 , P_2 обозначены операторы пересчета начальных условий в точках $t = 1$ и $t = t_0 + 1$ соответственно, действующие по правилам

$$P_1(z) = z - (1 + a_0)P^{-1}(z), \quad P_2(z) = z - \left(1 + \frac{1}{a_0}\right)P^{-1}(z). \quad (3.76)$$

Далее, применим к левой и правой части получившегося равенства оператор P^{σ_0} . В результате с учетом очевидных соотношений

$$P^{1+\sigma_0} = P^1 \circ P^{\sigma_0}, \quad P^{T_0-t_0-1-\sigma_0} = P^{-\sigma_0} \circ P^{T_0-t_0-1}$$

имеем

$$P^{\sigma_0}(\bar{z}) = (P^{T_0-t_0-1} \circ P_2 \circ P^{t_0} \circ P_1 \circ P^1)(P^{\sigma_0}(z)).$$

А отсюда, в свою очередь, следует, что после замены $P^{\sigma_0}(z) \rightarrow z$ интересующее нас отображение принимает требуемую инвариантную форму

$$z \rightarrow \Phi_0(z) \stackrel{\text{def}}{=} (P^{T_0-t_0-1} \circ P_2 \circ P^{t_0} \circ P_1 \circ P^1)(z), \quad (3.77)$$

или, что то же самое,

$$z \rightarrow \Phi_0(z) \stackrel{\text{def}}{=} y_0(t, z)|_{t=T_0}, \quad (3.78)$$

где $y_0(t, z)$, $0 \leq t \leq T_0$, – решение аналогичной (3.11), (3.12) задачи Коши

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -2d \operatorname{sh} y, & y|_{t=0} &= z, \\ y(1+0) &= y(1-0) - (1+a_0)y(0), \\ y(t_0+1+0) &= y(t_0+1-0) - \left(1 + \frac{1}{a_0}\right)y(t_0). \end{aligned} \quad (3.79)$$

Остановимся на некоторых свойствах отображения (3.78). Привлекая его явный вид (3.77) и учитывая формулы (3.75), (3.76), нетрудно убедиться, что

$$\Phi_0(-z) = -\Phi_0(z), \quad \Phi_0(z) > 0 \quad \forall z \in (0, +\infty), \quad (3.80)$$

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \Phi_0(z) = \Phi_\infty > 0, \quad \Phi_\infty = \ln \frac{1 + \operatorname{th}(\gamma_\infty/2) \exp(-2da_0)}{1 - \operatorname{th}(\gamma_\infty/2) \exp(-2da_0)}, \quad (3.81)$$

$$\gamma_\infty = \ln \left[\operatorname{th} \left(d \left(1 + \frac{1}{a_0} \right) \right) \right] - \left(1 + \frac{1}{a_0} \right) \ln \left[\operatorname{th} \frac{d}{a_0} \right].$$

Заметим, далее, что нечетность функции $\Phi_0(z)$ (см. (3.80)) обусловлена инвариантностью исходной системы (3.2) по отношению к преобразованию координат (3.3). Что же касается свойства (3.81), то оно гарантирует диссипативность отображения (3.78) на инвариантной полуоси $z \in \mathbb{R}_+$.

Перейдем теперь непосредственно к анализу возможных аттракторов рассматриваемого отображения. Непосредственная проверка показывает, что оно имеет нулевую неподвижную точку, причем

$$\Phi'_0(0) = h(t)|_{t=T_0}, \quad (3.82)$$

где $h(t)$ – решение аналогичной (3.79) линеаризованной задачи

$$\begin{aligned} \dot{h} &= -2dh, & h|_{t=0} &= 1, \\ h(1+0) &= h(1-0) - (1+a_0)h(0), \\ h(t_0+1+0) &= h(t_0+1-0) - \left(1 + \frac{1}{a_0}\right)h(t_0). \end{aligned} \quad (3.83)$$

Далее, из (3.82), (3.83) заключаем, что

$$\begin{aligned}\Phi'_0(0) &= \mu(s)|_{s=2d}, \\ \mu(s) &= ((1 + a_0) \exp s - 1) \left(\left(1 + \frac{1}{a_0}\right) \exp s - 1 \right) \exp(-sT_0).\end{aligned}\tag{3.84}$$

И наконец, опираясь на очевидные свойства функции $\mu(s)$:

$$\begin{aligned}\mu(0) &= 1, \\ \mu'(s) &= ((2 - T_0) \exp(2s) + (T_0 - 1) \exp s - 1) T_0 \exp(-sT_0) < 0 \quad \forall s \in (0, +\infty), \\ \mu(s) &\rightarrow 0 \quad \text{при } s \rightarrow +\infty,\end{aligned}\tag{3.85}$$

приходим к выводу, что $0 < \mu(s) < 1$ при любом $s \in (0, +\infty)$. Таким образом, нулевая неподвижная точка отображения (3.78) оказывается экспоненциально устойчивой при любом $d > 0$.

В рамках исходной билокальной модели (3.1) неподвижной точке $z = 0$ отвечает однородный цикл

$$N_1 = N_2 = N_*(t, \lambda)\tag{3.86}$$

периода $T_*(\lambda)$, где $N_*(t, \lambda)$, $T_*(\lambda)$ определены равенствами (2.58), (2.59). Остается воспользоваться теоремой 3.2, из которой вытекает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3.3. *Однородный цикл (3.86) системы (3.1) является экспоненциально орбитально устойчивым при любом фиксированном значении коэффициента диффузии $d > 0$ и при всех $\lambda \geq \lambda_0$, где $\lambda_0 = \lambda_0(d) > 0$ достаточно велико.*

Характерная особенность отображения (3.78) заключается в том, что при уменьшении параметра d на его инвариантном множестве $\mathbb{R}_+$ происходит бифуркация рождения пары неподвижных точек – устойчивой и неустойчивой. Наглядное представление об этом процессе дают графики функции $\Phi_0(z)$ при $a_0 = 5$, $d = 0.09, 0.07, 0.05$, построенные с помощью формул (3.75)–(3.77) на отрезке $0 \leq z \leq 2$ (см. рис. 3.1–3.3). Заметим, далее, что в силу свойства нечетности $\Phi_0(z)$ устойчивой ненулевой неподвижной точке из $\mathbb{R}_+$ отвечает аналогичная симметрично расположенная неподвижная точка из $\mathbb{R}_-$, а им обеим в исходной релаксационной системе (3.1) при всех достаточно больших λ соответствует пара устойчивых циклов, переходящих друг в друга под действием замены $(N_1, N_2) \rightarrow (N_2, N_1)$. Добавим еще, что согласно теореме 3.3 эти циклы сосуществуют с устойчивым однородным циклом (3.86).

Некоторое представление о релаксационных свойствах упомянутых чуть выше устойчивых неоднородных циклов дает рис. 3.4, где представлены графики компонент $N_1(t)$, $N_2(t)$ одного из них в случае нелинейности (1.7) при $c = 0.5$ и при значениях параметров $\lambda = 7.8$, $d = 0.05$ (сплошной линией изображена функция $N_1(t)$, а пунктирной – $N_2(t)$).

