Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Зеликин, Теория и приложения задачи об эйлеровых эластиках, *УМН*, 2012, том 67, выпуск 2, 93–108

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9473>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 15:54:52

УДК 517.984

Теория и приложения задачи об эйлеровых эластиках**М. И. Зеликин**

Статья посвящена теории экстремальных задач об эйлеровых эластичках. С помощью метода уравнения Риккати исследуются достаточные условия оптимальности для ассоциированной задачи о минимизации энергии физического маятника. Описаны многочисленные приложения задачи об эйлеровых эластичках и ее связи с теорией вполне интегрируемых гамильтоновых систем.

Библиография: 10 названий.

Ключевые слова: принцип максимума Понтрягина, уравнение Риккати, эллиптические функции, нелинейное уравнение Шрёдингера.

На плоскости (x, y) рассмотрим бесконечно тонкий, однородный, нерастяжимый, упругий стержень длины единица. Пусть этот стержень закреплен в концах так, что фиксированы направления, по которым он подходит к концам. Вопрос состоит в том, какую форму примет такой стержень. Примем за параметр длину дуги искомой кривой, а через ξ обозначим угол наклона единичного касательного вектора с осью абсцисс. В качестве управления $u = \dot{\xi}$ рассмотрим скорость изменения этого вектора, т. е. кривизну искомой кривой (модуль скорости единичного касательного вектора). Тогда $x(\xi)$, $y(\xi)$ являются решениями управляемой системы

$$\begin{cases} \dot{x} = \cos \xi, \\ \dot{y} = \sin \xi, \\ \dot{\xi} = u \end{cases} \quad (1)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad \frac{dy}{dx}(0) = p_0, \\ x(1) = x_1, \quad y(1) = y_1, \quad \frac{dy}{dx}(1) = p_1. \end{aligned} \quad (2)$$

Упругая энергия стержня – это интеграл от квадрата его кривизны

$$\frac{1}{2} \int_0^1 u^2 ds. \quad (3)$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 10-01-00293-а), а также программы Президиума РАН “Математическая теория управления”.

Изучим задачу минимизации интеграла (3) при условиях (1), (2). Функция Понтрягина для этой задачи имеет вид

$$H = \psi_1 \cos \xi + \psi_2 \sin \xi + \psi_3 u + \frac{\lambda}{2} u^2.$$

Сопряженная система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = 0, \\ \dot{\psi}_2 = 0, \\ \dot{\psi}_3 = \psi_1 \sin \xi - \psi_2 \cos \xi. \end{cases}$$

Множитель λ не равен нулю, так как иначе максимум функции H достигался бы только при $\psi_3 = 0$, но тогда, в силу последнего уравнения сопряженной системы, выполнялись бы равенства $\psi_1 = \psi_2 = 0$ и все множители Лагранжа были бы равны нулю. Поэтому можно положить $\lambda = -1$. Максимум H достигается при $u = -\psi_3$. В результате получается $\ddot{\xi} = -\rho \sin(\xi + \beta)$. Выбирая начало отсчета для угла ξ , можно считать, что $\beta = 0$. Итак, имеем уравнение физического маятника

$$\ddot{\xi} = -\rho \sin \xi. \quad (4)$$

Умножая на $\dot{\xi}$ и интегрируя, получаем уравнение

$$\frac{1}{2} \dot{\xi}^2 = \rho \cos \xi + C.$$

В зависимости от граничных условий решениями могут быть: прямая – когда при всех $i = 1, 2, 3$ имеем $\psi_i \equiv 0$; окружность – когда $\psi_1 = \psi_2 \equiv 0$, $\psi_3 \equiv 1$. При остальных значениях сопряженных переменных получается семейство эллиптических функций

$$dt = \frac{d\xi}{\sqrt{2C + 2\rho \cos \xi}} = \frac{d\xi}{\sqrt{(2C + 2\rho) - 4\rho \sin^2(\xi/2)}}.$$

Интегрируя, получаем

$$\sqrt{\frac{2}{C + \rho}} \int_0^{\xi/2} \frac{d\eta}{\sqrt{1 - (2\rho/(C + \rho)) \sin^2 \eta}} = t + \gamma.$$

Выберем константу C так, чтобы выполнялось равенство $\frac{C + \rho}{2} = 1$. Тогда

$$\xi = 2 \operatorname{am}(t + \gamma; k), \quad (5)$$

где $k^2 = \rho$.

Модуль k будет фиксированным, и мы иногда будем его опускать под знаком эллиптических функций. Проверим, что в результате действительно получилось решение уравнения (4):

$$\ddot{\xi} = -2\rho \operatorname{sn}(t + \gamma) \operatorname{cn}(t + \gamma) = -\rho \sin(2 \operatorname{am}(t + \gamma)).$$

Напомним уравнение Риккати для математического маятника [1]:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}q = p, \\ \frac{d}{dt}p = -q. \end{cases}$$

Уравнение в вариациях для линейного уравнения совпадает с ним самим, и для функции $w = -pq^{-1}$ получаем

$$\frac{dw}{dt} = 1 + w^2, \quad w = -\operatorname{tg}(t + c).$$

В этом простейшем случае ближайшие взаимно сопряженные точки находятся друг от друга на расстоянии π .

