Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. А. Айгунов, Об ограниченности ортонормированных собственных функций одного класса операторов Штурма–Лиувилля с весовой функцией неограниченной вариации на конечном отрезке, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 2, 143–144

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm947>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 16:32:56

**ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ ОРТОНОРМИРОВАННЫХ
СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОГО КЛАССА ОПЕРАТОРОВ
ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С ВЕСОВОЙ ФУНКЦИЕЙ
НЕОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ НА КОНЕЧНОМ ОТРЕЗКЕ**

Г. А. Айгунов

1. Пусть $0 < m \leq M$ – фиксированные числа. Обозначим через Q множество всех измеримых на сегменте $[0, 1]$ функций $\rho(x)$, удовлетворяющих условию

$$0 < m \leq \rho(x) \leq M < \infty.$$

Пусть $\rho(x) \in Q$, рассмотрим спектральную задачу

$$(1) \quad -y''(x) = \lambda \rho(x)y(x) \quad (0 < x < 1),$$

$$(2) \quad y(0) = y(1) = 0,$$

$$(3) \quad \int_0^1 \rho(x)y^2(x) dx = 1.$$

Известно, что спектр задачи (1)–(3) дискретен и состоит из простых положительных собственных чисел λ_n ($n = 1, 2, \dots$). Обозначим через $u_n(x)$ собственную функцию, соответствующую собственному числу λ_n . Условимся говорить, что набор собственных функций $u_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) ассоциирован с весовой функцией $\rho(x)$ спектральной задачи (1)–(3).

В классических работах Штурма, Лиувилля и Стеклова в предположении некоторой гладкости весовой функции $\rho(x)$ было доказано, что

$$(4) \quad \sup_n \max_{0 \leq x \leq 1} |u_n(x)| \leq C_0 < \infty, \quad C_0 > 0.$$

В 1983 г. было выяснено [1], что в классе всех весовых функций $\rho(x) \in Q$ неравенство (4), вообще говоря, неверно.

Во многих вопросах анализа представляет значительный интерес выяснение условий, при которых собственные функции задачи (1)–(3) ограничены в совокупности, т.е. выполнено условие (4). В работах [2]–[3] были указаны достаточные условия, обеспечивающие выполнение неравенства (4). В частности, в [3] было выяснено, что если весовая функция $\rho(x)$ является функцией ограниченной вариации, то справедливо неравенство (4).

Цель настоящей работы – указать класс весовых функций неограниченной вариации Q_1 таких, что для собственных функций спектральной задачи (1)–(3), ассоциированных с весовой функцией $\rho(x) \in Q_1$, справедлива оценка (4).

2. Пусть $\overline{m}_0 > 0$, $\overline{m}_1 > 0$ – фиксированные числа. Обозначим через Q_1 множество всех функций $\rho(x)$, заданных на $[0, 1]$ и представимых в виде

$$(5) \quad \rho(x) = r(x)g(x),$$

причем предполагается, что функция $r(x)$ является функцией ограниченной вариации и $r(x) \geq \overline{m}_0$, а функция $g(x)$ – монотонно возрастающая (не в строгом смысле) на $[0, 1]$, суммируемая функция, причем $g(x) \geq \overline{m}_1$ и

$$(6) \quad \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = R \quad (0 < R \leq \infty).$$

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА. Пусть $\rho(x) \in Q_1$, тогда для собственных функций $u_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) спектральной задачи (1)–(3) справедлива оценка (4).

3. Доказательство теоремы основывается на леммах 1–4.

Сформулируем эти леммы.

ЛЕММА 1. Если $\rho(x) \in Q_1$, то решение $\varphi(x, \lambda)$ задачи Коши

$$-\varphi''(x, \lambda) = \lambda \rho(x) \varphi(x, \lambda); \quad \varphi(0, \lambda) = 0, \quad \varphi'(0, \lambda) = 1,$$

существует при всех $x \in [0, 1]$ и при каждом фиксированном $\lambda \in [0, 1]$ является целой функцией параметра λ .