Как оказывается, при малых d устойчивая ненулевая неподвижная точка отображения (3.78), принадлежащая множеству $\mathbb{R}_+$, может быть найдена

Рис. 3.1. $d = 0.09$ Рис. 3.2. $d = 0.07$ Рис. 3.3. $d = 0.05$

асимптотическими методами. Действительно, считая по-прежнему выполненным неравенство (3.4), положим в системе (3.79)

$$z = \frac{1}{a_0} \ln \frac{1}{d} + u, \quad u = \text{const} \in \mathbb{R}, \quad 0 < d \ll 1. \quad (3.87)$$

В результате на полуинтервале $0 \leq t < 1$ получаем задачу Коши

$$\dot{y} = -2d \operatorname{sh} y, \quad y|_{t=0} = \frac{1}{a_0} \ln \frac{1}{d} + u, \quad (3.88)$$

а ее решение будем искать в виде

$$y(t, u, d) = \frac{1}{a_0} \ln \frac{1}{d} + h(t, u, d), \quad h(0, u, d) = u. \quad (3.89)$$

Подставляя затем соотношение (3.89) в (3.88), приходим к выводу, что равномерно по $t \in [0, 1)$

$$h(t, u, d) = u + O(d^{1-1/a_0}), \quad \frac{\partial h}{\partial u}(t, u, d) = 1 + O(d^{1-1/a_0}). \quad (3.90)$$

Рис. 3.4

Далее, в момент времени $t = 1$ первый раз происходит скачок и согласно (3.79), (3.89), (3.90) при $t \in [1, t_0 + 1)$ имеем дело с задачей Коши

$$\dot{y} = -2d \operatorname{sh} y, \quad y|_{t=1} = -\ln \frac{1}{d} - a_0 u + O(d^{1-1/a_0}). \quad (3.91)$$

Как и выше, ее решение ищем в аналогичном (3.89) виде

$$y(t, u, d) = -\ln \frac{1}{d} + h(t, u, d). \quad (3.92)$$

В итоге, с точностью до величин порядка d^{1-1/a_0} , для функции $h(t, u, d)$ из (3.92) приходим к задаче Коши

$$\dot{h} = \exp(-h), \quad h|_{t=1} = -a_0 u.$$

А отсюда, в свою очередь, следует, что решение $y(t, u, d)$ исходной задачи (3.91) допускает равномерные по $t \in [1, t_0 + 1)$ асимптотические представления

$$\begin{aligned} y(t, u, d) &= -\ln \frac{1}{d} + \ln(t - 1 + \exp(-a_0 u)) + O(d^{1-1/a_0}), \\ \frac{\partial y}{\partial u}(t, u, d) &= -\frac{a_0 \exp(-a_0 u)}{t - 1 + \exp(-a_0 u)} + O(d^{1-1/a_0}). \end{aligned} \quad (3.93)$$

При $t = t_0 + 1$ происходит очередной скачок, причем в силу (3.93), (3.79) на оставшемся отрезке $t_0 + 1 \leq t \leq T_0$ получается задача Коши

$$\dot{y} = -2d \operatorname{sh} y, \quad y|_{t=t_0+1} = \frac{1}{a_0} \ln \frac{1}{d} + \psi(u) + O(d^{1-1/a_0}), \quad (3.94)$$

где

$$\psi(u) = \ln \left(1 + \frac{1}{a_0} + \exp(-a_0 u) \right) - \left(1 + \frac{1}{a_0} \right) \ln \left(\frac{1}{a_0} + \exp(-a_0 u) \right). \quad (3.95)$$

Опуская несложный ее анализ, приведем сразу вытекающие из (3.94), (3.95) окончательные асимптотические формулы

$$y(t, u, d) = \frac{1}{a_0} \ln \frac{1}{d} + \psi(u) + O(d^{1-1/a_0}), \quad \frac{\partial y}{\partial u}(t, u, d) = \psi'(u) + O(d^{1-1/a_0}), \quad (3.96)$$

равномерные по $t \in [t_0 + 1, T_0]$.

Проделанные построения показывают, что после перехода к новой переменной u (см. (3.87)) отображение (3.78) принимает вид

$$u \rightarrow \psi(u) + \Delta(u, d), \quad (3.97)$$

где

$$\Delta(u, d) = y(t, u, d)|_{t=T_0} - \frac{1}{a_0} \ln \frac{1}{d} - \psi(u). \quad (3.98)$$

Заметим, далее, что поскольку асимптотические представления (3.89), (3.90), (3.93), (3.96) выполняются равномерно по u из любого конечного отрезка $[u_1, u_2]$, то и остаток (3.98) имеет при $d \rightarrow 0$ порядок малости $O(d^{1-1/a_0})$ в метрике пространства $C^1[u_1, u_2]$. Последнее же обстоятельство позволяет при рассмотрении интересующего нас вопроса о неподвижных точках отбросить упомянутый остаток и заменить (3.97) соответствующим предельным отображением

$$u \rightarrow \psi(u). \quad (3.99)$$

Для выявления свойств отображения (3.99) рассмотрим сначала несколько более общее отображение

$$u \rightarrow \psi_{r_1, r_2}(u) \stackrel{\text{def}}{=} \ln(r_1 + \exp(-a_0 u)) - \left(1 + \frac{1}{a_0}\right) \ln(r_2 + \exp(-a_0 u)) \quad (3.100)$$

с двумя параметрами $r_1, r_2 > 0$, удовлетворяющими условию

$$r_1 > \left(1 + \frac{1}{a_0}\right) r_2. \quad (3.101)$$

Справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 3.3. *При выполнении неравенства (3.101) отображение (3.100) имеет единственную глобально экспоненциально устойчивую неподвижную точку $u_* = u_*(r_1, r_2)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим сначала вытекающие из явного вида функции $\psi_{r_1, r_2}(u)$ (см. (3.100)) асимптотические свойства

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow +\infty} \psi_{r_1, r_2}(u) &= \ln r_1 - \left(1 + \frac{1}{a_0}\right) \ln r_2, \\ \psi_{r_1, r_2}(u) &= u + \left(r_1 - \left(1 + \frac{1}{a_0}\right) r_2\right) \exp(a_0 u) + O(\exp(2a_0 u)), \quad u \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (3.102)$$

Учитывая, далее, в (3.102) условие (3.101), приходим к выводу, что при всех достаточно больших $u > 0$ выполняется неравенство $\psi_{r_1, r_2}(u) < u$, а при всех

достаточно больших по модулю отрицательных u – неравенство $\psi_{r_1, r_2}(u) > u$. Таким образом, отображение (3.100) заведомо имеет хотя бы одну неподвижную точку $u = u_*$, являющуюся, очевидно, корнем уравнения

$$\exp(u_*) = \frac{r_1 + \exp(-a_0 u_*)}{(r_2 + \exp(-a_0 u_*))^{1+1/a_0}}. \quad (3.103)$$

Перейдем теперь к вопросу об устойчивости найденной неподвижной точки. В связи с этим обратим внимание на то, что требование (3.101) влечет выполнение неравенства $r_1 > r_2$. Используя данный факт, убеждаемся, что, во-первых,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{du} \psi_{r_1, r_2}(u) \\ &= \exp(-a_0 u) \left(\frac{a_0(r_1 - r_2)}{(r_1 + \exp(-a_0 u))(r_2 + \exp(-a_0 u))} + \frac{1}{r_2 + \exp(-a_0 u)} \right) > 0 \end{aligned} \quad (3.104)$$

для любого $u \in \mathbb{R}$; во-вторых, за устойчивость неподвижной точки $u = u_*$ отвечает мультипликатор

$$\mu_* \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{d}{du} \psi_{r_1, r_2}(u) \right|_{u=u_*} = \left(\frac{v_* + r_2}{v_* + r_1} \right)^{a_0} \left(1 + \frac{a_0(r_1 - r_2)}{v_* + r_1} \right) \Big|_{v_* = \exp(-a_0 u_*)}, \quad (3.105)$$

являющийся положительным (при выводе равенства (3.105) привлекались соотношения (3.103), (3.104)). Кроме того, учитывая, что $a_0 > 1$, и опираясь на очевидные оценки

$$\left(\frac{v_* + r_1}{v_* + r_2} \right)^{a_0} = \left(1 + \frac{r_1 - r_2}{v_* + r_2} \right)^{a_0} > 1 + \frac{a_0(r_1 - r_2)}{v_* + r_2} > 1 + \frac{a_0(r_1 - r_2)}{v_* + r_1},$$

нетрудно увидеть, что $\mu_* < 1$.

Итак, мы убедились, что любая возможная неподвижная точка $u = u_*$ отображения (3.100) является экспоненциально устойчивой. А это значит, что на самом деле такая точка единственна и в силу монотонности нашего отображения (см. (3.104)) глобально устойчива. Лемма 3.3 доказана.