Рассмотрим отдельно задачу для физического маятника (4). Его потенциальная энергия равна $U = -\rho \cos \xi$, а полная энергия равна $H = \dot{\xi}^2/2 - \rho \cos \xi$. Следовательно, функция действия имеет вид $S = \dot{\xi}^2/2 + \rho \cos \xi$ и, в соответствии с принципом наименьшего действия, задача состоит в минимизации функционала

$$J = \int_0^T \left(\frac{\dot{\xi}^2}{2} + \rho \cos \xi \right) dt. \quad (6)$$

Уравнение Эйлера для этой задачи имеет вид (4). Вторая вариация функционала (6) на экстремали $\hat{\xi}(\cdot)$ имеет вид

$$\delta^2 J = \int_0^T \left(\frac{\dot{h}^2}{2} - \rho(\cos \hat{\xi}(t))h^2 \right) dt. \quad (7)$$

Для изучения достаточных условий оптимальности применим метод уравнения Риккати.

Прежде всего следует выписать уравнение Эйлера–Якоби, линеаризуя уравнение (4):

$$\ddot{h} = -\rho(\cos \xi)h.$$

Рассмотрим $W = -\dot{h}h^{-1}$. Продифференцировав, получаем уравнение Риккати

$$\dot{W} = -\ddot{h}h^{-1} + \dot{h}(h^{-1}\dot{h}h^{-1}) = \rho \cos(2 \operatorname{am}(t + \gamma)) + W^2.$$

Используя тригонометрическую формулу двойного угла и определение эллиптических функций, находим, что

$$\dot{W} = \rho[\operatorname{cn}^2(t + \gamma) - \operatorname{sn}^2(t + \gamma)] + W^2. \quad (8)$$

Решения уравнения в вариациях можно получить, дифференцируя решения уравнения Эйлера по параметрам. Дифференцирование (5) по γ дает

$$h = 2 \operatorname{dn}(t + \gamma), \quad \dot{h} = -2\rho \operatorname{sn}(t + \gamma) \operatorname{cn}(t + \gamma).$$

Следовательно, решением уравнения Риккати (8) служит функция

$$W = -\dot{h}h^{-1} = \rho \frac{\operatorname{sn}(t + \gamma) \operatorname{cn}(t + \gamma)}{\operatorname{dn}(t + \gamma)}. \quad (9)$$

Уравнения Риккати получили свое название по имени знаменитого итальянского математика, графа Якопо Франческо Риккати. Чтобы оценить степень его влияния на современников, достаточно сказать, что многие университеты приглашали Риккати на должность профессора, Петр Великий предложил ему стать президентом Санкт-Петербургской Академии наук, Венский Двор приглашал его на должность Имперского Канцлера. От всех этих предложений Риккати отказался, говоря, что предпочитает жить в кругу семьи и заниматься математикой. В 1724 г. Риккати опубликовал в журнале “Acta Eruditorum” статью “Animadversiones in aequationes differentiales secundi gradus”, посвященную методам разделения переменных и методам понижения порядка дифференциальных уравнений. Изучая задачу восстановления плоской кривой по свойствам ее кривизны, Риккати пришел в этой статье к рассмотрению уравнения

$$b \frac{dx}{dt} = at^\alpha + x^2. \quad (10)$$

Это уравнение допускает разделение переменных при

$$\alpha = \frac{4n}{-2n+1},$$

где n – целое число. При $n \rightarrow \infty$ из этой формулы получается значение $\alpha = -2$, при котором уравнение (10) также интегрируется. В том же журнале появилась статья 22-летнего Даниила Бернулли, который писал, что оба Николая Бернулли (старший и младший), Иоганн Бернулли и он сам, Даниил Бернулли, изучали это уравнение и нашли все значения параметра α , при которых оно интегрируется. Риккати фактически отказался от спора о приоритете, заявив, что, публикуя статью, он вовсе не имел намерения бросать вызов высоко почитаемому им семейству Бернулли. В 1841 г. Ж. Лиувилль доказал, что при всех остальных значениях параметра α уравнение (10) не интегрируется в квадратурах.

Выше найдено еще одно важное уравнение Риккати (8) (связанное уже с эллиптическими функциями), которое интегрируется в квадратурах.

ТЕОРЕМА 1. 1. Если на полуинтервале $(0, T]$ функция $\text{dn}(t)$ не обращается в нуль, то экстремаль $\hat{\xi}(t)$ оптимальна.

2. Если функция $\text{dn}(t)$ обращается в нуль в двух точках t_* и t^* полуинтервала $[0, T)$, то экстремаль $\hat{\xi}(t)$ не оптимальна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае 1 прибавим под знаком интеграла (7) полную производную

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\rho \text{sn}(t) \text{cn}(t)}{\text{dn}(t)} h^2 \right).$$

Если функция $h(\cdot)$ удовлетворяет нулевым граничным условиям, то значение функционала не изменится. В силу выполнения уравнения Риккати под интегралом возникнет полный квадрат, что доказывает положительность второй вариации (7).

В случае 2 рассмотрим функцию

$$\begin{cases} \tilde{h} = \text{dn}(t) & \text{при } t \in [t_*, t^*], \\ \tilde{h} = 0 & \text{при } t \notin [t_*, t^*]. \end{cases}$$

Если бы вторая вариация (7) была неотрицательна, то функция $\tilde{h}$ наряду с функцией $h = 0$ давала бы минимум функционалу (7), не удовлетворяя необходимым условиям минимума в угловых точках. Теорема доказана.