Фиксируем натуральное число k и собственное число λ_k спектральной задачи (1)–(3). Собственному числу λ_k соответствует собственная функция

$$u_k(x) = \left(\int_0^1 \rho(x) \varphi^2(x, \lambda_k) dx \right)^{-1/2} \varphi(x, \lambda_k).$$

Функция $\varphi(x, \lambda_k)$ имеет на $[0, 1]$ ровно $k + 1$ нулей z_j ($j = 0, 1, 2, \dots, k$), причем

$$0 = z_0 < z_1 < \dots < z_{k-1} < z_k = 1.$$

Введем обозначения ($i = 1, 2, \dots, k$)

$$\begin{aligned} m_i &= \inf \rho(x), \quad M_i = \sup \rho(x), \quad x \in [z_{i-1}, z_i]; \\ \delta_i &= z_i - z_{i-1}, \quad h_i = \max |\varphi(x, \lambda_k)|, \quad x \in [z_{i-1}, z_i]; \\ \alpha_i &= |\varphi'(z_i, \lambda_k)|, \quad \alpha_0 = 1, \quad \tau_i = \alpha_i / \alpha_{i-1}; \\ S_i &= \int_{z_{i-1}}^{z_i} \rho(x) \varphi^2(x, \lambda_k) dx. \end{aligned}$$

ЛЕММА 2. Справедливы неравенства ($i = 1, 2, \dots, k$)

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_{i-1}}{\sqrt{\lambda_k M_i}} &\leq h_i \leq \frac{\alpha_{i-1}}{\sqrt{\lambda_k m_i}}; \quad \frac{\pi}{\sqrt{\lambda_k M_i}} \leq \delta_i \leq \frac{\pi}{\sqrt{\lambda_k m_i}}; \\ \frac{\pi \alpha_{i-1}^2}{2 \sqrt{\lambda_k^3 M_i}} &\leq S_i \leq \frac{\pi \alpha_{i-1}^2}{2 \sqrt{\lambda_k^3 m_i}}. \end{aligned}$$

Положим для $i = 1, 2, \dots, k$

$$\begin{aligned} R_i &= \sup r(x), \quad r_i = \inf r(x), \quad x \in [z_{i-1}, z_i]; \\ G_i &\equiv g(z_i) = \sup g(x), \quad g_i \equiv g(z_{i-1}) = \inf g(x), \quad x \in [z_{i-1}, z_i]. \end{aligned}$$

ЛЕММА 3. Справедливы оценки ($i = 1, 2, \dots, k-1$; $C_0 > 0$):

$$\sqrt{\frac{r_i}{R_i}} \leq \tau_i \leq \sqrt{\frac{R_i G_i}{r_i g_i}}, \quad \frac{1}{\sqrt{C_0}} \leq \frac{\alpha_i}{\alpha_0} \leq \sqrt{C_0} \sqrt{\frac{g(z_i)}{g(z_0)}}.$$

ЛЕММА 4. Справедливо неравенство ($i = 1, 2, \dots, k-1$)

$$\frac{h_i}{\left(\int_0^1 \rho(x) \varphi^2(x, \lambda_k) dx \right)^{1/2}} \leq \sqrt{2} \lambda_k^{1/4} \left(\frac{m_i}{\alpha_i^2} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\pi \alpha_j^2}{\sqrt{M_j}} \right)^{-1/2}.$$

4. Рассмотрим некоторые частные случаи теоремы.

Пусть $g(x) \equiv 1$, тогда $\rho(x) \in Q$, следовательно, доказанная теорема обобщает результат работы [2].

Если же $r(x) \equiv 1$, а $R = \infty$ (число R определено формулой (6)), то мы получим класс Q_2 весовых функций $\rho(x)$ неограниченной вариации, обладающих тем свойством, что собственные функции спектральной задачи (1)–(3), ассоциированные с весовой функцией $\rho(x) \in Q_2$, ограничены в совокупности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гехтман М. М., Загиров Ю. М., Якубов В. Я. // Функциональный анализ и его приложения. 1983. Т. 17. № 3. С. 71–72. [2] Гехтман М. М., Айгунов Г. А. // УМН. 1995. Т. 50. № 4. С. 157–158. [3] Айгунов Г. А. // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 1996. № 1 (93). С. 15–17.