Возвращаясь к отображению (3.99), заметим, что оно является частным случаем отображения (3.100) при $r_1 = 1 + 1/a_0$, $r_2 = 1/a_0$, причем условие (3.101) здесь эквивалентно требованию (3.4). Тем самым, в силу леммы 3.3 рассматриваемое отображение имеет единственную устойчивую неподвижную точку $u = u_*$. Далее, переходя от (3.99) к (3.97) и учитывая C^1 -малость остатка (3.98), убеждаемся, что отображение (3.97) также допускает устойчивую неподвижную точку $u = u(d)$, $u(0) = u_*$. И наконец, выражая u через z (см. (3.87)), приходим к выводу, что искомая ненулевая устойчивая неподвижная точка исходного отображения (3.78), принадлежащая множеству $\mathbb{R}_+$, задается равенством

$$z(d) = \frac{1}{a_0} \ln \frac{1}{d} + u(d), \quad 0 < d \ll 1. \quad (3.106)$$

Завершая исследование отображения (3.78), напомним, что помимо (3.106) у него имеется еще устойчивая неподвижная точка $z = -z(d)$. Напомним также, что согласно теореме 3.2 данной паре неподвижных точек в биликальной модели (3.2) отвечает пара устойчивых циклов, переходящих друг в друга в результате перестановки координат (3.3).

4. Многомерный случай

4.1. Теорема о C^1 -сходимости. Развитые в предыдущем разделе асимптотические конструкции практически без изменений переносятся на диффузионную цепочку (1.10) при любом $m \geq 2$. Связано это с тем, что после перехода в (1.10) к переменным $x, y_1, \dots, y_{m-1}$, где

$$N_1 = \exp\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad N_j = \exp\left(\frac{x}{\varepsilon} + \sum_{k=1}^{j-1} y_k\right), \quad j = 2, \dots, m, \quad \varepsilon = \frac{1}{\lambda},$$

получается аналогичная (3.5) релаксационная система

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon d(\exp y_1 - 1) + F(x(t-1), \varepsilon), \\ \dot{y}_j &= d[\exp y_{j+1} + \exp(-y_j) - \exp y_j - \exp(-y_{j-1})] \\ &\quad + G_j(x(t-1), y_1(t-1), \dots, y_j(t-1), \varepsilon), \quad j = 1, \dots, m-1. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь $y_0 = y_m = 0$, функция $F(x, \varepsilon)$ та же самая, что и в (2.1), а нелинейности G_j задаются аналогичными (3.6) соотношениями

$$G_j(x, y_1, \dots, y_j, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \left\{ f\left(\exp\left(\frac{x}{\varepsilon} + \sum_{k=1}^j y_k\right)\right) - f\left(\exp\left(\frac{x}{\varepsilon} + \sum_{k=1}^{j-1} y_k\right)\right) \right\},$$

$$j = 1, \dots, m-1.$$

Для того чтобы сформулировать в данном случае соответствующий вариант теоремы о C^1 -сходимости, снова обратимся к наиболее простой ситуации, когда выполняется неравенство (3.4). Зафиксируем затем постоянную σ_0 такую, что $0 < \sigma_0 < a_0 - 1$, и обозначим через $(x_\varphi(t, \varepsilon), y_{1,\varphi}(t, \varepsilon), \dots, y_{m-1,\varphi}(t, \varepsilon))$, $t \geq -\sigma_0$, решение системы (4.1) с произвольным начальным условием $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t))$, $-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$, из множества

$$S = \{(\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t)) : \varphi_1 \in S_1, \varphi_2 \in S_2, \dots, \varphi_m \in S_m\} \subset \mathcal{F}. \quad (4.2)$$

Здесь S_1 – то же самое семейство функций, что и в (3.8), $S_2, \dots, S_m$ – произвольные замкнутые и ограниченные подмножества из пространства $C[-1 - \sigma_0, -\sigma_0]$, а $\mathcal{F}$ – банахово пространство непрерывных при $-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$ вектор-функций $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t))$ с нормой (3.7).

Далее, рассмотрим аналогичные (3.9) и (3.10) операторы

$$\Pi_\varepsilon(\varphi) = (x_\varphi(t + T_\varphi, \varepsilon), y_{1,\varphi}(t + T_\varphi, \varepsilon), \dots, y_{m-1,\varphi}(t + T_\varphi, \varepsilon)),$$

$$-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0; \quad (4.3)$$

$$\Pi_0(\varphi) = (x_0(t), y_1^0(t + T_0, z), \dots, y_{m-1}^0(t + T_0, z)) \Big|_{z=(\varphi_2(-\sigma_0), \dots, \varphi_m(-\sigma_0))},$$

$$-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0, \quad (4.4)$$

где, как и в п. 3.1, через $t = T_\varphi$ обозначен второй положительный корень уравнения $x_\varphi(t - \sigma_0, \varepsilon) = -\sigma_0$, T_0 – величина, определенная в (1.8), а $x_0(t)$ – периодическая функция (2.9). Что же касается функций $y_1^0(t, z), \dots, y_{m-1}^0(t, z)$, где $z = (z_1, \dots, z_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1}$, $t \in [-\sigma_0, T_0 - \sigma_0]$, то они удовлетворяют импульсной системе

$$\begin{aligned} \dot{y}_j &= d[\exp y_{j+1} + \exp(-y_j) - \exp y_j - \exp(-y_{j-1})], \\ y_j(1+0) &= y_j(1-0) - (1+a_0)y_j(0), \quad j = 1, \dots, m-1, \quad y_0 = y_m = 0, \\ y_j(t_0+1+0) &= y_j(t_0+1-0) - \left(1 + \frac{1}{a_0}\right)y_j(t_0), \end{aligned} \quad (4.5)$$

дополненной начальным условием

$$(y_1, \dots, y_{m-1})|_{t=-\sigma_0} = (z_1, \dots, z_{m-1}). \quad (4.6)$$

Аналогом теоремы 3.1 о C^1 -сходимости для системы (4.1) является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть выполнено условие (3.4). Тогда найдется такое достаточно малое $\varepsilon_0 > 0$ (зависящее от выбора множества (4.2)), что при каждом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ оператор (4.3) определен на S и допускает предельные равенства вида (3.21), во втором из которых подпространство $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ задано аналогичным (3.13) соотношением

$$\mathcal{F}_0 = \{g_0(t) = (g_{1,0}(t), \dots, g_{m,0}(t)) \in \mathcal{F} : g_{1,0}(-\sigma_0) = 0\}.$$

Подробное обоснование данной теоремы опустим, поскольку, как уже было сказано, все построения из п. 3.2 переносятся на систему (4.1) с несущественными модификациями, обусловленными размерностью вектора $(y_1, \dots, y_{m-1})$. Единственный новый момент, появляющийся в случае $m > 2$ и нуждающийся в дополнительном анализе, связан с корректностью определения оператора (4.4) на множестве S .

Действительно, на промежутках $-\sigma_0 \leq t < 1$, $1 \leq t < t_0 + 1$ и $t_0 + 1 \leq t \leq T_0 - \sigma_0$ решение задачи Коши (4.5), (4.6) удовлетворяет нелинейной системе

$$\begin{aligned} \dot{y}_j &= d[\exp y_{j+1} + \exp(-y_j) - \exp y_j - \exp(-y_{j-1})], \\ j &= 1, \dots, m-1, \quad y_0 = y_m = 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Таким образом, возникает вопрос о продолжимости решений последней на указанные промежутки времени, длины которых отнюдь не малы.

При $m = 2$ поставленный вопрос тривиален, так как в этом случае система (4.7) переходит в скалярное уравнение $\dot{y} = -2d \operatorname{sh} y$. В случае же $m > 2$ ответ на него дается в следующем утверждении.

ЛЕММА 4.1. Решение $(y_1(t), \dots, y_{m-1}(t))$ системы (4.7) с произвольным начальным условием $(y_1, \dots, y_{m-1})|_{t=0} = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1}$ определено на полуоси $t \geq 0$ и стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$.

Для доказательства достаточно заметить, что любое решение системы (4.7) записывается в виде

$$y_j(t) = \ln \frac{\xi_{j+1}(t)}{\xi_j(t)}, \quad j = 1, \dots, m-1, \quad (4.8)$$

где $(\xi_1(t), \dots, \xi_m(t))$ – произвольное решение линейной системы

$$\dot{\xi}_j = d(\xi_{j+1} - 2\xi_j + \xi_{j-1}), \quad j = 1, \dots, m, \quad \xi_0 = \xi_1, \quad \xi_{m+1} = \xi_m, \quad (4.9)$$

принадлежащее инвариантному конусу $K = \{(\xi_1, \dots, \xi_m) : \xi_j > 0, j = 1, \dots, m\}$. А отсюда и из известных свойств системы (4.9) утверждение леммы вытекает очевидным образом.