Вернемся к задаче об эйлеровых эластиках. Решение (9) уравнения Риккати (8) уходит в бесконечность при $\operatorname{dn}(t + \gamma) \rightarrow 0$. При этом ни $\operatorname{sn}(t + \gamma)$, ни $\operatorname{cn}(t + \gamma)$ в нуль не обращаются. Функция $\operatorname{dn}(t + \gamma)$ имеет прямое отношение к задаче об эластиках.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Необходимым условием для точки перегиба элаستيки служит равенство $\operatorname{dn}(t + \gamma) = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем уравнения (1):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos(2 \operatorname{am}(t + \gamma))}{\sin(2 \operatorname{am}(t + \gamma))} = \frac{\operatorname{cn}^2(t + \gamma) - \operatorname{sn}^2(t + \gamma)}{2 \operatorname{sn}(t + \gamma) \operatorname{cn}(t + \gamma)}.$$

Далее,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \left(\frac{dx}{dt} \right)^{-1}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{-\sin^2(2 \operatorname{am}(t + \gamma)) \cdot 2 \operatorname{dn}(t + \gamma) - \cos^2(2 \operatorname{am}(t + \gamma)) \cdot 2 \operatorname{dn}(t + \gamma)}{\sin^3(2 \operatorname{am}(t + \gamma))} \\ &= \frac{2 \operatorname{dn}(t + \gamma)}{\sin^3(2 \operatorname{am}(t + \gamma))}. \end{aligned}$$

Утверждение доказано.

Доказанный факт вполне понятен, так как в точке перегиба направление вращения угла ξ меняется на противоположное. Поэтому $\dot{\xi} = 2 \operatorname{dn}(t + \gamma)$ меняет знак, проходя через нуль.

Найденное решение уравнения Риккати (8) и утверждение 1 объясняют, почему сопряженные точки играют столь важную роль в вопросах устойчивости эластик. Макс Борн в 1906 г. произвел серию физических экспериментов. Он рассмотрел вопрос о достаточных условиях оптимальности эластик и доказал, что при отсутствии на них перегибов сопряженных точек нет. Отсутствие сопряженных точек гарантирует устойчивость формы элаستيку при малых изменениях граничных условий. Если постепенно менять граничные условия, вращая концы стержня, то при возникновении пары сопряженных точек локальный минимум перестанет достигаться. Существуют сколь угодно малые изменения его формы, которые приводят к меньшим значениям минимизируемого функционала. Положение стержня станет неустойчивым. Реальный стержень начнет двигаться и в практических экспериментах он скачком перепрыгнет в положение, устойчивое для образовавшихся граничных условий. Устойчивые конфигурации могут оказаться глобально неоптимальными, но чтобы перейти в точку глобального минимума, требуются большие отклонения. Для изучения глобального минимума надо рассмотреть точки Максвелла

(cut off), в которые приходит несколько экстремалей с одним и тем же значением функционала. Исследование сопряженных точек и точек Максвелла для плоских эластиков, использующее группы симметрий решений уравнения Эйлера, было проведено в работе Ю.Л. Сачкова [2]. С помощью прямого вычисления экспоненциального отображения для второй вариации им было доказано, что точка, сопряженная к исходной, лежит между первой и третьей точкой перегиба.

Приведем теперь решение задачи о трехмерных эластиках.

Напомним, что уравнения Френе – это уравнения эволюции сопровождающего трехгранника $r = (e_1, e_2, e_3)$, где e_1 – единичный касательный вектор, e_2 – единичный вектор главной нормали, e_3 – единичный вектор бинормали. Эволюция векторов трехгранника, рассматриваемых как функции длины дуги s , может быть записана в матричной форме:

$$\frac{dr}{ds} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \kappa \\ 0 & -\kappa & 0 \end{pmatrix} r.$$

Матрица этой системы принадлежит алгебре Ли специальной ортогональной группы. Эта матрица действует на сопровождающий трехгранник – ортонормированный репер $r = (e_1, e_2, e_3)$.

Рассмотрим, как прежде, задачу минимизации интеграла от квадрата кривизны, но теперь для кривых в трехмерном пространстве. Примем за управляющие функции кривизну $k(s)$ и кручение $\kappa(s)$, рассматриваемые как функции от натурального параметра s – длины дуги. Запишем уравнения, описывающие положение стержня в подвижной системе координат, отвечающей сопровождающему трехграннику Френе. Трехмерная функция $x(s)$ задает его положение; функции $e_1(s)$, $e_2(s)$, $e_3(s)$ – это касательный вектор, нормаль и бинормаль соответственно. Имеем уравнения

$$\begin{cases} \dot{x} = e_1, \\ \dot{e}_1 = k e_2, \\ \dot{e}_2 = -k e_1 + \kappa e_3, \\ \dot{e}_3 = -\kappa e_2. \end{cases} \quad (11)$$

Обозначим через λ_0 множитель Лагранжа, отвечающий функционалу, через μ вектор, отвечающий переменным x , и через λ_i векторы, отвечающие переменным e_i . Скалярные произведения будут обозначаться круглыми скобками. Строим функцию Понтрягина

$$H = \lambda_0 k^2 + (\mu, e_1) + k(\lambda_1, e_2) - k(\lambda_2, e_1) + \kappa(\lambda_2, e_3) - \kappa(\lambda_3, e_2). \quad (12)$$