4.2. Предельный объект. Аналогом предельного отображения (3.78) в данном случае служит $(m-1)$ -мерное отображение

$$z \rightarrow \Phi_0(z) \stackrel{\text{def}}{=} (y_1^0(t, z), \dots, y_{m-1}^0(t, z))|_{t=T_0}, \quad (4.10)$$

где $z = (z_1, \dots, z_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1}$, $(y_1^0(t, z), \dots, y_{m-1}^0(t, z))$ – решение импульсной системы (4.5) на отрезке $0 \leq t \leq T_0$ с начальным условием $(y_1^0, \dots, y_{m-1}^0)|_{t=0} = z$. Подчеркнем, что в силу явных формул (4.8), (4.9), описывающих поведение упомянутого решения между импульсами, отображение (4.10) заведомо определено во всем пространстве $\mathbb{R}^{m-1}$.

Опираясь на теорему 4.1 о C^1 -сходимости, нетрудно установить аналогичный теореме 3.2 результат о соответствии между гиперболическими неподвижными точками отображения (4.10) и релаксационными циклами исходной системы (4.1). А именно, справедливо следующее утверждение (сохраняющееся, как уже отмечалось ранее, и в случае $a_0 < 1$).

ТЕОРЕМА 4.2. *Любой неподвижной точке $z = z_*$ отображения (4.10), экспоненциально устойчивой или дихотомичной, в системе (4.1) при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ соответствует релаксационный цикл с теми же свойствами устойчивости.*

Поиск аттракторов отображения (4.10) начнем с анализа свойств устойчивости его неподвижной точки $z = 0$.

ЛЕММА 4.2. *Нулевая неподвижная точка отображения (4.10) экспоненциально устойчива при любом $d > 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Несложный подсчет показывает, что отвечающая точке $z = 0$ матрица Якоби $\Phi'_0(0)$ есть оператор сдвига по решениям импульсной системы

$$\begin{aligned} \dot{h}_j &= d(h_{j+1} - 2h_j + h_{j-1}), \\ h_j(1+0) &= h_j(1-0) - (1+a_0)h_j(0), \quad j = 1, \dots, m-1, \quad h_0 = h_m = 0, \\ h_j(t_0+1+0) &= h_j(t_0+1-0) - \left(1 + \frac{1}{a_0}\right)h_j(t_0) \end{aligned} \quad (4.11)$$

за время от $t = 0$ до $t = T_0$. Далее, применим к (4.11) метод Фурье по собственным векторам разностного оператора Лапласа, а точнее говоря, положим

$$h_j = \sum_{k=1}^{m-1} g_k(t) \sin\left(\frac{\pi k}{m} j\right), \quad j = 1, \dots, m-1. \quad (4.12)$$

В результате убеждаемся, что компоненты $g_k(t)$, $k = 1, \dots, m-1$, из (4.12) являются решениями аналогичной (3.83) импульсной системы

$$\begin{aligned}\dot{g} &= -sg, \\ g(1+0) &= g(1-0) - (1+a_0)g(0), \\ g(t_0+1+0) &= g(t_0+1-0) - \left(1 + \frac{1}{a_0}\right)g(t_0)\end{aligned}\quad (4.13)$$

при $0 \leq t \leq T_0$, $s = s_k$, где

$$s_k = 4d \sin^2\left(\frac{\pi k}{2m}\right), \quad k = 1, \dots, m-1. \quad (4.14)$$

На завершающем этапе дополним систему (4.13) начальным условием $g|_{t=0} = 1$, проинтегрируем получившуюся задачу Коши и положим $\mu_k = g|_{t=T_0, s=s_k}$, где s_k – дискретные значения (4.14) параметра s . В итоге получаем набор чисел μ_k , $k = 1, \dots, m-1$, который, как нетрудно увидеть, образует спектр интересующей нас матрицы $\Phi'_0(0)$. Более того, справедливы соотношения $\mu_k = \mu(s)|_{s=s_k}$, $k = 1, \dots, m-1$, где $\mu(s)$ – функция из (3.84), обладающая свойствами (3.85). А отсюда очевидным образом следует, что $\mu_k \in (0, 1)$, $k = 1, \dots, m-1$. Лемма 4.2 доказана.

В исходной диффузионной цепочке (1.10) неподвижной точке $z = 0$ отвечает однородный цикл (1.11). Лемма 4.2 и теорема 4.2 приводят к выводу, что, как и в случае $m = 2$, этот цикл является экспоненциально орбитально устойчивым при любом фиксированном значении $d > 0$ и при всех достаточно больших λ .

Отыскание других устойчивых неподвижных точек отображения (4.10) будем проводить в предположении о малости параметра d , что позволяет асимптотически проинтегрировать систему (4.5) на отрезке $0 \leq t \leq T_0$. Соответствующий анализ начнем с простейшего случая, когда начальные условия для упомянутой системы заданы аналогичными (3.87) равенствами

$$y_j|_{t=0} = \frac{1}{a_0} \ln \frac{1}{d} + u_j, \quad u_j = \text{const} \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, m-1, \quad (4.15)$$

а параметр a_0 , как и ранее, удовлетворяет условию (3.4).

Зафиксируем произвольно компактное множество $\Omega \subset \mathbb{R}^{m-1}$ и обозначим через

$$(y_1(t, u, d), \dots, y_{m-1}(t, u, d)), \quad 0 \leq t \leq T_0, \quad u = (u_1, \dots, u_{m-1}) \in \Omega, \quad (4.16)$$

решение задачи Коши (4.5), (4.15). Далее, действуя таким же образом, как и при выводе отображения (3.99), для компонент $y_j(t, u, d)$, $j = 1, \dots, m-1$, из (4.16) получаем асимптотические равенства

$$y_j(t, u, d) = \frac{1}{a_0} \ln \frac{1}{d} + u_j + O(d^{1-1/a_0}) \quad \text{при } t \in [0, 1), \quad (4.17)$$

$$y_j(t, u, d) = -\ln \frac{1}{d} + h_j^0(t, u) + O(d^{1-1/a_0}) \quad \text{при } t \in [1, t_0 + 1), \quad (4.18)$$

$$y_j(t, u, d) = \frac{1}{a_0} \ln \frac{1}{d} + \psi_j(u) + O(d^{1-1/a_0}) \quad \text{при } t \in [t_0 + 1, T_0], \quad (4.19)$$

где $(h_1^0(t, u), \dots, h_{m-1}^0(t, u))$ – решение задачи Коши

$$\begin{aligned} \dot{h}_1 &= \exp(-h_1), & \dot{h}_j &= \exp(-h_j) - \exp(-h_{j-1}), & j &= 2, \dots, m-1, \\ h_j|_{t=1} &= -a_0 u_j, & j &= 1, \dots, m-1, \end{aligned} \quad (4.20)$$

а функции $\psi_j(u)$, $j = 1, \dots, m-1$, задаются формулами

$$\psi_j(u) = h_j^0(t, u)|_{t=t_0+1} - \left(1 + \frac{1}{a_0}\right) h_j^0(t, u)|_{t=t_0}, \quad j = 1, \dots, m-1. \quad (4.21)$$

Добавим еще, что как сами равенства (4.17)–(4.19), так и аналогичные асимптотические представления, получающиеся из них в результате дифференцирования по u , выполняются равномерно по t из соответствующих промежутков и по $u \in \Omega$. Принимая во внимание указанные свойства, нетрудно убедиться, что после перехода к переменным $u_j = z_j - (1/a_0) \ln(1/d)$, $j = 1, \dots, m-1$, интересующее нас отображение (4.10) записывается в виде

$$u_j \rightarrow \psi_j(u) + \Delta_j(u, d), \quad j = 1, \dots, m-1, \quad (4.22)$$

где остатки $\Delta_j(u, d)$ имеют порядок малости $O(d^{1-1/a_0})$ в метрике пространства $C^1(\Omega)$. А это значит, что при изучении вопроса о неподвижных точках мы вправе заменить (4.22) предельным отображением

$$u_j \rightarrow \psi_j(u), \quad j = 1, \dots, m-1. \quad (4.23)$$

Исследование отображения (4.23) существенно опирается на тот факт, что компоненты $h_j^0(t, u)$ решения задачи (4.20) могут быть найдены в явном виде. Действительно, непосредственная проверка показывает, что для них справедливы равенства

$$\begin{aligned} h_1^0(t, u) + \dots + h_k^0(t, u) &= \ln \left\{ \frac{(t-1)^k}{k!} + \sum_{\ell=0}^{k-1} \frac{(t-1)^\ell}{\ell!} \exp \left(-a_0 \sum_{j=1}^{k-\ell} u_j \right) \right\}, \\ k &= 1, \dots, m-1. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Далее, подставим (4.24) в (4.21) и перейдем к новым переменным

$$\alpha_k = u_1 + \dots + u_k, \quad k = 1, \dots, m-1. \quad (4.25)$$

В результате наше отображение примет треугольный вид

$$\begin{aligned} \alpha_k &\rightarrow \ln(r_{1,k} + \exp(-a_0 \alpha_k)) - \left(1 + \frac{1}{a_0}\right) \ln(r_{2,k} + \exp(-a_0 \alpha_k)), \\ k &= 1, \dots, m-1, \end{aligned} \quad (4.26)$$

где

$$r_{1,1} = 1 + \frac{1}{a_0}, \quad r_{2,1} = \frac{1}{a_0}, \quad (4.27)$$

$$r_{1,k}(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}) = \frac{(1 + 1/a_0)^k}{k!} + \sum_{\ell=1}^{k-1} \frac{(1 + 1/a_0)^\ell}{\ell!} \exp(-a_0 \alpha_{k-\ell}), \quad (4.28)$$

$$r_{2,k}(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}) = \frac{1}{a_0^k k!} + \sum_{\ell=1}^{k-1} \frac{1}{a_0^\ell \ell!} \exp(-a_0 \alpha_{k-\ell}), \quad k = 2, \dots, m-1.$$

Анализ получившегося отображения (4.26) достаточно прост. В самом деле, от него очевидным образом “отщепляется” одномерное отображение для координаты α_1 , имеющее вид

$$\alpha_1 \rightarrow \psi_{r_1, r_2}(\alpha_1)|_{r_1=r_{1,1}, r_2=r_{2,1}}, \quad (4.29)$$

где ψ_{r_1, r_2} – отображение (3.100). Кроме того, параметры $r_{1,1}$, $r_{2,1}$, задаваемые равенствами (4.27), удовлетворяют условию (3.101) (это условие эквивалентно требованию $a_0 > 1$, которое мы а priori считаем выполненным). А отсюда и из леммы 3.3 вытекает существование у (4.29) единственной экспоненциально устойчивой неподвижной точки $\alpha_1 = \alpha_1^*$.

Предположим теперь, что уже найдены первые $k-1$ координат $\alpha_1^*, \dots, \alpha_{k-1}^*$ устойчивой неподвижной точки отображения (4.26). Тогда после подстановки в (4.28) известных значений $\alpha_s = \alpha_s^*$, $s = 1, \dots, k-1$, для определения α_k получаем аналогичное (4.29) одномерное отображение

$$\alpha_k \rightarrow \psi_{r_1, r_2}(\alpha_k)|_{r_1=r_{1,k}^*, r_2=r_{2,k}^*}, \quad (4.30)$$

где $r_{1,k}^* = r_{1,k}(\alpha_1^*, \dots, \alpha_{k-1}^*)$, $r_{2,k}^* = r_{2,k}(\alpha_1^*, \dots, \alpha_{k-1}^*)$. Заметим, далее, что и здесь условие (3.101) остается в силе, поскольку

$$\begin{aligned} r_{1,k}^* - \left(1 + \frac{1}{a_0}\right) r_{2,k}^* &= \left(1 + \frac{1}{a_0}\right) \left\{ \frac{1}{k!} \left(\left(1 + \frac{1}{a_0}\right)^{k-1} - \frac{1}{a_0^k} \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\ell=1}^{k-1} \frac{1}{\ell!} \left(\left(1 + \frac{1}{a_0}\right)^{\ell-1} - \frac{1}{a_0^\ell} \right) \exp(-a_0 \alpha_{k-\ell}^*) \right\} \end{aligned}$$

и $(1+1/a_0)^{\ell-1} > 1/a_0^\ell$ для любого $\ell \leq k$. А это означает, что отображение (4.30) имеет единственную экспоненциально устойчивую неподвижную точку $\alpha_k = \alpha_k^*$.

Продолжая описанный процесс вплоть до номера $k = m-1$, убеждаемся, что исходное отображение (4.26) допускает единственную экспоненциально устойчивую неподвижную точку с компонентами $(\alpha_1^*, \dots, \alpha_{m-1}^*)$. Далее, обращая замену (4.25), получаем устойчивую неподвижную точку $(u_1^*, \dots, u_{m-1}^*)$ отображения (4.23) и соответствующую близкую к ней неподвижную точку $(u_1(d), \dots, u_{m-1}(d))$: $u_j(0) = u_j^*$, $j = 1, \dots, m-1$ отображения (4.22). Что же касается отображения (4.10), то координаты его устойчивой неподвижной точки задаются равенствами

$$z_j = \frac{1}{a_0} \ln \frac{1}{d} + u_j(d), \quad j = 1, \dots, m-1. \quad (4.31)$$

Следует добавить, что неподвижная точка (4.31) существует в паре с устойчивой неподвижной точкой

$$z_j = -\frac{1}{a_0} \ln \frac{1}{d} - u_{m-j}(d), \quad j = 1, \dots, m-1. \quad (4.32)$$

Наличие последней обусловлено тем обстоятельством, что отображение (4.10) инвариантно по отношению к замене

$$z_j \rightarrow -z_{m-j}, \quad j = 1, \dots, m-1.$$

Отметим еще, что неподвижным точкам (4.31), (4.32) в диффузионной цепочке (1.10) отвечает пара устойчивых релаксационных циклов, переходящих друг в друга при замене

$$N_j \rightarrow N_{m+1-j}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Завершая обсуждение свойств отображения (4.10), отметим, что помимо найденных выше трех устойчивых неподвижных точек у него имеются и другие аттракторы. Для отыскания части из них зафиксируем натуральное k_0 , $k_0 \leq m - 2$, и дополним систему (4.5) аналогичными (4.15) начальными условиями

$$\begin{aligned} y_j|_{t=0} &= -\frac{1}{a_0} \ln \frac{1}{d} + u_j, & j &= 1, \dots, k_0, \\ y_j|_{t=0} &= \frac{1}{a_0} \ln \frac{1}{d} + u_j, & j &= k_0 + 1, \dots, m - 1, \end{aligned} \quad (4.33)$$

где по-прежнему параметр d мал, $u_j = \text{const} \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, m - 1$, а постоянная a_0 удовлетворяет оценке (3.4). В результате для компонент $y_j(t, u, d)$, $j = 1, \dots, m - 1$, решения получившейся задачи Коши (4.5), (4.33) приходим к аналогичным (4.17)–(4.19) асимптотическим равенствам:

$$\begin{aligned} y_j &= -\frac{1}{a_0} \ln \frac{1}{d} + u_j + O(d^{1-1/a_0}), & j &= 1, \dots, k_0, \\ y_j &= \frac{1}{a_0} \ln \frac{1}{d} + u_j + O(d^{1-1/a_0}), & j &= k_0 + 1, \dots, m - 1, \end{aligned} \quad \text{при } t \in [0, 1); \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} y_j &= \ln \frac{1}{d} + h_j^0(t, u) + O(d^{1-1/a_0}), & j &= 1, \dots, k_0, \\ y_j &= -\ln \frac{1}{d} + h_j^0(t, u) + O(d^{1-1/a_0}), & j &= k_0 + 1, \dots, m - 1, \end{aligned} \quad \text{при } t \in [1, t_0 + 1); \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} y_j &= -\frac{1}{a_0} \ln \frac{1}{d} + \psi_j(u) + O(d^{1-1/a_0}), & j &= 1, \dots, k_0, \\ y_j &= \frac{1}{a_0} \ln \frac{1}{d} + \psi_j(u) + O(d^{1-1/a_0}), & j &= k_0 + 1, \dots, m - 1, \end{aligned} \quad \text{при } t \in [t_0 + 1, T_0], \quad (4.36)$$

где $(h_1^0(t, u), \dots, h_{m-1}^0(t, u))$ – решение задачи Коши

$$\begin{aligned} \dot{h}_j &= \exp h_{j+1} - \exp h_j, & j &= 1, \dots, k_0 - 1, \\ \dot{h}_{k_0} &= -\exp h_{k_0}, \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} h_j|_{t=1} &= -a_0 u_j, & j &= 1, \dots, k_0; \\ \dot{h}_{k_0+1} &= \exp(-h_{k_0+1}), \\ \dot{h}_j &= \exp(-h_j) - \exp(-h_{j-1}), & j &= k_0 + 2, \dots, m - 1, \\ h_j|_{t=1} &= -a_0 u_j, & j &= k_0 + 1, \dots, m - 1, \end{aligned} \quad (4.38)$$

а для функций $\psi_j(u)$, $j = 1, \dots, m - 1$, сохраняются формулы (4.32).