Сопряженная система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\mu} = 0, \\ \dot{\lambda}_1 = k \lambda_2 - \mu, \\ \dot{\lambda}_2 = -k \lambda_1 + \kappa \lambda_3, \\ \dot{\lambda}_3 = -\kappa \lambda_2. \end{cases} \quad (13)$$

Нетрудно проверить, что $\lambda_0 \neq 0$. Возьмем $\lambda_0 = 1/2$. Условие минимума по k дает

$$k = (\lambda_1, e_2) - (\lambda_2, e_1). \quad (14)$$

Условие минимума по κ дает

$$(\lambda_2, e_3) - (\lambda_3, e_2) = 0. \quad (15)$$

Исходя из системы (11)–(15), найдем уравнения, которым удовлетворяют управления $k(s)$ и $\kappa(s)$.

Продифференцируем уравнение (15):

$$-k(\lambda_1, e_3) + \kappa(\lambda_3, e_3) - \kappa(\lambda_2, e_2) = -\kappa(\lambda_2, e_2) - k(\lambda_3, e_1) + \kappa(\lambda_3, e_3).$$

Из этого уравнения следует, что $k[(\lambda_3, e_1) - (\lambda_1, e_3)] = 0$. Поскольку мы ищем эластики, на которых k не обращается в нуль тождественно ни на одном интервале, то

$$(\lambda_3, e_1) = (\lambda_1, e_3). \quad (16)$$

Дифференцируем соотношение (16):

$$-\kappa(\lambda_2, e_1) + k(\lambda_3, e_2) = k(\lambda_2, e_3) - \kappa(\lambda_1, e_2) - (\mu, e_3).$$

Учитывая равенства (16) и (14), получаем

$$(\mu, e_3) = -k\kappa. \quad (17)$$

Дифференцируя (17), имеем

$$\kappa \dot{k} + \dot{\kappa} k = \kappa(\mu, e_2). \quad (18)$$

Выражение для $\dot{k}$ найдем из (14):

$$\dot{k} = -(\mu, e_2) + k(\lambda_2, e_2) - k(\lambda_1, e_1) + \kappa(\lambda_1, e_3) + k(\lambda_1, e_1) - \kappa(\lambda_3, e_1) - k(\lambda_2, e_2),$$

откуда, используя (16), получаем

$$\dot{k} = -(\mu, e_2). \quad (19)$$

Найдем производную от функции $k^2\kappa$, используя (18) и (19):

$$\frac{d}{ds}(k^2\kappa) = 2k\kappa\dot{k} + k[(\mu, e_2)\kappa - \kappa\dot{k}] = k\kappa[\dot{k} + (\mu, e_2)] = 0.$$

Мы получили первый интеграл системы (11)–(15):

$$k^2\kappa = C. \quad (20)$$

Для получения второго интеграла учтем, что максимум гамильтониана (12) равен нулю. Подставив найденные соотношения (14), (15), (19) в (12) и приравняв к нулю, получаем

$$(\mu, e_1) = -\frac{k^2}{2}. \quad (21)$$

Дифференцируем уравнение (19): $\ddot{k} = k(\mu, e_1) - \kappa(\mu, e_3)$. Подставив сюда уравнения Френе, получаем дифференциальное уравнение

$$\ddot{k} = -\frac{k^3}{2} + k\kappa = -\frac{k^3}{2} + \frac{C}{k^3}.$$

Умножим на $\dot{k}$ и проинтегрируем:

$$\frac{\dot{k}^2}{2} = -\frac{k^4}{8} - \frac{C}{2k^2} + A.$$

Разделим переменные:

$$ds = \frac{2k \, dk}{\sqrt{4C - 4Ak^2 - k^6}}.$$

Приняв за новую переменную $k^2 = -y$, получим эллиптический интеграл в стандартной форме:

$$\frac{ds}{2} = \int_b^y \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - 8Ay + 8C}}.$$

Мы вывели натуральные уравнения эластик (зависимость кривизны и кручения от длины дуги):

$$y = -k^2(s) = \wp\left(\frac{s + \alpha}{2}; 8A, -8C\right), \quad \kappa(s) = \frac{C}{k^2(s)}. \quad (22)$$

Эти уравнения определяют кривые с точностью до их расположения в пространстве.

История вариационной задачи об эластиках началась в 1691 г., когда Якоб Бернулли рассмотрел задачу о форме, которую должен принять тонкий, упругий, однородный стержень, поставленный вертикально, вделанный в пол и наклоненный под воздействием груза, закрепленного на его верхнем конце. Он получил уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^4}},$$

не интегрируемое в элементарных функциях. Я. Бернулли разложил решение в ряд и провел численные оценки.

В 1742 г. Даниил Бернулли в письме к Эйлеру предложил ему найти решение более общей, плоской, вариационной задачи: описать форму упругого стержня, минимизирующую функционал

$$\int \frac{ds}{R^2},$$

где R – радиус кривизны искомой кривой. Эйлер в это время писал книгу по вариационному исчислению, опубликованную в 1744 г. Откликнувшись на призыв Бернулли, Эйлер получил дифференциальное уравнение для решения, интегрируемое только в эллиптических функциях. Исследование эллиптических функций было осуществлено Абе́лем и Якоби спустя почти полвека. Тем не

менее, Эйлер описал и расклассифицировал все возможные формы, которые может принять стержень. С этого времени эти кривые получили название эйлеровых эластик.

Впоследствии и до самого последнего времени многие математики и физики возвращались к исследованию эйлеровых эластик. Например, Ф. Гриффитс и Р. Брайент, развивая картоновскую технику продолжения систем внешних дифференциальных форм применительно к задачам вариационного исчисления, использовали задачу об эйлеровых эластике в качестве основной модельной задачи [3], [4].

По таинственным причинам эйлеровы эластики возникают при решении самых разнообразных физических задач, казалось бы, совершенно не связанных с задачей о минимизации интеграла от квадрата кривизны (19). В этой простой задаче поразительным образом сплелись вопросы теории упругости, гидро- и газовой динамики, магнетизма, квантовой механики и т. п. Перечислим лишь некоторые примеры.

В 1986 г. А. Артур и Дж. Уолш (а также позднее и независимо В. Джорджевич), исследуя задачу о качении шара по плоскости без проскальзывания, обнаружили следующий феномен. При решении задачи о минимизации длины кривой контакта с плоскостью при оптимальном переводе шара из одного пространственного положения в другое оптимальными кривыми контакта оказываются эйлеровы эластики [5].

Г. Кирхгоф в конце XIX века рассмотрел динамические задачи о вихревых течениях невязкой, несжимаемой жидкости (или газа). Он исследовал течения, имеющие форму вихревых трубок, которые он назвал *vortex filament* (вихревые нити). Кирхгоф показал, что их уравнения определяются эллиптическими функциями такими же, как эйлеровы эластики. Поэтому в ряде современных работ они называются кирхгофовыми (а не эйлеровыми) эластиками. В частности, оси вращения торнадо в атмосфере описываются уравнениями, связанными с эйлеровыми эластиками.

В 1906 г. флорентийский математик и механик Л. С. Да Риос, ученик Т. Леви-Чивиты, исследовал движение вихревых нитей и получил замечательное уравнение, описывающее их эволюцию [6]. Пусть функция $\gamma(s, t)$ в фиксированный момент времени t – это уравнение вихревой кривой, отнесенной к натуральному параметру s , т. е. к длине дуги. Уравнение Да Риоса имеет вид

$$\gamma_t = \gamma_s \wedge \gamma_{ss}. \quad (23)$$

Здесь нижний индекс означает производную по соответствующему аргументу, знак внешнего умножения соответствует в трехмерном случае векторному произведению, γ_s – единичный касательный вектор к вихревой кривой, а γ_{ss} – вектор, направленный по главной нормали, длина которого равна модулю кривизны. Значит, на ось вихря действует усилие, пропорциональное кривизне и направленное по бинормали. Причиной этой эволюции является взаимодействие течений (в соответствии с законом Бернулли) по ближайшим наклоненным друг к другу кругам, ортогональным оси вихря. Поэтому уравнение (23) часто называют LIA (Local Induction Approximation) или потоком бинормалей.

Его связывают с одним из видов турбулентности, так называемой вихревой турбулентностью.

Уравнение Да Риоса (23) было получено из гидродинамических соображений. Попробуем понять, что оно означает с точки зрения вариационного исчисления.

ЛЕММА 1. *Длина дуги кривой $X(s)$ ($s_0 < s < s_1$) в потоке бинормалей сохраняется.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X(s, t)$ – гладкое решение уравнения (23) на отрезке $s_0 \leq s \leq s_1$. Поскольку s – длина дуги, имеем

$$\langle X_s, X_s \rangle = 1. \quad (24)$$

Запишем X_{st} в виде

$$X_{ts} = [X_s \wedge X_{ss}]_s = [X_s \wedge X_{sss}] + [X_{ss} \wedge X_{ss}]. \quad (25)$$

В формуле (25) второе слагаемое равно нулю.

Дифференцируя (24) по t , получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle X_s, X_s \rangle = 2 \langle X_{ts}, X_s \rangle = 2 \langle [X_s \wedge X_{sss}], X_s \rangle = 0.$$

Лемма доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *При переносе на любое конечное время в потоке бинормалей среднеквадратичное значение кривизны вдоль любой гладкой замкнутой кривой не меняется.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 1 можно считать, что все кривые $X(t, \cdot)$ при фиксированном значении t определены по s на одном и том же отрезке $s \in [0, 1]$.

Запишем функционал среднеквадратичного значения кривизны пространственной кривой $X(t, \cdot)$ в виде

$$J = \frac{1}{2} \int_0^1 \langle X_{ss}, X_{ss} \rangle ds.$$

Продифференцируем функционал J по t :

$$\frac{dJ}{dt} = \int_0^1 \langle X_{tss}, X_{ss} \rangle ds.$$

Дифференцируем (25) по s : $X_{tss} = [X_{ss} \wedge X_{sss}] + [X_s \wedge X_{ssss}]$. Первое слагаемое правой части этого равенства при скалярном умножении на X_{ss} дает нуль. Под интегралом остается $\langle [X_s \wedge X_{ssss}], X_{ss} \rangle$.