Дальнейший способ действий аналогичен изложенному выше: после подстановки в (4.10) соотношений

$$\begin{aligned} z_j &= -\frac{1}{a_0} \ln \frac{1}{d} + u_j, & j &= 1, \dots, k_0, \\ z_j &= \frac{1}{a_0} \ln \frac{1}{d} + u_j, & j &= k_0 + 1, \dots, m-1, \end{aligned}$$

и предельного перехода при $d \rightarrow 0$ (законность которого в метрике пространства $C^1(\Omega)$ вытекает из формул (4.34)–(4.36)) получаем соответствующее отображение для $u = (u_1, \dots, u_{m-1})$. Специфика рассматриваемого случая заключается в том, что в силу независимости подсистем (4.37) и (4.38) упомянутое отображение также распадается на два независимых отображения

$$u_j \rightarrow \psi_j(u_1, \dots, u_{k_0}), \quad j = 1, \dots, k_0; \quad (4.39)$$

$$u_j \rightarrow \psi_j(u_{k_0+1}, \dots, u_{m-1}), \quad j = k_0 + 1, \dots, m-1. \quad (4.40)$$

Сравнивая системы (4.20) и (4.38), нетрудно увидеть, что после надлежащего переобозначения координат отображение (4.40) в точности совпадает с отображением (4.23) (при замене в последнем m на $m - k_0$). Что же касается отображения (4.39), то оно приводится к (4.23) преобразованиями $u_j \rightarrow -u_{k_0+1-j}$, $j = 1, \dots, k_0$. А отсюда и из проделанного выше анализа вытекает, что полное отображение (4.39), (4.40) имеет единственную экспоненциально устойчивую неподвижную точку $(u_1^*, \dots, u_{m-1}^*)$.

Суммируя проделанные построения и меняя k_0 в пределах от единицы до $m-2$, приходим к выводу, что при всех достаточно малых $d > 0$ и при условии (3.4) отображение (4.10) допускает набор из $m-2$ устойчивых неподвижных точек с координатами

$$\begin{aligned} z_j &= -\frac{1}{a_0} \ln \frac{1}{d} + u_j^* + O(d^{1-1/a_0}), & j &= 1, \dots, k_0, \\ z_j &= \frac{1}{a_0} \ln \frac{1}{d} + u_j^* + O(d^{1-1/a_0}), & j &= k_0 + 1, \dots, m-1, \end{aligned} \quad (4.41)$$

где u_j^* , $j = 1, \dots, m-1$, – компоненты неподвижной точки предельного отображения (4.39), (4.40). Общее же количество найденных нами устойчивых ненулевых неподвижных точек отображения (4.10) равно m (см. (4.31), (4.32), (4.41)).

4.3. Заключение. Теорема 4.2 о соответствии и содержащийся в предыдущем пункте асимптотический анализ отображения (4.10) приводят к следующему утверждению, являющемуся основным результатом данной статьи.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть параметр a_0 в (1.6) удовлетворяет условию (3.4). Тогда для любых достаточно малых $d_2 > d_1 > 0$ найдется $\lambda_0 = \lambda_0(d_1, d_2) > 0$ такое, что при всех $d_1 \leq d \leq d_2$, $\lambda \geq \lambda_0$ система (1.10) имеет не менее m экспоненциально орбитально устойчивых пространственно неоднородных циклов, сосуществующих с устойчивым циклом (1.11).

В случае $a_0 < 1$ утверждение теоремы 4.3 сохраняется по крайней мере при $m = 2$. Связано это с тем, что здесь после подстановки в (3.79) соотношения $z =$

$\ln(1/d) + u$, $u = \text{const} \in \mathbb{R}$, и асимптотического интегрирования получившейся задачи Коши выходит аналогичное (3.99) отображение

$$u \rightarrow \psi(u) \stackrel{\text{def}}{=} -\ln \left[a_0 + (1 + \exp(-u))^{-1/a_0} \exp \left(- \left(1 + \frac{1}{a_0} \right) u \right) \right],$$

имеющее единственную глобально экспоненциально устойчивую неподвижную точку $u = u_*$. Далее, возвращаясь к исходному отображению (3.78), заключаем, что при $a_0 < 1$ оно по-прежнему допускает две устойчивые неподвижные точки $z = \pm z(d)$, где

$$z(d) = \ln \frac{1}{d} + u_* + O(d^{1-a_0}), \quad d \rightarrow 0.$$

Вопрос о других аттракторах отображения (4.10), отличных от найденных в п. 4.2 неподвижных точек, пока остается открытым. Для пояснения возникающих здесь трудностей, считая выполненным неравенство (3.4), дополним систему (4.5) начальными условиями вида

$$y_j|_{t=0} = \pm \frac{1}{a_0} \ln \frac{1}{d} + u_j, \quad u_j = \text{const} \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, m-1, \quad (4.42)$$

при произвольной расстановке знаков “+” и “−”. Несложный подсчет показывает, что асимптотическое интегрирование задачи Коши (4.5), (4.42) приводит к некоторому предельному $(m-1)$ -мерному отображению для $u = (u_1, \dots, u_{m-1})$. Таким образом, исходное отображение (4.10) при $d \rightarrow 0$ порождает 2^{m-1} различных предельных отображений. Однако отнюдь не все эти отображения обладают гиперболическими аттракторами.

Например, при $m = 3$ и при выборе в (4.42) порядка знаков $(+, -)$ получается отображение

$$\alpha_1 \rightarrow \psi_{r_1, r_2}(\alpha_1)|_{r_1=r_1(\alpha_2), r_2=r_2(\alpha_2)}, \quad \alpha_2 \rightarrow \alpha_2, \quad (4.43)$$

где $\alpha_1 = u_1$, $\alpha_2 = u_1 + u_2$, ψ_{r_1, r_2} – отображение (3.100), а функции $r_1(\alpha_2)$, $r_2(\alpha_2)$ задаются соотношениями

$$r_1(\alpha_2) = \left(1 + \frac{1}{a_0} \right) (1 + \exp(-a_0 \alpha_2)), \quad r_2(\alpha_2) = \frac{1}{a_0} (1 + \exp(-a_0 \alpha_2)). \quad (4.44)$$

Заметим, далее, что в силу вытекающего из (4.44) очевидного неравенства $r_1(\alpha_2) > (1 + 1/a_0)r_2(\alpha_2) \quad \forall \alpha_2 \in \mathbb{R}$ и леммы 3.3 отображение (4.43) допускает устойчивый однопараметрический континуум неподвижных точек

$$(\alpha_1, \alpha_2): \alpha_1 = u_*(r_1, r_2)|_{r_1=r_1(\alpha_2), r_2=r_2(\alpha_2)}, \quad \alpha_2 \in \mathbb{R}, \quad (4.45)$$

где $u_*(r_1, r_2)$ – неподвижная точка модельного отображения (3.100).