Перепишем полученное выражение в терминах сопровождающего трехгранника Френе:

$$\begin{aligned} X_s &= e_1, & X_{ss} &= \kappa e_2, & X_{sss} &= \dot{\kappa} e_2 - \kappa^2 e_1 + \kappa \kappa e_3, \\ X_{ssss} &= \ddot{\kappa} e_2 - 2\kappa \dot{\kappa} e_1 + 2\dot{\kappa} \kappa e_3 - \kappa \dot{\kappa} e_1 + \kappa \kappa e_3 - \kappa^3 e_2 - \kappa \kappa^2 e_2, \\ [X_s \wedge X_{ssss}] &= (\ddot{\kappa} - \kappa^3 - \kappa \kappa^2) e_3 - (2\dot{\kappa} \kappa + \kappa \dot{\kappa}) e_2. \end{aligned} \quad (26)$$

Остается скалярно умножить последнее выражение в (26) на $X_{ss} = ke_2$. Получим

$$\langle [X_s \wedge X_{ssss}], X_{ss} \rangle = -(2k\dot{k}\kappa + k^2\dot{\kappa}) = -\frac{d}{ds}(k^2\kappa) \quad (27)$$

(ср. с формулой (20) для трехмерных эластиков).

Если кривая $X(t, \cdot)$ как функция s замкнута, то интеграл от полной производной (27) равен нулю. Предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если кривая $X(t, \cdot)$ как функция s является замкнутой эластикой, то все ее сдвиги в потоке бинормалей тоже являются эластическими.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если для сдвинутой кривой существует вариация, которая в первом порядке малости уменьшает значение функционала J , то при обратном сдвиге по времени мы получили бы вариацию исходной кривой, также уменьшающую функционал. Следствие доказано.

В работах [7], [8] это утверждение было другим методом доказано в несколько иной ситуации, когда замкнутые эластики принадлежат однородному риманову или псевдориманову пространству постоянной кривизны.

Итак, замкнутые эластики образуют интегральное многообразие потока бинормалей Да Риоса.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. С точки зрения изучения движения тайфуна было бы интересно найти правильные граничные условия и получить, используя формулу (27), законы сохранения для незамкнутых кривых. Хорошо было бы их сравнить с законами сохранения для нелинейного уравнения Шрёдингера (см. ниже о преобразовании Хасимото).

Уравнение Да Риоса возникает при изучении эволюции одномерной спин-системы (фермионной жидкости, описывающей магнитное взаимодействие фермионов, обладающих ненулевым спином) [9].

Особенно существенным уравнение Да Риоса становится для плазмы, когда в результате круговых токов вокруг оси вихря возникает магнитное поле, направленное вдоль оси “катушки”. В работах по астрофизике высказывалось мнение, что солнечные протуберанцы – это вихревые нити в плазме солнечной короны. Видимо, по этой причине вихревые нити стали интенсивно изучаться в середине XX века в теории магнетизма. Было выяснено [7], что силовые линии так называемых киллинговых магнитных полей (т. е. полей, сдвиги по траекториям которых определяют изометрии пространства) удовлетворяют уравнению (23). Релятивистские заряженные частицы под влиянием собственного магнитного момента и киллинговых магнитных полей на однородных многообразиях постоянной кривизны (т. е. в ситуациях, описываемых общей теорией относительности) движутся по траекториям эйлеровых эластиков. Поэтому естественным является появление эйлеровых эластиков в теории сверхпроводимости.

Как известно, при воздействии на сверхпроводник достаточно сильного магнитного поля происходит фазовый переход в нормальное (не сверхпроводящее) состояние. Сверхпроводимость исчезает не мгновенно. При магнитном поле, близком к критическому, сначала возникает смешанное состояние. В основной

своей массе проводник остается в сверхпроводящем состоянии, но в нем возникают так называемые абрикосовские нити. Это вихревые линии, центральная область которых, подобно глазу тайфуна, перешла из сверхпроводящего в нормальное состояние. Эти нити взаимодействуют друг с другом. Они отталкиваются. В проводнике возникает аналог кристаллической решетки, состоящей не из атомов, а из нитей. Эти нити имеют форму эластик. В физических экспериментах на тонких пленках эту структуру можно явно наблюдать, так что это не только теоретические конструкции. Правда, надо сказать, что мне не известны эксперименты, в которых можно было бы наблюдать форму самих нитей. В экспериментах фиксируются только центры – следы нитей на тонкой пленке, образующие красивый кристаллический узор. При дальнейшем повышении напряженности внешнего магнитного поля вихревые нити сливаются и проводник целиком переходит в нормальное состояние.

В 80-х годах двадцатого века японский математик Х. Хасимото предложил преобразование, которое переводит решение вихревого уравнения Да Риоса (23) в решение знаменитого вполне интегрируемого нелинейного уравнения Шрёдингера, играющего важную роль в квантовой оптике:

$$iu_t = -u_{xx} - \frac{1}{2}u|u|^2.$$

Это уравнение обладает полным, счетным набором первых интегралов и имеет солитонные решения.

Преобразование Хасимото отождествляет пространство связных, гладких кривых $\gamma(s)$ без точек распрямления, профакторизованного по группе жестких движений пространства $\mathbb{R}^3$, с множеством комплексных функций ψ . Отождествление задается комплекснозначной функцией $\psi(s)$, называемой в квантовой механике волновой функцией, определяющей состояние системы. Волновая функция задается формулой

$$\psi(s) = k(s) \exp\left(i \int_0^s \kappa(\xi) d\xi\right),$$

где $k(s)$ – кривизна, а $\kappa(s)$ – кручение кривой γ . Обратное отображение определяется формулами

$$k(s) = |\psi(s)|, \quad \kappa(s) = \frac{d}{ds} \arg \psi(s).$$

Приведем вывод этой редукции, использующий преобразование Хасимото, следуя [10].

Хасимото предложил использовать вместо трехгранника Френе комплексный сопровождающий трехгранник, взяв на роль e_2, e_3 пару комплексно сопряженных нормалей и рассмотрев трехгранник $Y = (e_1, Z, \bar{Z})$ такой, что

$$Z(s, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (e_2(s, t) + ie_3(s, t)) \exp\left(i \int_0^s \kappa(\xi, t) d\xi\right). \quad (28)$$

Проверим, что натуральное уравнение кривой γ в комплексном сопровождающем трехграннике $(e_1, Z, \bar{Z})$ можно записать в следующей матричной форме:

$$\frac{\partial Y}{\partial s} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\psi} & \frac{1}{\sqrt{2}} \psi \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \psi & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\psi} & 0 & 0 \end{pmatrix} Y = PY. \quad (29)$$

Действительно, первая строка матрицы должна дать $\partial e_1 / \partial s = k e_2$. Но при умножении $\bar{\psi}$ на Z и ψ на $\bar{Z}$ интегралы сокращаются и остается

$$\frac{k}{2} ((e_2 + i e_3) + (e_2 - i e_3)) = k e_2,$$

как и требовалось. Вторая строка должна дать

$$-\frac{k e_1}{\sqrt{2}} \psi = -\frac{k e_1}{\sqrt{2}} \exp \left(i \int_0^s \kappa(\xi, t) d\xi \right).$$

Но вторая компонента вектора, стоящего в левой части, равна

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial s} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ (-k e_1 + \kappa e_3) + i(-\kappa e_2) + i\kappa(e_2 + i e_3) \} \exp \left(i \int_0^s \kappa(\xi, t) d\xi \right) \\ &= -\frac{k e_1}{\sqrt{2}} \exp \left(i \int_0^s \kappa(\xi, t) d\xi \right), \end{aligned}$$

как и требовалось. Третья строка получается комплексным сопряжением из второй.

Пусть $\gamma(s, t)$ описывает эволюцию кривой $\gamma(\cdot)$. Волновая функция имеет вид

$$\psi(s, t) = k(s, t) \exp \left(i \int_0^s \kappa(\xi, t) d\xi \right). \quad (30)$$

Заметим, что, вследствие выхода в комплексное пространство, матрица системы (29) принадлежит алгебре Ли специальной унитарной (а не ортогональной) группы. Она косоэрмитова, и ее след равен нулю. Поэтому для описания эволюции $\partial Y / \partial t$ мы тоже будем искать систему с косоэрмитовой матрицей, имеющей нулевой след, причем правый нижний (2×2) -угол матрицы заполним вместо нулей диагональной матрицей:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\phi} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \phi \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \phi & \frac{iR}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\phi} & 0 & -\frac{iR}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} Y = QY. \quad (31)$$

Здесь $\phi(s, t)$ – искомая комплекснозначная функция, $R(s, t)$ – искомая действительная функция.

Для $\phi(s, t)$ и $R(s, t)$ получаем уравнения

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\phi} Z - \frac{1}{\sqrt{2}} \phi \bar{Z} &= \frac{\partial e_1}{\partial t}, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \phi e_1 + \frac{iR}{\sqrt{2}} Z &= \frac{\partial Z}{\partial t}. \end{aligned} \quad (32)$$

Третье уравнение получается из второго комплексным сопряжением. Сопоставляя формулы (29):

$$\frac{\partial Y}{\partial s} = PY,$$

и (31), получаем

$$\frac{\partial Y}{\partial s} = QY.$$

Поскольку смешанные производные не зависят от порядка дифференцирования, имеем

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t \partial s} = P_t Y + P Y_t = Q_s Y + Q Y_s.$$

Следовательно,

$$P_t - Q_s + [P, Q] = 0. \quad (33)$$

Легко сосчитать, что коммутатор $[P, Q]$ матриц P и Q равен

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{iR}{\sqrt{2}} \bar{\psi} & -\frac{iR}{\sqrt{2}} \psi \\ \frac{iR}{\sqrt{2}} \psi & \frac{1}{2} (\bar{\phi}\psi - \phi\bar{\psi}) & 0 \\ -\frac{iR}{\sqrt{2}} \bar{\psi} & 0 & -\frac{1}{2} (\bar{\phi}\psi - \phi\bar{\psi}) \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Элемент (2, 2) матрицы в левой части (33) дает равенство

$$R_s = \frac{i}{\sqrt{2}} (\bar{\phi}\psi - \phi\bar{\psi}). \quad (35)$$

Элемент (1, 3) матрицы в левой части (33) дает равенство

$$\frac{iR}{\sqrt{2}} \psi = \psi_t + \phi_s. \quad (36)$$

Теперь предположим, что эволюция во времени кривой γ удовлетворяет уравнению вихревой нити (23):

$$\gamma_t = \gamma_s \wedge \gamma_{ss} = k e_3.$$

Дифференцируя это уравнение, формулы Френе, соотношение $e_1 \wedge e_2 = e_3$ и следствия из этого соотношения, которые получаются при циклических перестановках индексов (1, 2, 3), имеем

$$\begin{aligned} (e_1)_t &= \gamma_{st} = \gamma_{ts} = (e_1 \wedge (k e_2))_s \\ &= e_1 \wedge (k_s e_2 + k(-k e_1 + \kappa e_3)) = k_s e_3 - k \kappa e_2. \end{aligned}$$