Переход от отображения (4.43) к исходному отображению (4.10) связан с возмущением правых частей из (4.43) добавками порядка малости $O(d^{1-1/a_0})$ (см., например, (3.97) и (4.22)). Вопрос же о том, какие из неподвижных точек (4.45) при этом выживут и каковыми будут их свойства устойчивости, подлежит отдельному рассмотрению, выходящему за рамки данной статьи.

Отметим, что с континуумом неподвижных точек в предельном отображении мы сталкиваемся во всех ситуациях, когда в последовательности знаков “+” и “−” из (4.42) имеется фрагмент $(+, -)$. Таким образом, стала понятной причина, по которой мы в п. 4.2 ограничились рассмотрением лишь случаев (4.31), (4.32) и (4.41).

Остановимся на еще одной нерешенной проблеме. Следуя принятой в книгах [14], [15] терминологии, ситуацию, которая реализуется в рамках теоремы 4.3, будем называть *диффузионной буферностью*. Далее, поставим вопрос о том, сохранится ли упомянутый феномен при переходе от дискретных цепочек (1.10) к соответствующей распределенной модели, т. е. при $d = m^2 D$, $D = \text{const} > 0$ и при $m \rightarrow \infty$.

В математическом плане сформулированная проблема сводится к исследованию аттракторов импульсной системы

$$\begin{aligned} \dot{y}_j &= m^2 D [\exp y_{j+1} + \exp(-y_j) - \exp y_j - \exp(-y_{j-1})], \\ y_j(t_{2k-1} + 0) &= y_j(t_{2k-1} - 0) - (1 + a_0)y_j(t_{2k-1} - 1), \\ y_j(t_{2k} + 0) &= y_j(t_{2k} - 0) - \left(1 + \frac{1}{a_0}\right)y_j(t_{2k} - 1), \\ k \in \mathbb{N}, \quad j &= 1, \dots, m-1, \quad y_0 = y_m = 0, \end{aligned} \quad (4.46)$$

где моменты скачков t_{2k-1} , t_{2k} те же самые, что и в (3.73). Точнее говоря, интересующий нас вопрос звучит так: сохраняются ли в системе (4.46) устойчивые автоволновые процессы при фиксированном достаточно малом $D > 0$ и при $m \rightarrow \infty$? Помимо этого представляет интерес анализ возможных аттракторов импульсной краевой задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= D \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2v \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad v|_{x=0} = v|_{x=1} = 0, \\ v(t_{2k-1} + 0, x) &= v(t_{2k-1} - 0, x) - (1 + a_0)v(t_{2k-1} - 1, x), \quad k \in \mathbb{N}, \\ v(t_{2k} + 0, x) &= v(t_{2k} - 0, x) - \left(1 + \frac{1}{a_0}\right)v(t_{2k} - 1, x), \quad k \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (4.47)$$

на отрезке $0 \leq x \leq 1$, получающейся из (4.46) при $y_j = v_j/m$ и при $m \rightarrow \infty$.

Следует добавить, что как в системе (4.46), так и в рамках краевой задачи (4.47) (рассматриваемой в фазовом пространстве $\dot{W}_2^1(0, 1)$) нулевое решение является экспоненциально устойчивым при любом $D > 0$. Тем самым, при изучении поставленных выше вопросов речь должна идти только о ненулевых аттракторах. Ясно также, что отыскание последних возможно лишь с использованием численных методов.

Представляет интерес выявление биологических причин, по которым в цепочке (1.10) реализуется феномен диффузионной буферности. Казалось бы, наиболее естественным ее аттрактором должен быть однородный цикл (1.11). Однако, как свидетельствуют численные эксперименты, даже в простейшем случае $m = 2$ область притяжения упомянутого цикла при достаточно малых

значениях параметра d весьма узка. С вычислительной точки зрения это означает, что при наугад выбранных начальных условиях в системе (1.10) с вероятностью, близкой к единице, будет наблюдаться не цикл (1.11), а некоторый устойчивый пространственно неоднородный периодический режим.

Для того чтобы разобраться в причинах такого поведения траекторий, введем следующие определения. Каждому устойчивому периодическому решению $(N_1(t), \dots, N_m(t))$ системы (1.10) периода $T > 0$ поставим в соответствие его динамическое среднее значение

$$\mathcal{U}[(N_1, \dots, N_m)] = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m N_j(t) \right) dt. \quad (4.48)$$

Заметим, далее, что для всех найденных нами устойчивых циклов величина (4.48) асимптотически велика (точнее говоря, имеет порядок $(\exp \lambda)/\lambda$). В связи с этим для характеристики того или иного периодического режима вместо (4.48) удобнее использовать функционал

$$U[(N_1, \dots, N_m)] = \frac{\mathcal{U}[(N_1, \dots, N_m)]}{\mathcal{U}[(N_*, \dots, N_*)]}, \quad (4.49)$$

где, напомним, $(N_*, \dots, N_*)$ – однородный цикл (1.11).

Введенный выше функционал (4.49) позволяет сравнивать между собой различные циклы системы (1.10). А именно, будем говорить, что периодическое решение $(N_1^{(1)}(t), \dots, N_m^{(1)}(t))$ биологически предпочтительнее другого периодического решения $(N_1^{(2)}(t), \dots, N_m^{(2)}(t))$, если

$$U[(N_1^{(1)}, \dots, N_m^{(1)})] > U[(N_1^{(2)}, \dots, N_m^{(2)})].$$

Естественно ожидать, что наибольшие области притяжения имеют именно те периодические режимы, на которых функционал (4.49) максимален или близок к таковому. Для проверки этого факта обратимся к случаю $m = 2$. Как следует из полученных нами результатов, соответствующая система (3.1) при фиксированном достаточно малом $d > 0$, при $a_0 \neq 1$ и при всех $\lambda \gg 1$ допускает три аттрактора: однородный цикл (3.86) и два устойчивых неоднородных цикла $(N_1(t, \lambda, d), N_2(t, \lambda, d))$, $(N_2(t, \lambda, d), N_1(t, \lambda, d))$ периода $T(\lambda, d)$, отвечающих двум устойчивым ненулевым неподвижным точкам отображения (3.78). Далее, положим

$$U(\lambda, d) = U[(N_1(t, \lambda, d), N_2(t, \lambda, d))] = U[(N_2(t, \lambda, d), N_1(t, \lambda, d))]. \quad (4.50)$$

Справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 4.3. При $\lambda \rightarrow \infty$ функция (4.50) стремится к конечному пределу

$$U_0(d) = \frac{\text{ch}(\gamma_1/2)}{\text{ch}(\gamma_2/2)} \text{ch} \left[\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2} \right] > 1, \quad (4.51)$$

где $\gamma_1 = y_0(0, z)|_{z=z(d)}$, $\gamma_2 = y_0(1 - 0, z)|_{z=z(d)}$, $y_0(t, z)$ – решение задачи Коши (3.79), а $z = z(d) > 0$ – устойчивая неподвижная точка отображения (3.78).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем сначала асимптотическое вычисление динамического среднего значения (4.48) для однородного цикла. Обращаясь к равенствам (2.58), (2.59) и асимптотическим формулам (2.14), (2.17), (2.32), (2.33), (2.44), нетрудно увидеть, что

$$\int_0^{1-\varepsilon^\delta} N_*(t, \lambda) dt + \int_{1+\varepsilon^\delta}^{T_*} N_*(t, \lambda) dt \leq M \exp \left[\frac{1 - \min(1, a_0) \varepsilon^\delta}{\varepsilon} \right], \quad (4.52)$$

$$\int_{1-\varepsilon^\delta}^{1+\varepsilon^\delta} N_*(t, \lambda) dt = \varepsilon \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \exp[v(\tau)] d\tau + o(1) \right), \quad (4.53)$$

где $\varepsilon = 1/\lambda$, δ – произвольная фиксированная постоянная из интервала $(0, 1)$, $M > 0$ – некоторая не зависящая от ε константа, $v(\tau)$ – функция (2.18). А отсюда очевидным образом следует, что

$$\mathcal{W}[(N_*, N_*)] = \frac{\varepsilon \exp(1/\varepsilon)}{T_0} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \exp[v(\tau)] d\tau + o(1) \right). \quad (4.54)$$