Сопоставим полученное равенство с первым уравнением системы (32):

$$k_s e_3 - k \kappa e_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\phi \bar{Z} + \bar{\phi} Z). \quad (37)$$

С другой стороны, прямым дифференцированием волновой функции (30) проверяем, что

$$\psi_s = (ik\kappa + k_s) \exp\left(i \int_0^s \kappa(\xi, t) d\xi\right).$$

Следовательно (учитывая, что экспоненты, как обычно, взаимно уничтожаются), получаем

$$\psi_s \bar{Z} + \bar{\psi}_s Z = \sqrt{2} (k \kappa i e_2 - i k_s e_3). \quad (38)$$

Сравнивая (38) с (27), имеем

$$\phi \bar{Z} + \bar{\phi} Z = \sqrt{2} (k \kappa e_2 - k_s e_3).$$

Сопоставляя полученное выражение с (28), находим, что

$$\phi \bar{Z} + \bar{\phi} Z = i(\psi_s \bar{Z} + \bar{\psi}_s Z).$$

Приравнявая коэффициенты при Z и $\bar{Z}$, получаем искомое выражение для ϕ :

$$\phi = -i\bar{\psi}. \quad (39)$$

Тогда из формулы (35) следует, что

$$R_s = -\frac{i}{\sqrt{2}} (i\psi_s \bar{\psi} + i\bar{\psi}_s \psi) = \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial s} |\psi|^2.$$

Таким образом,

$$R = \frac{i}{\sqrt{2}} |\psi|^2 + C. \quad (40)$$

Подстановка (39) и (40) в (36) дает

$$i\psi_t + \psi_{ss} + \frac{1}{2} |\psi|^2 \psi + C\psi = 0.$$

Мы получили, что волновая функция удовлетворяет нелинейному уравнению Шрёдингера.

Этот результат показывает, что вдоль оси вихревой нити распространяются солитоноподобные волны.

Мы видим, насколько разнообразные применения имеет решение этой не-сложной, но столь важной экстремальной задачи.

Список литературы

- [1] М. И. Зеликин, *Однородные пространства и уравнение Риккати в вариационном исчислении*, Факториал, М., 1998, 350 с.; англ. пер.: М. I. Zelikin, *Control theory and optimization*, v. I: *Homogeneous spaces and the Riccati equation in the calculus of variations*, Encyclopaedia Math. Sci., **86**, Springer-Verlag, Berlin, 2000, xii+284 pp.
- [2] Yu. L. Sachkov, “Conjugate points in Euler elastic problem”, *J. Dyn. Control Syst.*, **14**:3 (2008), 409–439; arXiv:0705.1003.
- [3] Ф. Гриффитс, *Внешние дифференциальные системы и вариационное исчисление*, Мир, М., 1986, 360 с.; пер. с англ.: Ph. A. Griffiths, *Exterior differential systems and the calculus of variations*, Progr. Math., **25**, Birkhäuser, Boston, MA, 1983, ix+335 pp.
- [4] R. Bryant, Ph. Griffiths, “Reduction for constrained variational problems and $\int \frac{1}{2}k^2 ds$ ”, *Amer. J. Math.*, **108**:3 (1986), 525–570.
- [5] V. Jurdjevic, F. Monroy-Pérez, “Variational problems on Lie groups and their homogeneous spaces: elastic curves, tops, and constrained geodesic problems”, *Contemporary trends in nonlinear geometric control theory and its applications* (México City, 2000), World Sci. Publ., Singapore, 2002, 3–51.
- [6] L. Sante da Rios, “Sul moto d’un liquido indefinito con un filetto vorticoso di forma qualunque”, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **22** (1906), 117–135.
- [7] M. Barros, J. L. Cabrerizo, M. Fernández, A. Romero, “Magnetic vortex filament flows”, *J. Math. Phys.*, 2007, № 8, 082904, 27 pp.
- [8] M. Barros, M. Fernandes, P. Lucas, M. Merono, “Hopf cylinders, B -scrolls and solitons of the Betchov–Da Rios equation in the three-dimensional anti-De Sitter space”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **321**:4 (1995), 505–509.
- [9] M. Lakshmanan, “Continuum spin system as an exactly solvable dynamical system”, *Phys. Lett. A*, **61**:1 (1977), 53–54.
- [10] H. Hasimoto, “A soliton on a vortex filament”, *J. Fluid Mech.*, **51**:3 (1972), 477–485.

М. И. Зеликин (M. I. Zelikin)

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова;

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: mzelikin@mtu-net.ru

Поступила в редакцию

14.06.2011