В случае пространственно неоднородного цикла $(N_1(t, \lambda, d), N_2(t, \lambda, d))$ рассуждения аналогичны. Опираясь на соответствующие асимптотические формулы из п. 3.2 (см. (3.24), (3.26), (3.46), (3.47), (3.49)–(3.51), (3.59), (3.60), (3.62), (3.63)), убеждаемся, что для обеих компонент N_1, N_2 упомянутого цикла неравенства вида (4.52) сохраняются. Что же касается интегралов по отрезку $1 - \varepsilon^\delta \leq t \leq 1 + \varepsilon^\delta$, то для них с учетом асимптотических представлений (3.46) получаем аналогичные (4.53) формулы

$$\begin{aligned} \int_{1-\varepsilon^\delta}^{1+\varepsilon^\delta} N_1(t, \lambda, d) dt &= \varepsilon \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \exp[v_1^0(\tau, z)|_{z=\tilde{z}(d)}] d\tau + o(1) \right), \\ \int_{1-\varepsilon^\delta}^{1+\varepsilon^\delta} N_2(t, \lambda, d) dt &= \varepsilon \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \exp[(v_1^0(\tau, z) + v_2^0(\tau, z))|_{z=\tilde{z}(d)}] d\tau + o(1) \right). \end{aligned} \quad (4.55)$$

Здесь $v_1^0(\tau, z), v_2^0(\tau, z)$ – функции (3.33), а $z = \tilde{z}(d) > 0$ – устойчивая неподвижная точка отображения (3.22).

Объединяя соотношения (4.54), (4.55) и учитывая, что период рассматриваемого неоднородного цикла в силу (3.64) допускает асимптотику вида $T(\lambda, d) = T_0 + O(1/\lambda)$, приходим к выводу о существовании требуемого предела $U_0(d)$ функции (4.50) при $\lambda \rightarrow \infty$. Более того, несложный подсчет показывает, что

$$U_0(d) = \frac{1}{2} [\exp \kappa_3(z) + \exp(\kappa_3(z) + \kappa_4(z))] |_{z=\tilde{z}(d)}, \quad (4.56)$$

где $\kappa_3(z), \kappa_4(z)$ – функции (3.34).

На заключительном этапе обоснования перепишем в инвариантной форме правую часть равенства (4.56). Проблема здесь заключается в том, что фигурирующее в (3.34) решение $y_0(t, z)$ задачи Коши (3.11), (3.12) зависит от выбора начального момента времени $t = -\sigma_0$. Таким образом, от σ_0 должна, в принципе, зависеть и функция $U_0(d)$. Однако на самом деле это не так. Действительно, неподвижные точки $z(d)$ и $\tilde{z}(d)$ отображений (3.78) и (3.22)

связаны соотношением $z(d) = P^{\sigma_0}(\tilde{z}(d))$, где P^t – оператор сдвига (3.75). Учитывая данное обстоятельство в (4.56) и выполняя в интеграле из (3.34) замену $ds = -dy/(2d \operatorname{sh} y)$, после некоторых преобразований приходим к инвариантной (не зависящей от σ_0) формуле (4.51). Остается добавить, что свойства $y_0(t, z) > 0$, $\dot{y}_0(t, z) < 0 \quad \forall t \in [0, 1] \quad \forall z > 0$ решения задачи Коши (3.79) гарантируют выполнение неравенств $\gamma_1 > \gamma_2 > 0$, из которых, в свою очередь, вытекает требуемая оценка $U_0(d) > 1$. Лемма 4.3 доказана.

Проделанный анализ позволяет утверждать, что два устойчивых пространственно неоднородных цикла системы (3.1) биологически предпочтительнее однородного цикла (3.86) и вследствие этого имеют большие, чем у него, бассейны притяжения. Таким образом, с биологической точки зрения можно говорить об элементах самоорганизации: рассматриваемый вид искусственно (за счет миграций) создает себе неоднородную среду обитания и повышает свой “уровень жизни”, характеризующийся значением функционала (4.49). Устойчивые же периодические режимы, для которых $U > 1$, в связи с вышесказанным уместно назвать режимами самоорганизации.

Случай $m > 2$ отличается от $m = 2$ лишь тем, что различных режимов самоорганизации становится много (не менее m). Здесь при произвольно заданных начальных условиях происходит конкуренция между устойчивыми циклами и в конечном итоге система (1.10) “выходит” на тот из них, для которого выбранные начальные условия оказались предпочтительнее. Таким образом, эффекты самоорганизации в цепочке (1.10) реализуются через феномен буферности.

В заключение отметим, что предпринятые в данной статье математические исследования были стимулированы компьютерным анализом системы (1.10) при $m = 2$ и 3. Иными словами, численный эксперимент помог создать адекватную асимптотическую теорию.

Список литературы

- [1] Е. Ф. Мищенко, Л. С. Понтрягин, “Периодические решения систем дифференциальных уравнений, близкие к разрывным”, *Докл. АН СССР*, **102**:5 (1955), 889–891.
- [2] Е. Ф. Мищенко, “Асимптотическое вычисление периодических решений систем дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **21**:5 (1957), 627–654.
- [3] Е. Ф. Мищенко, Л. С. Понтрягин, “Доказательство некоторых асимптотических формул для решений дифференциальных уравнений с малым параметром”, *Докл. АН СССР*, **120**:5 (1958), 967–969.
- [4] Е. Ф. Мищенко, Л. С. Понтрягин, “Вывод некоторых асимптотических оценок для решений дифференциальных уравнений с малым параметром при производных”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **23**:5 (1959), 643–660.
- [5] Л. С. Понтрягин, “Асимптотическое поведение решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **21**:5 (1957), 605–626.
- [6] Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов, *Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания*, Наука, М., 1975, 247 с.; англ. пер.: Е. F. Mishchenko, N. Kh. Rozov, *Differential equations with small parameters and relaxation oscillations*,

- Math. Concepts Methods Sci. Engrg., **13**, Plenum Press, New York, London, 1980, x+228 pp.
- [7] Е. Ф. Мищенко, Ю. С. Колесов, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, *Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах*, Наука, Физматлит, М., 1995, 336 с.
 - [8] А. Ю. Колесов, Ю. С. Колесов, *Релаксационные колебания в математических моделях экологии*, Тр. МИАН, **199**, Наука, М., 1993, 126 с.; англ. пер.: A. Yu. Kolesov, Yu. S. Kolesov, "Relaxation oscillations in mathematical models of ecology", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **199** (1995), 1–126.
 - [9] А. Ю. Колесов, Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов, "Реле с запаздыванием и его C^1 -аппроксимация", *Динамические системы и смежные вопросы*, Сборник статей. К 60-летию со дня рождения академика Дмитрия Викторовича Аносова, Тр. МИАН, **216**, Наука, М., 1997, 126–153; англ. пер.: A. Yu. Kolesov, E. F. Mishchenko, N. Kh. Rozov, "A relay with delay and its C^1 -approximation", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **216** (1997), 119–146.
 - [10] G. E. Hutchinson, "Circular causal systems in ecology", *Ann. N. Y. Acad. Sci.*, **50** (1948), 221–246.
 - [11] E. M. Wright, "A non-linear difference-differential equation", *J. Reine Angew. Math.*, **194** (1955), 66–87.
 - [12] G. S. Jones, "Asymptotic behavior and periodic solutions of a nonlinear differential-difference equation", *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **47** (1961), 879–882.
 - [13] Дж. Хейл, *Теория функционально-дифференциальных уравнений*, Мир, М., 1984, 421 с.; пер. с англ.: J. Hale, *Theory of functional differential equations*, 2nd ed., Appl. Math. Sci., **3**, New York–Heidelberg, Springer-Verlag, 1977, x+365 pp.
 - [14] А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, *Инвариантные торы нелинейных волновых уравнений*, Физматлит, М., 2004, 408 с.
 - [15] Е. Ф. Мищенко, В. А. Садовничий, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, *Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией*, Физматлит, М., 2005, 432 с.

А. Ю. Колесов (A. Yu. Kolesov)

Ярославский государственный университет

им. П. Г. Демидова

E-mail: kolesov@uniyar.ac.ru

Поступила в редакцию

14.06.2011

Н. Х. Розов (N. Kh. Rozov)

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: rozov@rozow.mccme.ru